2014학년도 대수능 6월 모의평가 수학영역 B형 정답 및 해설

1.

출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

$4^{\frac{3}{2}} \times 27^{\frac{1}{3}}$

$= (2^2)^{\frac{3}{2}} \times (3^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 8 \times 3 = 24$

<답> ⑤

2.

출제의도 : 역행렬을 구하고 행렬의 곱셈을 할 수 있는가?

$AX = B$에서

$$X = A^{-1}B$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬 X의 모든 성분의 합은 4이다.

<답> ④

3.

출제의도 : 극한값을 구할 수 있는가?

$$\lim_{n \to \infty} \frac{5 \times 7^{n+1} + 3}{7^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left\{ 5 \times 7 + 3\left(\frac{1}{7}\right)^n \right\}$$

$$= 5 \times 7 + 3 \times 0 = 35$$

<답> ⑤

4.

출제의도 : 주어진 조건을 이용하여 등비수열의 일반항을 구할 수 있는가?

공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$$a_1 + a_2 = a + ar = 12 \quad \cdots ㉠$$

$$\frac{a_3 + a_7}{a_1 + a_5} = \frac{ar^2 + ar^6}{a + ar^4}$$

$$= \frac{r^2(a + ar^4)}{a + ar^4}$$

$$= r^2 = 4$$

$r > 0$이므로 $r = 2$

이를 ㉠에 대입하면

$$a + 2a = 12$$

$$3a = 12$$

$$\therefore \ a = 4$$

$$\therefore \ a_4 = ar^3$$

$$= 4 \times 2^3 = 32$$

<답> ③

5.

출제의도 : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

2가 적혀 있는 카드가 4가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열되어야 하므로 두 카드를 같은 카드 A, A로 생각하고, 홀수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열되어야 하므로 세 카드를 같은 카드 B, B, B로 생각하여

$A, A, B, B, B, \boxed{6}$

을 나열하고 첫 번째 A를 2, 두 번째 A를 4로 바꾸고, B를 앞에서부터 차례로 1, 3, 5로 바꾸면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{6!}{2!3!}=60$$

<답> ②

6.

출제의도 : 합성함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=1$에서 $x\to 0$일 때, (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

$\therefore\ f(0)=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x)-f(0)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x)-f(0)}{x}}$$

$$=\frac{1}{f'(0)}=1$$

$\therefore\ f'(0)=1$

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=2$에서 $x\to 1$일 때, (분자)$\to 0$이므로 (분모)$\to 0$이어야 한다.

$\therefore\ f(1)=0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{f(x)-f(1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}$$

$$=\frac{1}{f'(1)}=2$$

$\therefore\ f'(1)=\frac{1}{2}$

따라서 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(f(x))-f(f(1))}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{2x+1}\right\}$$

$$=f'(f(1))\cdot f'(1)\cdot\frac{1}{3}$$

$$=f'(0)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

<답> ①

<다른 풀이>

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{2x^2-x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{(x-1)(2x+1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\left\{\frac{f(f(x))}{f(x)}\times\frac{f(x)}{x-1}\times\frac{1}{2x+1}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(f(x))}{f(x)}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{x-1}{f(x)}}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x+1}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{x-1}{f(x)}}\times\lim_{x\to 1}\frac{1}{2x+1}$$

$$=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

7.

출제의도 : 합성변환으로 점을 다른 점으로 이동 시킬 수 있는가?

일차변환 f를 나타내는 행렬을 M이라 하면

$$M=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

또, 일차변환 g를 나타내는 행렬을 N이라 하면 g는 두 점 $A(1,0)$, $B(0,1)$을 각각 두 점 $A'(1,2)$, $B'(1,3)$으로 옮기므로

$$N\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\ N\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$$

$$N\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$$

$$\therefore\ N=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$$

따라서 합성변환 $g\circ f$를 나타내는 행렬은

$$NM=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&2\\5&6\end{pmatrix}$$

따라서 합성변환 $g\circ f$에 의하여 점 $C(2,1)$이 옮겨지는 점 C'은

$$\begin{pmatrix}2&2\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\16\end{pmatrix}$$

에서 $C'(6,16)$이다.

$$\therefore\ \alpha+\beta=6+16=22$$

<답> ①

8.

