제 2 교시

수학 영역(B 형)

5지선다형

1. 두 행렬 A, B에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$이고 $A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 B의 모든 성분의 합은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

2. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+28n}-n\right)$의 값은? [2점]

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

3. 함수 $f(x)=\sqrt{7}\sin x-3\cos x$의 최댓값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 부등식

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-6}\le 0$$

을 만족시키는 양의 정수 x의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

5. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 방정식

$$\sin 2x - \sin x = 4\cos x - 2$$

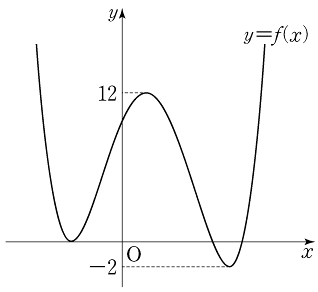
의 모든 해의 합은? [3점]

① π ② $\frac{3}{2}\pi$ ③ 2π ④ $\frac{5}{2}\pi$ ⑤ 3π

6. 한 개의 주사위를 A는 4번 던지고 B는 3번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 각각 a, b라 하자. $a+b$의 값이 6일 확률은? [3점]

① $\frac{10}{3^7}$ ② $\frac{11}{3^7}$ ③ $\frac{4}{3^6}$ ④ $\frac{13}{3^7}$ ⑤ $\frac{14}{3^7}$

7. 사차함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고, 함수 $f(x)$의 극댓값은 12, 두 극솟값은 각각 -2, 0이다.



방정식 $f(x)-\sqrt{f(x)-3}=9$의 서로 다른 실근의 개수는? [3점]

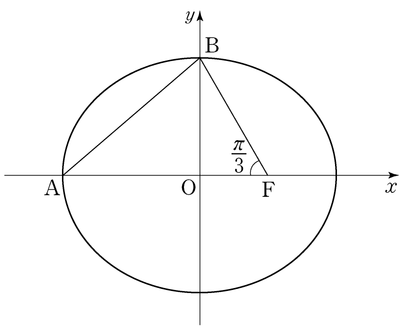
① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

8. 방정식 $x+y+z=4$를 만족시키는 -1 이상의 정수 x, y, z의 모든 순서쌍 (x, y, z)의 개수는? [3점]

① 21 ② 28 ③ 36 ④ 45 ⑤ 56

9. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점을 $\mathrm{F}(c, 0)$ $(c>0)$, 이 타원이 x축과 만나는 점 중에서 x좌표가 음수인 점을 A, y축과 만나는 점 중에서 y좌표가 양수인 점을 B라 하자. $\angle \mathrm{AFB}=\frac{\pi}{3}$이고 삼각형 AFB의 넓이는 $6\sqrt{3}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30



10. 질량 a(g)의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 c(%)인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량 b(g)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

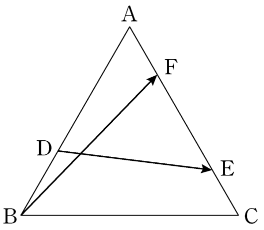
$$\log\frac{b}{a}=-1+k\log c \text{ (단, } k\text{는 상수이다.)}$$

10g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 8%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량은 4g이다. 20g의 활성탄 A를 염료 B의 농도가 27%인 용액에 충분히 오래 담가 놓을 때 활성탄 A에 흡착되는 염료 B의 질량(g)은? (단, 각 용액의 양은 충분하다.) [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

11. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC에서 변 AB를 $2:1$로 내분하는 점을 D라 하고, 변 AC를 $3:1$과 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 E, F라 할 때, $|\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2$의 값은? [3점]

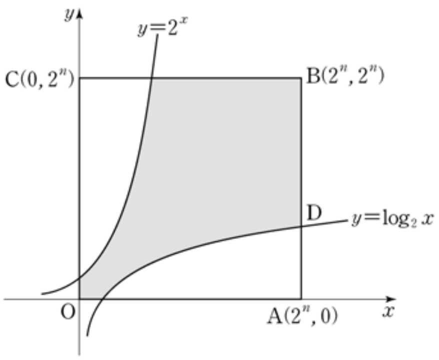
① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21



12. 어느 도시에서 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 주민들의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 주민 중 100명을 임의추출하여 조사한 결과 90명이 개방 시간 연장을 희망하였다. 이 결과를 이용하여 구한 이 도시 주민 전체의 시립 도서관 개방 시간 연장을 희망하는 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $[\hat{p}-c,\ \hat{p}+c]$일 때, c의 값은?
(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 1.96)=0.475$로 계산한다.) [3점]

① 0.0431 ② 0.0588 ③ 0.0645
④ 0.0759 ⑤ 0.0816

[13～14] 좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{A}(2^n, 0)$, $\mathrm{B}(2^n, 2^n)$, $\mathrm{C}(0, 2^n)$인 정사각형 OABC와 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 대하여 13번과 14번의 두 물음에 답하시오. (단, n은 자연수이다.)



