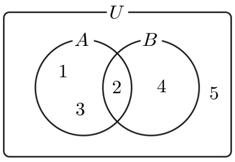
2013학년도 11월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	⑤	**3**	③	**4**	①	**5**	②
6	①	**7**	③	**8**	①	**9**	②	**10**	④
11	④	**12**	②	**13**	②	**14**	⑤	**15**	③
16	③	**17**	④	**18**	②	**19**	①	**20**	⑤
21	⑤	**22**	18	**23**	10	**24**	8	**25**	150
26	24	**27**	16	**28**	4	**29**	750	**30**	36

1. [출제의도] 집합의 연산법칙 이해하기



$(A^C \cap B)^C = A \cup B^C = \{1, 2, 3, 5\}$

따라서 집합 $(A^C \cap B)^C$ 의 모든 원소의 합은 11

2. [출제의도] 복소수의 곱셈 계산하기

$2ab = 2(1-i)(1+i)$

$= 2 \times 2 = 4$

3. [출제의도] 다항식의 덧셈과 뺄셈 계산하기

$(A+2B)-(B+C) = A+B-C$

$= x^2 + 4y^2$

4. [출제의도] 이차방정식의 판별식의 뜻 이해하기

이차방정식 $x^2 + 2kx + 3k - 2 = 0$ 에서

$\dfrac{D}{4} = k^2 - 3k + 2$

$= (k-1)(k-2) = 0$

$\therefore\ k = 1$ 또는 $k = 2$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 3

5. [출제의도] 연립이차부등식의 해 구하기

$|2x-1| < 5$ 에서

$-5 < 2x - 1 < 5$

$-4 < 2x < 6$

$\therefore\ -2 < x < 3$ …… ㉠

$x^2 - 5x + 4 \le 0$에서

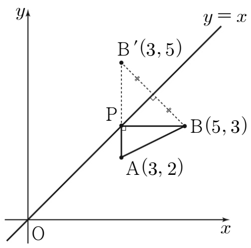
$(x-1)(x-4) \le 0$

$\therefore\ 1 \le x \le 4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는 $1 \le x < 3$

따라서 모든 정수 x의 개수는 2

6. [출제의도] 대칭이동의 의미 이해하기



점 B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점을 $\mathrm{B}'(3, 5)$라 하자.

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}} = \overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{B'P}} \ge \overline{\mathrm{AB'}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{BP}}$ 의 값이 최소인 점 P는 점 B′과 점 A를 이은 직선과 직선 $y=x$ 의 교점 $(3, 3)$이다.

삼각형 ABP는 직각삼각형이므로

따라서 (삼각형 ABP의 넓이)$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$

7. [출제의도] 유리식을 활용하여 문제해결하기

광고 전 세 제품의 비례상수를 $k_1 (k_1 \ne 0)$이라 하면

$r_1 = \dfrac{2k_1}{13k_1 + 9k_1 + 2k_1} = \dfrac{2k_1}{24k_1} = \dfrac{1}{12}$

광고 후 세 제품의 비례상수를 $k_2 (k_2 \ne 0)$라 하면

$r_2 = \dfrac{4k_2}{9k_2 + 7k_2 + 4k_2} = \dfrac{4k_2}{20k_2} = \dfrac{1}{5}$

따라서 $r_2 - r_1 = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{7}{60}$

8. [출제의도] 역함수의 성질 이해하기

(가)에서 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이다.

$f(x) = ax^2 + bx + c\,(x > -1)$라 하면

(나)에서 $f(0) = 0$이므로 $c = 0$

$f(1) = 3$이므로

$a + b = 3$ …… ㉠

$g(8) = 2$에서 $f(2) = 8$이므로

$4a + 2b = 8$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a = 1$, $b = 2$

$\therefore\ f(x) = x^2 + 2x$

$g(15) = m$이라 하면

$f(m) = m^2 + 2m = 15$

$\therefore\ (m+5)(m-3) = 0$

따라서 $m = 3$ ($\because m > -1$)

9. [출제의도] 나머지정리 이해하기

$x^3 + ax^2 - x - 1 = (x^2 - 1)Q(x) + R$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x = 1$, $x = -1$ 을 대입하면 나머지 $R = a - 1$이다.