출제의도 : 미분법의 공식을 이용하여 도함수를 구하고, 미분계수를 구할 수 있는가?

삼각형 BAC의 넓이 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BC}$$

$$=\frac{1}{2}\times(t-1)\times2\sqrt{t}$$

$$=(t-1)\sqrt{t}$$

$$f'(t)=\sqrt{t}+(t-1)\times\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

$$\therefore\ f'(9)=\sqrt{9}+(9-1)\times\frac{1}{2\sqrt{9}}$$

$$=3+\frac{4}{3}$$

$$=\frac{13}{3}$$

<답> ⑤

9.

출제의도 : 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

삼각형 ABC와 삼각형 ADO는 닮음이므로

$\overline{AB}:\overline{AD}=3:1$에서

$\overline{AC}:\overline{AO}=3:1$

즉, $(a-1):1=3:1$

$a-1=3$

$\therefore\ a=4$

따라서 구하는 회전체의 부피 V는

$$V=\pi\int_0^4(2\sqrt{x})^2dx$$

$$=4\pi\int_0^4x\,dx$$

$$=4\pi\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^4$$

$$=32\pi$$

<답> ①

10.

출제의도 : 실생활에 활용된 중복조합의 수에 관한 문제를 해결할 수 있는가?

고구마피자, 새우피자, 불고기피자 중에서 m개를 주문하는 경우의 수는

$$ {}_3\mathrm{H}_m = {}_{3+m-1}\mathrm{C}_m = {}_{m+2}\mathrm{C}_m = {}_{m+2}\mathrm{C}_2 = \frac{(m+2)(m+1)}{2} = 36 $$

즉, $(m+2)(m+1)=72$

$m^2+3m-70=0$

$(m+10)(m-7)=0$

m은 자연수이므로

$m=7$

따라서 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 7개를 주문하는 경우의 수는

$$ {}_3\mathrm{H}_{7-3} = {}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = \frac{6\times5}{2\times1} = 15 $$

<답> ②

11.

출제의도 : 삼각함수의 배각의 공식을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

호 AB에 대한 원주각의 크기와 중심각의 크기의 관계로부터

$2\angle \mathrm{ACB} = \angle \mathrm{AOB} = \theta$

$\angle \mathrm{ACB} = \frac{1}{2}\theta$

$\triangle$ABC의 넓이가 2이므로

$\frac{1}{2}\times4\times3\times\sin\frac{1}{2}\theta=2$

$\therefore \sin\frac{1}{2}\theta = \frac{1}{3}$

또, $\cos\frac{1}{2}\theta = \sqrt{1-\sin^2\frac{1}{2}\theta}$

$= \frac{2\sqrt{2}}{3} \ (\because 0<\theta<\pi)$

$\therefore \sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$

$= 2\times\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{9}$

<답> ⑤

12.

출제의도 : 원과 직선의 쌍곡선의 위치관계와 쌍곡선의 꼭짓점, 초점, 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

$x>0$에서 쌍곡선의 꼭짓점과 초점의 좌표를 각각 $(a, 0)$, $(b, 0)$라 하면

$a=\frac{3}{2}$이고, $b=\sqrt{\frac{9}{4}+40}=\frac{13}{2}$

선분 QF의 길이는 원 C의 반지름의 길이와 같으므로

$\overline{\mathrm{QF}} = b-a = \frac{13}{2}-\frac{3}{2}=5$

직각삼각형 PFQ에서

$\overline{\mathrm{PF}} = \sqrt{\overline{\mathrm{PQ}}^2+\overline{\mathrm{QF}}^2}$

$= \sqrt{12^2+5^2} \ (\because \overline{\mathrm{PQ}}=12)$

$=13$

쌍곡선의 정의로부터

$\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF'}} = 2\times\frac{3}{2}$

$\therefore \overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{PF}}-3$

$=13-3$

$=10$

<답> ①

13.

