• 2교시 수학 영역 •

[A 형]

1	①	**2**	④	**3**	③	**4**	④	**5**	①
6	⑤	**7**	②	**8**	②	**9**	②	**10**	⑤
11	⑤	**12**	③	**13**	④	**14**	①	**15**	②
16	⑤	**17**	④	**18**	①	**19**	③	**20**	③
21	③	**22**	88	**23**	8	**24**	3	**25**	65
26	330	**27**	89	**28**	10	**29**	16	**30**	100

1. [출제의도] 로그의 성질을 알고 계산하기

$(2^2)^{\frac{1}{2}} \times \log_2 2^3 = 2\times 3 = 6$

2. [출제의도] 행렬의 덧셈의 뜻을 알고 계산하기

$A+2B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ 이므로

행렬 $A+2B$의 모든 성분의 합은 11

3. [출제의도] 지수부등식 이해하기

$3^{2x} \le 3^{x+4}$에서 $2x \le x+4$

$\therefore x \le 4$

따라서 자연수 x는 1, 2, 3, 4이므로 x의 값의 합은 10

4. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계 이해하기

그래프를 행렬로 나타내면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{pmatrix} 0&1&0&0&1 \\ 1&0&0&1&0 \\ 0&0&0&1&1 \\ 0&1&1&0&1 \\ 1&0&1&1&0 \end{pmatrix}$$

따라서 행렬의 성분 중 0의 개수는 13

5. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3$ 은 밑이 $\frac{1}{2}$이므로

x가 증가할 때, y는 감소한다.

따라서 $x=-2$일 때, 최댓값 $M=1$,

$x=1$일 때, 최솟값 $m=-\frac{5}{2}$

따라서 $M-m=\frac{7}{2}$

6. [출제의도] $\sum$의 뜻과 성질 이해하기

$$\sum_{n=1}^{10}(2a_n-1)^2=\sum_{n=1}^{10}\left(4a_n{}^2-4a_n+1\right)$$
$$=4\sum_{n=1}^{10}a_n{}^2-4\sum_{n=1}^{10}a_n+\sum_{n=1}^{10}1$$
$$=4\sum_{n=1}^{10}a_n{}^2-4\times 4+10=34$$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n{}^2=10$

7. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면

$\frac{a_5}{a_2}=2$ 에서 $\frac{ar^4}{ar}=r^3=2$

$a_4+a_7=12$에서

$a_4+a_7=ar^3(1+r^3)=12$ 이므로 $a=2$

따라서 $a_{13}=ar^{12}=32$

8. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$3^{3x}=5$, $5^{3y}=9$ 에서 $5^{3y}=(3^{3x})^{3y}=3^2$ 이므로

$3^{9xy}=3^2$

따라서 $9xy=2$이므로 $xy=\frac{2}{9}$

9. [출제의도] 로그부등식 이해하기

$(\log_2 x)^2-6\log_2 x+8\le 0$

$(\log_2 x-4)(\log_2 x-2)\le 0$

$2\le \log_2 x\le 4$이므로 $4\le x\le 16$

따라서 자연수 x는 4, 5, 6, $\cdots$, 16이므로

x의 개수는 13

10. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

$(B+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=B\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 의 양변에 A를 곱하면

$A(B+E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

(나)에 의하여 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=AB\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

따라서 $x=0$, $y=6$ 이므로 $x+y=6$

11. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$a_n=S_n-S_{n-1}(n\ge 2)$이므로

$a_n=\frac{n(n+3)}{2}-\frac{(n-1)(n+2)}{2}=n+1\,(n\ge 2)$

$a_1=S_1=2$이므로 $a_n=n+1\,(n\ge 1)$

$$\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{a_n a_{n+1}}$$
$$=\sum_{n=1}^{20}\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{20}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$
$$=\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{22}\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{22}=\frac{5}{11}$$

12. [출제의도] 로그를 활용하여 문제해결하기

로켓의 질량과 속력을 표로 나타내면

로켓의 질량(ton)	200	160	a
로켓의 속력(km/초)	2	2.5	3

$2.5=k\alpha\log\frac{200}{160}+2$

$0.5=k\alpha\log\frac{5}{4}$ …… ㉠

$3=k\alpha\log\frac{200}{a}+2$

$1=k\alpha\log\frac{200}{a}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2k\alpha\log\frac{5}{4}=k\alpha\log\frac{200}{a}$

따라서 $\frac{200}{a}=\left(\frac{5}{4}\right)^2$이므로 $a=128$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=h(x)$의 그래프와 만나므로 $4^x=2^{x+2}$, $x=2$

따라서 점 A의 좌표는 $(2, 16)$

$g(0)=1$ 이므로 점 B의 좌표는 $(0, 1)$

함수 $y=g(x)$와 함수 $y=f(x)$의 그래프는

y축에 대하여 대칭이므로 점 C의 좌표는 $(-2, 16)$

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 15\times 4=30$

14. [출제의도] 등비중항을 활용하여 문제해결하기

i) $0<k<2$일 때,

$f(k)<g(k)<h(k)$이므로 크기 순서대로 나열하여 등비수열을 이루면 $g(k)$가 등비중항이다.