$x^3 + ax^2 - x - 1 = (x^2 - 1)Q(x) + a - 1$에서

$x^3 + ax^2 - x - a = (x^2 - 1)(x + a)$

$= (x^2 - 1)Q(x)$

$\therefore Q(x) = x + a$

$Q(a) = R$이므로 $2a = a - 1$

따라서 $a = -1$

10. [출제의도] 함수의 뜻을 알고 추론하기

$f(0) = 3$, $f(1) = 1$, $f(2) = 3$

$g(0) = a + b$, $g(1) = b$, $g(2) = a + b$

두 함수 f와 g가 서로 같으므로

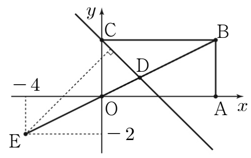
$f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$, $f(2) = g(2)$

$\therefore\ a + b = 3$, $b = 1$이므로

$a = 2$, $b = 1$

따라서 $2a - b = 3$

11. [출제의도] 선분의 내분점과 외분점 이해하기



직사각형 OABC를 점 O가 원점과 일치하도록 하는 좌표평면에 놓으면 $\mathrm{A}(6, 0)$, $\mathrm{B}(6, 3)$, $\mathrm{C}(0, 3)$이다.

선분 OB를 $1:2$ 로 내분하는 점은

$\mathrm{D}\left(\dfrac{6+0}{1+2}, \dfrac{3+0}{1+2}\right) = \mathrm{D}(2, 1)$

선분 OD를 $2:3$ 으로 외분하는 점을 E라 하면

$\mathrm{E}\left(\dfrac{4-0}{2-3}, \dfrac{2-0}{2-3}\right) = \mathrm{E}(-4, -2)$

직선 CD의 방정식은 $x + y - 3 = 0$

따라서 점 E와 직선 CD사이의 거리는

$\dfrac{|-4-2-3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{2}} = \dfrac{9}{2}\sqrt{2}$

12. [출제의도] 무리식을 활용하여 문제해결하기

연결 줄 A의 비틀림 상수는 연결 줄 B의 비틀림 상수의 4배이므로 연결 줄 B의 비틀림 상수를 a라 하면, 연결 줄 A의 비틀림 상수는 $4a$이다.

원판 A'의 관성 모멘트가 원판 B'의 관성 모멘트의 $4 + \sqrt{12}$ 배이므로 원판 B'의 관성 모멘트를 b라 하면, 원판 A'의 관성 모멘트는 $(4 + \sqrt{12})b$이다.

$T_A = 2\pi\sqrt{\dfrac{(4 + 2\sqrt{3})b}{4a}} = 2\pi\dfrac{(1 + \sqrt{3})\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}$

$T_B = 2\pi\sqrt{\dfrac{b}{a}} = 2\pi\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}$

따라서 $\dfrac{T_A}{T_B} = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$

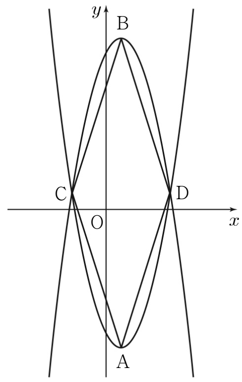
13. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계 이해하기

$f(x) = (x+2)(x-4)$이므로

$f(2x-1) = (2x+1)(2x-5)$이다.

따라서 $f(2x-1) = 0$의 두 근 $-\dfrac{1}{2}$, $\dfrac{5}{2}$의 합은 2

14. [출제의도] 두 점 사이의 거리를 활용하여 문제해결하기



$f(x)=(x+2)(x-4)$
$\quad=(x-1)^2-9$
이므로 $y=f(x)$의 꼭짓점은 A$(1,-9)$
$-f(x)+2=-(x+2)(x-4)+2$
$\quad=-(x-1)^2+11$
이므로 $y=-f(x)+2$ 의 꼭짓점은 B$(1,11)$
두 함수 $y=f(x)$, $y=-f(x)+2$의 그래프의 교점의 x좌표는
$(x-1)^2-9=-(x-1)^2+11$
$\therefore\ x=1\pm\sqrt{10}$
$\therefore$ C$(1-\sqrt{10},1)$, D$(1+\sqrt{10},1)$
사각형 ADBC가 마름모이므로
사각형 ADBC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times20\times2\sqrt{10}=20\sqrt{10}$