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 일반항을 구할 수 있는가?

$b_n = \frac{n-1}{n}a_n$이므로

$b_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_{n+1}$

따라서,

$a_{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n^2}a_n + \frac{n+1}{n}2^n$에서

$\frac{n}{n+1}a_{n+1} = \frac{n-1}{n}a_n + 2^n$

이므로

$b_{n+1} = b_n + \boxed{2^n}$

이때, $b_{n+1} - b_n = 2^n$ 이므로

$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$

$= 0 + \frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} = 2^n - 2 \ (n \geq 2) \cdots ㉠$

그런데, ㉠에 $n=1$을 대입하면 $b_1 = 0$ 이므로

$b_n = \boxed{2^n - 2} \ (n \geq 1)$

그러므로,

$$a = \begin{cases} 2 & (n=1) \\ \frac{n}{n-1} \times (\boxed{2^n - 2}) & (n \geq 2) \end{cases}$$

따라서 $f(n) = 2^n$, $g(n) = 2^n - 2$ 이므로

$f(5) + g(10)$

$= 2^5 + (2^{10} - 2)$

$= 32 + 1022 = 1054$

<답> ⑤

14.

출제의도 : 행렬의 거듭제곱에 대한 연산을 할 수 있는가?

(가)에서 $(A-E)(A^2+A+E) = O$이고

(나)에서 $A-E$의 역행렬이 존재하므로

$(A-E)^{-1}(A-E)(A^2+A+E) = O$

$A^2 + A + E = O$

$\therefore A^2 = -(A+E)$

$\therefore (A-E)^{60} = \{(A-E)^2\}^{30}$

$= (A^2 - 2A + E)^{30}$

$= (-3A)^{30}$

$= (-3)^{30}A^{30}$

$= 3^{30}(A^3)^{10}$

$= 3^{30}E$

따라서 $(A-E)^{60}$의 모든 성분의 합은 $2 \cdot 3^{30}$이다.

<답> ②

15.

출제의도 : 일차변환을 나타내는 행렬을 구할 수 있는가?

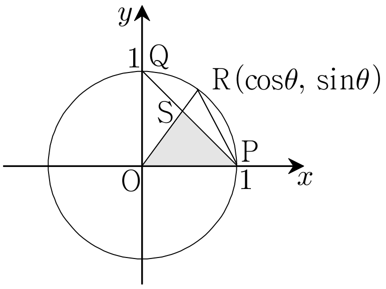
원점을 중심으로 $\theta(0 < \theta < \frac{\pi}{2})$만큼 회전시키는 회전변환 f를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

그러므로 점 P를 원점을 중심으로 θ만큼 회전시킨 점 R의 좌표를 구하면

$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$\therefore \mathrm{R}(\cos\theta, \sin\theta)$



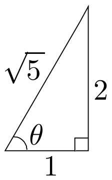
선분 PQ와 선분 OR의 교점을 S라 하면 △OPQ와 △OPR의 공통부분의 넓이가 △OPQ의 넓이의 $\frac{2}{3}$배이므로 S의 y의 좌표는 $\frac{2}{3}$이다.

또, 직선 PQ와 직선 OR의 방정식을 각각 구하면

$y=-x+1$, $y=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}x=\tan\theta\, x$

이고, 이 두 직선의 교점 S의 y좌표를 구하면

$y=\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$



즉, $\frac{2}{3}=\frac{\tan\theta}{1+\tan\theta}$이므로

$\tan\theta=2$

$\therefore \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$

따라서 회전변환 f를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은

$\cos\theta+(-\sin\theta)+\sin\theta+\cos\theta$

$=2\cos\theta$

$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

<답> ④

16.