$(4^k)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^k\times 2^{k+2}$

$2^{4k}=2^{-2k}\times 2^{k+2}$

$\therefore k=\frac{2}{5}$

ii) $k=2$ 일 때,

$f(2)<g(2)=h(2)$ 이므로 등비수열을 이루지 않는다.

iii) $k>2$일 때,

$f(k)<h(k)<g(k)$이므로 크기 순서대로 나열하여 등비수열을 이루면 $h(k)$가 등비중항이다.

$(2^{k+2})^2=\left(\frac{1}{4}\right)^k\times 4^k$

$2^{2k+4}=2^{-2k}\times 2^{2k}$

$\therefore k=-2$

$k=-2$는 $k>2$를 만족하지 않으므로 조건을 만족하는 등비수열은 존재하지 않는다.

따라서 i), ii), iii)에 의하여 실수 k의 값은 $\frac{2}{5}$

15. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

함수 $f(x)=a^x$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동하고 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면

함수 $g(x)=a^{-(x-m)}$의 그래프가 된다.

(가)에 의하여 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는

$x=1$에 대하여 대칭이므로 $f(1)=g(1)$이다.

$a=a^{-(1-m)}$

$\therefore m=2$

함수 $f(x)=a^x$은 지수함수이므로 $a>0$, $a\ne 1$

(나)에 의하여 $a^3=16a^{-3+m}$이므로 $a=2$

따라서 $a+m=2+2=4$

16. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. (가)에서 $\frac{10A}{B}=10^3$ 이므로 $A=100B$ (참)

ㄴ. $B=\frac{A}{100}$이고 (나)에서 $4\le\log AB<5$이므로

$3\le\log A<\frac{7}{2}$

$\log A$의 지표가 3이므로 A는 네 자리 자연수 (참)

ㄷ. $A=100B$이고 $4\le\log AB<5$이므로

$4\le\log 100B^2<5$

$4\le 2+2\log B<5$, $1\le\log B<\frac{3}{2}$ 이므로

$0\le\alpha<\frac{1}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)=2^x-k$의 그래프의

점근선의 방정식이 $y=-k$ 이고,

함수 $g(x)=\log_2(x-2k)$의 그래프의

점근선의 방정식이 $x=2k$ 이므로

두 점근선이 만나는 점의 좌표는 $(2k, -k)$

$\overline{\mathrm{AB}}=2k-1$ 이므로 $(2k+1)-\log_2 k=2k-1$

$\therefore k=4$

따라서 $a=8,\ b=-4$ 이므로 $2a+b=12$

18. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이해하여 추론하기

$n(n+2)b_{n+1}=S_n$에 $n=1$을 대입하면

$3b_2=S_1$이므로 $b_2=\frac{1}{3}$

$b_n=S_n-S_{n-1}\ (n\ge 2)$이므로

$b_n=n(n+2)b_{n+1}-(n-1)(n+1)b_n$

$\therefore b_{n+1}=\frac{n}{n+2}\times b_n\ (n\ge 2)$ ······ ㉠

이때, $b_1=1$이고 $b_2=\frac{1}{3}$이므로

㉠은 $n=1$인 경우에도 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여

$b_{n+1}=\boxed{\frac{n}{n+2}}\times b_n$ ······ (*)

(*)의 n에 1, 2, 3, ⋯, $n-1$을 차례로 대입하여 얻어진 $(n-1)$개의 등식을 변끼리 곱하면

$b_n=\frac{1}{3}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{5}\times\cdots\times\frac{n-2}{n}\times\frac{n-1}{n+1}b_1$

2 이상의 자연수 n에 대하여

$b_n=\boxed{\frac{2}{n(n+1)}}$

따라서 $f(n)=\frac{n}{n+2}$, $g(n)=\frac{2}{n(n+1)}$ 이므로

$\frac{f(11)}{g(12)}=66$

19. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

함수 $f(x)=\log_2(x-4)$ 의 그래프는

함수 $h(x)=\log_2 x$ 의 그래프를 x축의 방향으로

4만큼 평행이동한 그래프이므로 $\overline{BA}=\overline{DE}=4$

함수 $g(x)=\log_4 x$ 의 그래프와

함수 $f(x)=\log_2(x-4)$ 의 그래프가 만나는 점 A의 x좌표를 a라 하면 $A(a,\log_4 a)$, $D(a,\log_2 a)$

이므로 $\overline{AD}=\frac{1}{2}\log_2 a$

점 A와 점 B의 y좌표가 $\log_4 a$로 같으므로

$\log_2 x=\log_4 a,\ x=\sqrt{a}$

$B(\sqrt{a},\log_2\sqrt{a})$, $C(\sqrt{a},\log_4\sqrt{a})$

$\therefore \overline{BC}=\frac{1}{4}\log_2 a$

$\therefore S_1=\frac{1}{2}\times4\times\frac{1}{4}\log_2 a,\ S_2=\frac{1}{2}\times4\times\frac{1}{2}\log_2 a$