15. [출제의도] 실수의 연산에 관한 성질 추론하기

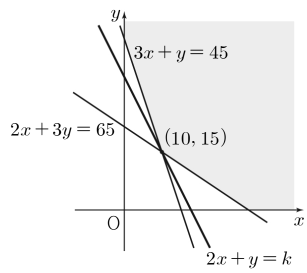
ㄱ. $3◎4=3=4◎3$ (참)
ㄴ. 연산 ◎에 대한 항등원을 e라 하면
임의의 정수 a에 대하여
$a◎e=e◎a=a$
$ae-3a-3e+12=a$
$ae-4a-3e+12=0$
$(a-3)(e-4)=0\ \therefore\ e=4$ (거짓)
ㄷ. 연산 ◎에 대한 a의 역원을 x라 하면
$a◎x=x◎a=4$
$ax-3a-3x+12=4$
$(a-3)(x-3)=1$
$x=3+\frac{1}{a-3}$ 이고, x가 정수이므로
$a-3=-1$ 또는 $a-3=1$
$\therefore\ a=2$ 또는 4
$\therefore$ 역원이 존재하는 정수의 개수는 2 (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

16. [출제의도] 절대부등식의 의미를 이해하여 문제해결하기

점 P의 좌표를 (a,b)라 하자.
$b=\frac{2}{a-1}+2$이므로
직사각형 PRSQ의 둘레의 길이 $2(\overline{\mathrm{PR}}+\overline{\mathrm{PQ}})$는
$2(a-1)+2(b-2)\geq2\sqrt{2(a-1)\times2(b-2)}$
$=2\sqrt{2(a-1)\times\frac{4}{a-1}}$
$=4\sqrt{2}$
(단, 등호는 $a-1=b-2$일 때 성립하므로
$a=1+\sqrt{2}$, $b=2+\sqrt{2}$이다.)
따라서 직사각형 PRSQ의 둘레의 길이의 최솟값은
$4\sqrt{2}$

17. [출제의도] 부등식의 영역을 활용하여 문제해결하기

마늘과 은행잎을 각각 x(kg), y(kg)이라 하면,
$x\geq0$, $y\geq0$
$3x+y\geq45$, $2x+3y\geq65$
가 나타내는 영역은 그림의 어두운 부분이다.



추출하는데 드는 비용을 k(만원)라 하면
$2x+y=k$이고
k의 값이 최소인 경우는 두 직선 $3x+y=45$, $2x+3y=65$의 교점 $(10,15)$를 지날 때이다.
따라서 최소 비용은 35(만원)

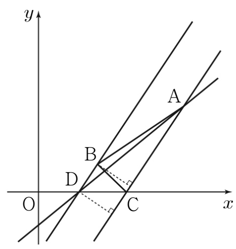
18. [출제의도] 원과 직선의 위치관계 추론하기

원점 O에서 C_2에 그은 접선은
$y=mx\cdots\cdots$ ㉠
점 $(d,0)$과 직선 $y=mx$ 사이의 거리는 r이므로
$\frac{|dm|}{\sqrt{m^2+1}}=r$
$r\sqrt{m^2+1}=|dm|$
$r^2(m^2+1)=d^2\times\boxed{m^2}\cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ f(m)=m^2$
또한, ㉠과 원 C_1의 방정식에서,
$x^2+y^2=a^2$의 양변에 m^2을 곱하면
$m^2x^2+m^2y^2=m^2a^2$이고
$y^2=m^2x^2$이므로
$y^2+m^2y^2=m^2a^2$
$y^2\times\boxed{(m^2+1)}=m^2a^2\cdots\cdots$ ㉢
$\therefore\ g(m)=m^2+1$
따라서 $f(2)\times g(3)=4\times10=40$

19. [출제의도] 사차방정식의 해 구하기

$(x^2-4x+3)(x^2-6x+8)=120$
$(x-1)(x-3)(x-2)(x-4)=120$
$(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)=120$
$x^2-5x=t$라 하면
$(t+4)(t+6)-120=0$
$t^2+10t-96=0$
$(t-6)(t+16)=0$
$(x^2-5x-6)(x^2-5x+16)=0$
$x^2-5x-6=0$ 또는 $x^2-5x+16=0$
$x^2-5x-6=(x+1)(x-6)=0$은
서로 다른 두 실근 -1, 6을 갖는다.
$x^2-5x+16=0$이 허근을 가지므로
$\omega^2-5\omega=-16$