출제의도 : 미분법을 활용할 수 있는가?

점 (t, t^3)과 직선 $y=x+6$ 사이의 거리 $g(t)$는

$$g(t)=\frac{|t-t^3+6|}{\sqrt{2}}=\frac{|-t^3+t+6|}{\sqrt{2}}$$

$g(t)=0$에서 $(t-2)(t^2+2t+3)=0$

$\therefore t=2$

$h(t)=-t^3+t+6$이라 하면

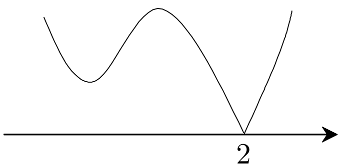
$h'(t)=-3t^2+1$

$h'(t)=0$에서 $t=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때, 함수 $y=h(t)$의 증가와 감소를 조사하면 다음 표와 같다.

t	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$
$h'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(t)$	↘	$\frac{2\sqrt{3}}{9}+6$	↗	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}+6$	↘

따라서 함수 $y=g(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.(참)

ㄴ. 함수 $g(t)$는 양수인 극솟값을 갖는다.(참)

ㄷ. 함수 $g(t)$는 $t=2$에서 미분불가능하다.(거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

<답> ③

17.

출제의도 : 지수와 로그를 활용할 수 있는가?

점 A와 B의 y의 좌표는 2^a로 같으므로

점 B의 x의 좌표를 b라 하면

$15 \cdot 2^{-b} = 2^{a}$, $15 \cdot 2^{-a} = 2^{b}$

$\overline{\mathrm{AB}} = a - b$

$= a - (-a + \log_2 15)$

$= 2a - \log_2 15$

$1 < \overline{\mathrm{AB}} < 100$에서

$1 < 2a - \log_2 15 < 100$

$1 + \log_2 15 < 2a < 100 + \log_2 15$

$\frac{1}{2}\log_2(2 \cdot 15) < a < \frac{1}{2}\log_2(15 \cdot 2^{100})$

이때,

$\frac{1}{2}\log_2(2 \cdot 15) = 2.\times\times\times$

$\frac{1}{2}\log_2(15 \cdot 2^{100}) = 51.\times\times\times$

따라서 구하는 자연수 a의 개수는

$(51-3)+1 = 49$

<답> ④

18.

출제의도 : 정적분과 무한급수의 관계를 이해하고 있는가?

$x_k = 1 + \frac{k}{n}$이므로 $f(x_k) = e^{1+\frac{k}{n}}$

$\therefore A_k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right) \cdot e^{1+\frac{k}{n}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(1+\frac{k}{n}\right) \cdot e^{1+\frac{k}{n}}$

$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) \cdot e^{1+\frac{k}{n}}$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx$

이때, $u = x$, $v' = e^x$ 라 하면 $u' = 1$, $v = e^x$ 이므로

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} A_k$

$= \frac{1}{2}\int_1^2 xe^x dx$

$= \frac{1}{2}\left\{[xe^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx\right\}$

$= \frac{1}{2}\{(2e^2 - e) - [e^x]_1^2\}$

$= \frac{1}{2}\{(2e^2 - e) - (e^2 - e)\}$

$= \frac{1}{2}e^2$

<답> ③

19.

출제의도 : 타원 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

타원의 접선의 기울기를 m라 하면

접선의 방정식은

$y = mx \pm \sqrt{m^2+2}$

이 접선은 점 $\mathrm{P}(k, 2)$를 지나므로

$2 = mk \pm \sqrt{m^2+2}$

$(2-mk)^2 = \left(\pm\sqrt{m^2+2}\right)^2$

$m^2k^2 - 4mk + 4 = m^2 + 2$

$(k^2-1)m^2 - 4km + 2 = 0$

두 접선의 기울기의 곱이 $\frac{1}{3}$이므로 근과 계수의 관계로부터

$\frac{2}{k^2-1} = \frac{1}{3}$

$\therefore k^2 = 7$

<답> ②

20.