13. 선분 AB가 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 D라 하자. 선분 AD를 $2:3$으로 내분하는 점을 지나고 y축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 E, 점 E를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 F라 하자. 점 F의 y좌표가 16일 때, 직선 DF의 기울기는? [3점]

① $-\frac{13}{28}$　② $-\frac{25}{56}$　③ $-\frac{3}{7}$　④ $-\frac{23}{56}$　⑤ $-\frac{11}{28}$

14. 정사각형 OABC와 그 내부는 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 의하여 세 부분으로 나뉜다. $n=3$일 때 이 세 부분 중 색칠된 부분의 넓이는? [4점]

① $14+\frac{12}{\ln 2}$　② $16+\frac{14}{\ln 2}$　③ $18+\frac{16}{\ln 2}$　④ $20+\frac{18}{\ln 2}$　⑤ $22+\frac{20}{\ln 2}$

15. 좌표공간에서 구 $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=6$과 구 $x^2+y^2+z^2+6x+2ay+2bz=0$이 원점에서 서로 접할 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

16. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=3$이고

$$na_{n+1}-2na_n+\frac{n+2}{n+1}=0 \quad (n \ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

$a_{n+1}-2a_n+\dfrac{n+2}{n(n+1)}=0$에서

$a_n-2a_{n-1}+\dfrac{n+1}{n(n-1)}=0 \quad (n \ge 2)$이므로

$$a_{n+1}-a_n-2(a_n-a_{n-1})+\frac{1}{n(n+1)}-\boxed{\text{(가)}}=0 \quad (n \ge 2)$$

이다. $b_n=a_{n+1}-a_n \quad (n \ge 1)$이라 놓으면 $b_1=\dfrac{3}{2}$이고,

$$b_n+\frac{1}{n(n+1)}=2b_{n-1}+\boxed{\text{(가)}} \quad (n \ge 2)$$

이다. 따라서

$$b_n+\frac{1}{n(n+1)}=2^n \quad (n \ge 1)$$

이다. 즉, $b_n=2^n-\dfrac{1}{n(n+1)} \quad (n \ge 1)$

이므로 $a_n=a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}b_k=\boxed{\text{(나)}} \quad (n \ge 2)$이다.

$n=1$일 때에도 이 식을 만족시키므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\boxed{\text{(나)}}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $g(6)-f(4)$의 값은? [4점]

① 64 ② 66 ③ 68 ④ 70 ⑤ 72

17. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$2A-A^2B=E$$

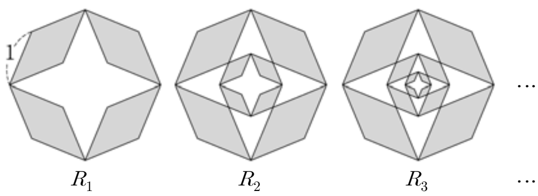
를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A^{-1}=2E-AB$
ㄴ. $AB=BA$
ㄷ. $A=\frac{1}{2}(E+BA^2)$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정팔각형의 이웃한 두 변을 변으로 하는 4개의 평행사변형을 서로 겹치지 않게 그리고, 이 평행사변형 4개를 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
그림 R_2에 가장 작은 정팔각형의 내부에 있는 평행사변형의 꼭짓점 4개를 꼭짓점으로 포함하는 정팔각형을 그린 후, 새로 그려진 정팔각형에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 4개의 평행사변형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $2+\sqrt{2}$ ② $1+2\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{2}$
④ $1+3\sqrt{2}$ ⑤ $4+\sqrt{2}$

19. 좌표공간에서 y축을 포함하는 평면 α에 대하여 xy평면 위의 원 $C_1 : (x-10)^2+y^2=3$의 평면 α 위로의 정사영의 넓이와 yz평면 위의 원 $C_2 : y^2+(z-10)^2=1$의 평면 α 위로의 정사영의 넓이가 S로 같을 때, S의 값은? [4점]

① $\dfrac{\sqrt{10}}{6}\pi$ ② $\dfrac{\sqrt{10}}{5}\pi$ ③ $\dfrac{7\sqrt{10}}{30}\pi$
④ $\dfrac{4\sqrt{10}}{15}\pi$ ⑤ $\dfrac{3\sqrt{10}}{10}\pi$

20. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $G(t)$는 평균이 t, 표준편차가 $\dfrac{1}{t^2}$인 정규분포를 따르는 확률변수 X에 대하여

$$G(t)=\mathrm{P}\left(X \le \frac{3}{2}\right)$$

이다. 함수 $G(t)$의 최댓값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580

① 0.3085 ② 0.3446 ③ 0.6915
④ 0.7257 ⑤ 0.7580

21. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$를 매개변수 t로 나타내면

$$\begin{cases} x=e^t \\ y=(2t^2+nt+n)e^t \end{cases}$$

이고, $x \ge e^{-\frac{n}{2}}$일 때 함수 $y=f(x)$는 $x=a_n$에서 최솟값 b_n을 갖는다. $\frac{b_3}{a_3}+\frac{b_4}{a_4}+\frac{b_5}{a_5}+\frac{b_6}{a_6}$의 값은? [4점]

① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

단답형

22. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+3x)+9x}{2x}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 일차변환 $f:(x,\ y)\to(ax+by,\ 4x-5y)$와 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 회전하는 회전변환 g가 $f\circ g=g\circ f$를 만족시킨다. 두 상수 $a,\ b$의 곱 ab의 값을 구하시오. [3점]

24. 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2=-2$, $a_5=7$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k}$의 값을 구하시오. [3점]

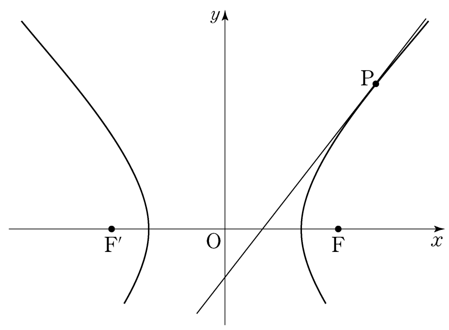
25. 휴대 전화의 메인 보드 또는 액정 화면 고장으로 서비스센터에 접수된 200건에 대하여 접수 시기를 품질보증 기간 이내, 이후로 구분한 결과는 다음과 같다.

(단위: 건)

구분	메인 보드 고장	액정 화면 고장	합계
품질보증 기간 이내	90	50	140
품질보증 기간 이후	a	b	60

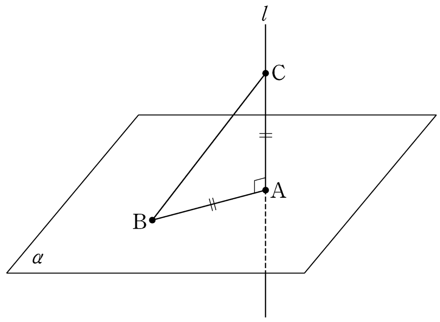
접수된 200건 중에서 임의로 선택한 1건이 액정 화면 고장 건일 때, 이 건의 접수 시기가 품질보증 기간 이내일 확률이 $\frac{2}{3}$이다. $a-b$의 값을 구하시오. (단, 메인 보드와 액정 화면 둘 다 고장인 경우는 고려하지 않는다.) [3점]

26. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(3, 0)$, $\mathrm{F}'(-3, 0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4, k)$에서의 접선과 x축과의 교점이 선분 $\mathrm{F'F}$를 $2:1$로 내분할 때, k^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]



27. 함수 $f(x)=\ln(\tan x)$ $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$의 역함수 $g(x)$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{4g(8h)-\pi}{h}$의 값을 구하시오. [4점]

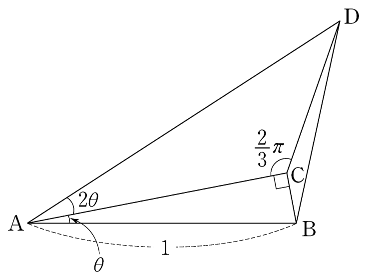
28. 좌표공간에서 직선 $l: x-1=\frac{y}{2}=1-z$와 평면 α가 점 $\mathrm{A}(1, 0, 1)$에서 수직으로 만난다. 평면 α 위의 점 $\mathrm{B}(-1, a, a)$와 직선 l 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 이등변삼각형일 때, 점 C에서 원점까지의 거리는 d이다. d^2의 값을 구하시오. [4점]



29. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 빗변으로 하고 $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$인 직각삼각형 ABC에 대하여 점 D를

$$\angle \mathrm{ACD} = \frac{2}{3}\pi, \qquad \angle \mathrm{CAD} = 2\theta$$

가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} = p$이다. $300p^2$의 값을 구하시오. (단, 네 점 A, B, C, D는 한 평면 위에 있다.) [4점]



30. 두 연속함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$g\left(e^x\right) = \begin{cases} f(x) & (0 \le x < 1) \\ g\left(e^{x-1}\right) + 5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x)\,dx = 6e^2 + 4$이다.
$\int_1^e f(\ln x)\,dx = ae + b$일 때, $a^2 + b^2$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 정수이다.) [4점]

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.