20. [출제의도] 두 직선의 평행조건을 이해하여 문제해결하기

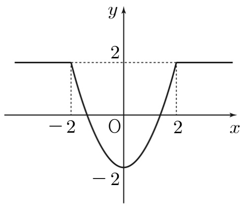


점 B를 지나고 직선 AC와 평행한 직선이 선분 OC와 만나는 점을 D$(a,0)$이라 하자.
삼각형 ABC의 넓이와 삼각형 ADC의 넓이가 같으므로 직선 BD의 기울기는 직선 AC의 기울기와 같다.
$\frac{1-0}{2-a}=\frac{3-0}{5-3}\ \therefore\ a=\frac{4}{3}$
따라서 직선 AD의 기울기는 $\frac{3-0}{5-\frac{4}{3}}=\frac{9}{11}$

21. [출제의도] 합성함수의 성질 추론하기

ㄱ. $f(g(2))=f(2)=2$ (참)
ㄴ. 함수 $(g\circ f)(x)$는
i) $x>2$일 때, $g(f(x))=g(2)=2$
ii) $|x|\leq2$ 일 때, $g(f(x))=g(x)=x^2-2$
iii) $x<-2$ 일 때, $g(f(x))=g(-2)=2$
함수 $(g\circ f)(-x)$는
i) $x>2$일 때, $g(f(-x))=g(-2)=2$
ii) $|x|\leq2$ 일 때, $g(f(-x))=g(-x)=x^2-2$
iii) $x<-2$ 일 때, $g(f(-x))=g(2)=2$
$\therefore\ (g\circ f)(-x)=(g\circ f)(x)$ (참)
ㄷ. 함수 $(f\circ g)(x)$는
i) $x>2$일 때, $x^2-2>2$이므로
$f(g(x))=f(x^2-2)=2$
ii) $|x|\leq2$ 일 때, $-2\leq x^2-2\leq2$이므로
$f(g(x))=f(x^2-2)=x^2-2$
iii) $x<-2$ 일 때, $x^2-2>2$이므로
$f(g(x))=f(x^2-2)=2$
$\therefore\ (f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

[참고] 함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프는 그림과 같다.



22. [출제의도] 미지수가 3개인 연립일차방정식의 해 구하기

연립방정식

$\begin{cases} x+y=5 & \cdots\cdots ㉠ \\ y+z=6 & \cdots\cdots ㉡ \\ 2x+z=7 & \cdots\cdots ㉢ \end{cases}$

㉡, ㉢에서

$2x-y=1 \cdots\cdots$ ㉣

㉠, ㉣에서

$x=2$이므로 $y=3,\ z=3$

$\therefore\ \ \alpha=2,\ \beta=3,\ \gamma=3$

따라서 $\alpha\beta\gamma=18$

23. [출제의도] 다항식의 인수분해 이해하기

$2x^2-4x+k=0$ 에서

$\alpha+\beta=-\dfrac{-4}{2}=2,\ \alpha\beta=\dfrac{k}{2}$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4-k$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

$\qquad\quad=2\times\left(4-k-\dfrac{k}{2}\right)=7$

$\therefore\ \ k=\dfrac{1}{3}$

따라서 $30k=10$

24. [출제의도] 필요조건과 충분조건 이해하기

세 조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 하면

$P=\{x\,|\,0<x\le 7\}$

$Q=\{x\,|-1\le x\le a\}$

$R=\{x\,|\,x\ge b\}$

p는 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$

r는 q이기 위한 필요조건이므로 $Q\subset R$

$P\subset Q\subset R$ 이므로 $a\ge 7$, $b\le -1$

따라서 $a-b$의 최솟값은 $7-(-1)=8$

25. [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

점 $(1,4)$를 점 $(-2,a)$로 옮기는 평행이동에 의하여 좌표평면 위의 점은 x축의 방향으로 -3만큼, y축의 방향으로 $a-4$만큼 옮겨진다.

$x^2+y^2+8x-6y+21=0$에서

$(x+4)^2+(y-3)^2=4\ \ \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+y^2+bx-18y+c=0$에서

$\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2+(y-9)^2=81-c+\dfrac{b^2}{4}\ \ \cdots\cdots$ ㉡

㉠의 원의 중심 $(-4,3)$이 평행이동에 의하여

㉡의 원의 중심 $\left(-\dfrac{b}{2},9\right)$로 옮겨지므로

$\therefore\ \ a=10,\ b=14$

평행이동을 하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로

$4=81-c+\dfrac{196}{4}$

$\therefore\ \ c=126$

따라서 $a+b+c=150$

26. [출제의도] 복소수의 값 추론하기

$z_1=\dfrac{\sqrt{2}}{1+i}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$, $z_1^{\ 2}=-i,\ z_1^{\ 3}=\dfrac{-i-1}{\sqrt{2}}$,

$z_1^{\ 4}=-1$, $\cdots$, $z_1^{\ 8}=1$, $\cdots$

$z_2=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$, $z_2^{\ 2}=\dfrac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}$,

$z_2^{\ 3}=1$, $\cdots$

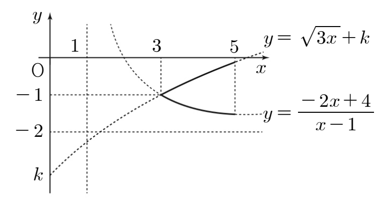
$z_1^{\ n}=z_2^{\ n}$을 만족시키는 자연수 n은 8과 3의 공배수이다.