출제의도 : 무리방정식에 대한 실근의 개수를 파악할 수 있는가?

$\sqrt{f(x)-mx}=t(t \geq 0)$라 하면

주어진 무리방정식은

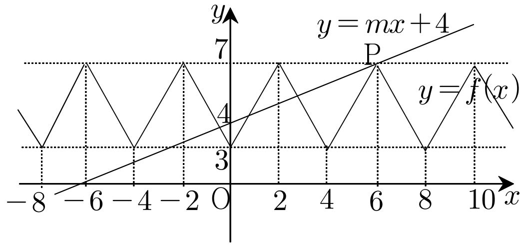
$t=t^2-2,\ t^2-t-2=(t-2)(t+1)=0$

$\therefore t=2(\because t>0)$

즉, $\sqrt{f(x)-mx}=2$에서 양변을 제곱하여 정리하면

$f(x)=mx+4$

그러므로 그림에서 두 함수 $y=f(x)$와 $y=mx+4$의 그래프의 교점의 개수가 4 이하가 되도록 하여야 한다.



즉, 직선 $y=mx+4$에 대한 기울기 m이 점 $\mathrm{P}(6,7)$을 지날 때의 기울기보다 크거나 같아야 한다.

$\therefore m \geq \dfrac{1}{2}$

따라서 m의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$이다.

<답> ④

21.

출제의도 : 도형을 활용하여 삼각함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

삼각형 AOO′에서

$\overline{\mathrm{AO}}=1,\ \overline{\mathrm{OO'}}=2$

$\overline{\mathrm{AO'}}=\sqrt{1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos\theta}$

$=\sqrt{5-4\cos\theta}$

직각삼각형 PAO′에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{5-4\cos\theta-1}$

$=\sqrt{4(1-\cos\theta)}$

$=\sqrt{4\cdot 2\sin^2\dfrac{\theta}{2}}$

$=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\theta}{2}\quad(\because\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$

$\overline{\mathrm{AO'}}$은 $\overline{\mathrm{PQ}}$를 수직이등분하므로

$\overline{\mathrm{AO'}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 교점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{PM}}\times\overline{\mathrm{AO'}}=\overline{\mathrm{AP}}\times\overline{\mathrm{PO'}}$

$\overline{\mathrm{PM}}=\dfrac{2\sqrt{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=2\overline{\mathrm{PM}}=\dfrac{4\sqrt{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to+0}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\theta}$

$=\lim\limits_{\theta\to+0}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5-4\cos\theta}}\times\dfrac{\sin\dfrac{\theta}{2}}{\theta}\right)$

$=\dfrac{4\sqrt{2}}{1}\times\dfrac{1}{2}$

$=2\sqrt{2}$

<답> ③

22.

출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3=a+2d=10\ \cdots$ ㉠

$a_2+a_5=(a+d)+(a+4d)=24$

$2a+5d=24$ $\cdots$ ㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면

$a=2,\ d=4$

$\therefore\ a_6=a+5d=2+20$

$=22$

<답> 22

23.

출제의도 : 지수함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+10x-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}+10\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2+10\right)$$

$=1\times2+10$

$=12$

<답> 12

24.

출제의도 : 실생활문제에서 지수법칙을 활용할 수 있는가?

A 지역에서

$$8=2\times\left(\frac{36}{12}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

$\therefore\ 3^{\frac{2}{2-k}}=4$ $\cdots$ ㉠

B 지역에서

$$b=a\times\left(\frac{90}{10}\right)^{\frac{2}{2-k}}$$

$\therefore\ 9^{\frac{2}{2-k}}=\dfrac{b}{a}$ $\cdots$ ㉡

㉠의 양변을 제곱하면

$9^{\frac{2}{2-k}}=16$이므로

㉡에서 $\dfrac{b}{a}=16$

<답> 16

25.