따라서 자연수 n의 최솟값은 24

27. [출제의도] 유리함수와 무리함수의 그래프의 성질 이해하기

$3\le x\le 5$ 에서 정의된 함수

$y=\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{2}{x-1}-2$ 의 그래프는 그림과 같다.



$y=\sqrt{3x}+k$가 점 $(3,-1)$을 지날 때, 실수 k가 최댓값을 가지므로 $M=-4$

따라서 $M^2=16$

28. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 이해하여 문제해결하기

$f(-2)=f(6)$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 대칭축은 $x=2$이고,

함수 $f(x)$의 최솟값이 -9이므로

$f(x)=(x-2)^2-9$

$\quad\ \ =x^2-4x-5$

$\quad\ \ =(x+1)(x-5)$

$f(|f(x)|)=0$ 에서

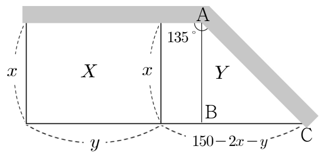
$|f(x)|=t\,(t\ge 0)$ 라 하면 $f(t)=0$이고 $\ t=5$

$\therefore\ \ f(x)=5,\ -5$

$y=f(x)$의 그래프와 두 직선 $y=5,\ y=-5$는 각각 서로 다른 두 점에서 만난다.

따라서 서로 다른 실근의 개수는 4

29. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 문제해결하기



그림과 같이 직사각형의 세로와 가로의 길이를 각각 $x,\ y$라 하자.

X의 넓이는 xy이고,

철망의 길이가 150이므로 사다리꼴의 아랫변의 길이는 $150-2x-y$이다.

점 A 에서 사다리꼴의 아랫변에 내린 수선의 발을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는 x이고

$\angle\mathrm{CAB}=45^\circ$ 이므로 선분 BC의 길이는 x이다.

사다리꼴의 윗변의 길이는

$(150-2x-y)-x=150-3x-y$

Y의 넓이는

$\dfrac{1}{2}x\{(150-3x-y)+(150-2x-y)\}$

$=\dfrac{1}{2}x(300-5x-2y)$

X의 넓이는 Y의 넓이의 2배이므로

$xy=x(300-5x-2y)$

$y=100-\dfrac{5}{3}x$

$(Y$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}xy$

$\qquad\qquad=\dfrac{1}{2}x\left(100-\dfrac{5}{3}x\right)$

$\qquad\qquad=-\dfrac{5}{6}x^2+50x$

$\qquad\qquad=-\dfrac{5}{6}(x-30)^2+750$

따라서 $x=30$일 때, Y의 넓이의 최댓값 S는 750

30. [출제의도] 다항식의 최대공약수를 활용하여 추론하기

(가), (나)에서 두 다항식 $A(x),\ B(x)$는

$A(x)=p(x)+q(x)=2x(x-1)(x+a)$

$B(x)=p(x)-q(x)=(x+1)(bx+4)$

(다)에서 $A(x)$와 $B(x)$는

$p(x)$와 $q(x)$의 최대공약수를 인수로 갖는다.

$\therefore A(x)$와 $B(x)$는 $x+1$과 $x-1$을 인수로 갖는다.

인수정리에 의해

$A(x)=p(x)+q(x)=2x(x-1)(x+a)$

$A(-1)=(-2)\times(-2)\times(-1+a)=0$

$\therefore\ \ a=1$

$\therefore\ \ A(x)=p(x)+q(x)=2x(x+1)(x-1)$

$B(x)=p(x)-q(x)=(x+1)(bx+4)$

$B(1)=(1+1)(b+4)=0$

$\therefore\ \ b=-4$

$\therefore\ \ B(x)=p(x)-q(x)=-4(x+1)(x-1)$

따라서 $A(2)\times B\left(\dfrac{1}{2}\right)=36$