출제의도 : 삼각방정식의 해를 구할 수 있는가?

$$\sqrt{6}\sin x-\sqrt{2}\cos x=2\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$

이므로

방정식 $2\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)=2$에서

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$-\dfrac{\pi}{6}\le x-\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{11}{6}\pi$이므로

$x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{3}{4}\pi$

즉, $x=\dfrac{5}{12}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{12}\pi$

따라서, 모든 실근의 합은

$$\frac{5}{12}\pi+\frac{11}{12}\pi=\frac{4}{3}\pi$$

이므로

$p+q=3+4=7$

<답> 7

26.

출제의도 : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

조건(가)에서

$\log a_n-\log a_{n+1}=k$ (k는 정수)

$$\log\frac{a_n}{a_{n+1}}=k$$

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=10^k$

조건(나)에서 $1<\dfrac{a_n}{a_{n+1}}<100$이므로

$\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=10^1$이다.

$\therefore\ a_{n+1}=\dfrac{1}{10}a_n$

따라서, 수열 $\{a_n\}$은 공비가 $\dfrac{1}{10}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{a_1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{10}{9}a_1=500$$

$\therefore\ a_1=500\times\dfrac{9}{10}=450$

<답> 450

27.

출제의도 : 치환적분법을 이용하여 정적분을 계산할 수 있는가?

$F(x)=\displaystyle\int_0^x tf(x-t)\,dt$에서

$x-t=z$로 놓으면

$t=0$일 때 $z=x$,

$t=x$일 때 $z=0$이고,

$\dfrac{dz}{dt}=-1$이므로

$$F(x)=\int_x^0 (x-z)f(z)\cdot(-1)\,dz$$
$$=\int_0^x (x-z)f(z)\,dz$$
$$=x\int_0^x f(z)\,dz-\int_0^x zf(z)\,dz$$

$$F'(x)=\int_0^x f(z)\,dz+xf(x)-xf(x)$$
$$=\int_0^x f(z)\,dz$$
$$=\int_0^x \frac{1}{1+z}\,dz$$
$$=\Big[\ln|1+z|\Big]_0^x$$
$$=\ln(1+x)\quad(\because\ x\ge 0)$$

따라서, $F'(a)=\ln 10$에서

$\ln(1+a)=\ln 10$

$1+a=10$

$\therefore\ a=9$

<답> 9

28.

출제의도 : 분수부등식의 해를 구할 수 있는가?

$g(x)$는 이차함수이고,

$g(-1)=0,\ g(2)=0$이므로

$g(x)=a(x+1)(x-2)\ (a>0)$

로 놓을 수 있다.

$\therefore\ g(x-2)=a(x-1)(x-4)$

사차방정식 $f(x)=g(x-2)$의 네 근이

$-2,\ 1,\ 2,\ 6$이므로

$f(x)-g(x-2)$

$=b(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)\ (b>0)$

으로 놓을 수 있다.

$\dfrac{f(x)}{g(x-2)}\le 1$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{f(x)-g(x-2)}{g(x-2)}\le 0$

$\Leftrightarrow\ \dfrac{b(x+2)(x-1)(x-2)(x-6)}{a(x-1)(x-4)}\le 0$

$\Leftrightarrow\ (x+2)(x-1)^2(x-2)(x-4)(x-6)\le 0$

이고, $x\ne 1,\ x\ne 4$ $(\because\ a>0,\ b>0)$

$\Leftrightarrow\ (x+2)(x-2)(x-4)(x-6)\le 0$

이고, $x\ne 1,\ x\ne 4$

$\Leftrightarrow\ -2 \le x < 1,\ 1 < x \le 2,\ 4 < x \le 6$

따라서, 정수 x는 $-2, -1, 0, 2, 5, 6$이므로 구하는 합은

$(-2)+(-1)+0+2+5+6=10$

<답> 10

29.

출제의도 : 포물선의 성질을 이용하여 곡선과 직선의 교점의 좌표를 구할 수 있는가?

점 A의 좌표를 (x_1, y_1)이라 하면

$y_1{}^2 = 16x_1$

점 A에서의 접선의 방정식은

$y_1 y = 8(x + x_1)$

$x=0$이면

$$y = \frac{8x_1}{y_1} = \frac{\frac{1}{2}y_1{}^2}{y_1} = \frac{1}{2}y_1$$

이므로

접선과 y축의 교점을 D라 하면

$D\left(0, \frac{1}{2}y_1\right)$

따라서, 삼각형 OAD의 무게중심 B의 좌표는

$$\left(\frac{0+x_1+0}{3}, \frac{0+y_1+\frac{1}{2}y_1}{3}\right)$$

즉, $B\left(\frac{x_1}{3}, \frac{y_1}{2}\right)$이다.

$\frac{x_1}{3} = X,\ \frac{y_1}{2} = Y$로 놓으면

$x_1 = 3X,\ y_1 = 2Y$

$y_1{}^2 = 16x_1$이므로

$4Y^2 = 48X,\ \ Y^2 = 12X$

포물선 $y^2 = 12x$의 초점은 $F(3, 0)$, 준선은 $x=-3$이므로

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $P(x_2, y_2)$, $Q(x_3, y_3)$로 놓으면

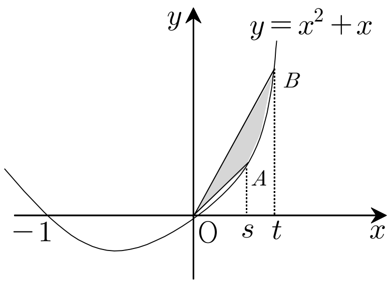
$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \overline{PF} + \overline{QF} \\ &= (x_2+3)+(x_3+3) \\ &= (x_2+x_3)+6 \\ &= 20\end{aligned}$$

$\therefore\ x_2 + x_3 = 14$

<답> 14

30.

출제의도 : 도함수를 이용하여 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?



그림의 어두운 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}t(t^2+t) - \frac{1}{2}s(s^2+s) - \int_s^t (x^2+x)\,dx$$

$$= \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{s^3}{2} - \frac{s^2}{2} - \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_s^t$$

$$= \frac{t^3}{2} + \frac{t^2}{2} - \frac{s^3}{2} - \frac{s^2}{2}$$

$$-\left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2}\right)$$

$$= \frac{t^3}{6} - \frac{s^3}{6}$$

따라서, $\frac{t^3 - s^3}{6} = k$에서

$t^3 - s^3 = 6k$

이므로 점 (s, t)가 나타내는 곡선 C는

$$y^3 = x^3 + 6k \quad \cdots ㉠$$

이다.

곡선 C 위의 점 (x, y)와 점 $(1, 0)$ 사이의 거리를 d라고 하면

$$d^2 = (x-1)^2 + y^2$$

$$= (x-1)^2 + (x^3+6k)^{\frac{2}{3}} \quad (\because ㉠)$$

이고, d가 최소일 때, d^2도 최소이다.

$f(x) = (x-1)^2 + (x^3+6k)^{\frac{2}{3}}$ 으로 놓으면

$x = \frac{2}{3}$ 일 때 $f(x)$가 최소이므로

$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ 이다.

$$f'(x) = 2(x-1) + \frac{2}{3}(x^3+6k)^{-\frac{1}{3}} \cdot 3x^2$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{8}{27}+6k\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{4}{3} = 0$$

$$\left(\frac{8}{27}+6k\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{27} + 6k = \frac{64}{27}$$

$$\therefore \ k = \frac{28}{81}$$

$$\therefore \ p + q = 81 + 28 = 109$$

<답> 109