따라서 $\frac{S_1}{S_2}=\frac{1}{2}$

20. [출제의도] 행렬의 연산을 활용하여 추론하기

ㄱ. $ABA-A^2=E$에서

$(AB-A)A=E$ ······㉠

$A(BA-A)=E$ 이고 양변에 $AB-A$를 곱하면

$(AB-A)A(BA-A)=AB-A$

$BA-A=AB-A$

$\therefore AB=BA$ (참)

ㄴ. $AB-A=-B$ 이므로 ㉠에서 $-BA=E$

$AB=BA$ 이므로

$A^3B^3=(AB)^3=-E$ (거짓)

ㄷ. $AB=-E$ 이므로 $ABA-A^2=E$ 에서

$A^2+A+E=O$ ······㉡

㉡의 양변에 $A-E$를 곱하면

$(A-E)(A^2+A+E)=O$

$\therefore A^3=E$

㉡에서 $A^2=-A-E$이므로

$(A-E)^2=A^2-2A+E=-3A$

$(A-E)^{30}=(-3A)^{15}=-3^{15}E$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. [출제의도] 계차수열을 활용하여 추론하기

$a_1=1+4,\ a_2=1+4+12,\ a_3=1+4+12+36,$

$a_4=1+4+12+36+108,\ \cdots$ 이므로

$b_n=a_{n+1}-a_n$ 이라 하면

$b_1=4\times3,\ b_2=4\times3^2,\ b_3=4\times3^3,\ \cdots,\ b_n=4\times3^n$

$a_n=5+\sum_{k=1}^{n-1}(4\times3^k)$

$=5+12\times\frac{3^{n-1}-1}{3-1}=2\times3^n-1$

따라서 $\frac{a_{15}+1}{a_{10}+1}=\frac{2\times3^{15}}{2\times3^{10}}=3^5=243$

22. [출제의도] 등차수열 이해하기

수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_n=3n-2$

따라서 $a_{30}=88$

23. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$2^{a-1}+2^{-a}=3$ 이므로

$4^{a-1}+4^{-a}=(2^{a-1})^2+(2^{-a})^2$

$=(2^{a-1}+2^{-a})^2-1=8$

24. [출제의도] 행렬과 그 연산 이해하기

행렬 A의 역행렬 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$ 이므로

$C=ABA^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&0\\1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\-1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}a+2&-1\\4&a-2\end{pmatrix}$

행렬 C의 모든 성분의 합이 9이므로 $2a+3=9$

따라서 $a=3$

25. [출제의도] 로그방정식을 활용하여 문제해결하기

점 B는 선분 OA를 1:3으로 내분하는 점이므로

점 B의 좌표는 $\left(\frac{\sqrt{23}}{4},\ \frac{\log_2 k}{4}\right)$

$\overline{OB}^2=\frac{23+(\log_2 k)^2}{16}=2$

$\log_2 k=3$ 또는 $\log_2 k=-3$

$k=8$ 또는 $k=\frac{1}{8}$이므로 $S=\frac{65}{8}$

따라서 $8S=65$

26. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a_n+b_n=2n+1$이고 $a_nb_n=n(n+1)$

$\sum_{n=1}^{10}\{1-(a_n+b_n)+a_nb_n\}$

$=\sum_{n=1}^{10}\{1-(2n+1)+n(n+1)\}=\sum_{n=1}^{10}(n^2-n)$

$=\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}=330$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}(1-a_n)(1-b_n)=330$

27. [출제의도] 알고리즘과 순서도를 이해하여 추론하기

n	a
1	$2\times1+1=\ 3$
2	$2\times3+2=\ 8$
3	$2\times8+3=19$
4	$2\times19+4=42$
5	$2\times42+5=89$

따라서 인쇄되는 a의 값은 89

28. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 할 때, $a_1=1$ 이므로

$a_n=1+(n-1)d$

(가)에 의하여 $(1+d)+(1+5d)+(1+9d)=8$

$\therefore d=\frac{1}{3}$

(나)에 의하여 $\frac{n\left\{2+\frac{1}{3}(n-1)\right\}}{2}=25$

$n^2+5n-150=0$

$(n-10)(n+15)=0$

따라서 $n=10$

29. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 그 역함수의 그래프가 만나는 점은 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 가 만나는 점과 같다.

$A\left(\alpha,\ a^\alpha-\frac{5}{4}\right)$, $B\left(\beta,\ a^\beta-\frac{5}{4}\right)$이라 하면

선분 AB의 중점의 좌표는 $\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{a^\alpha+a^\beta}{2}-\frac{5}{4}\right)$

선분 AB의 중점이 원점이므로

$\beta=-\alpha$, $a^\alpha+a^\beta-\frac{5}{2}=0$

$a^\alpha+a^{-\alpha}-\frac{5}{2}=0$, $2a^{2\alpha}-5a^\alpha+2=0$,

$(2a^\alpha-1)(a^\alpha-2)=0\quad\therefore a^\alpha=\frac{1}{2}$ 또는 $a^\alpha=2$

i) $a^\alpha=\frac{1}{2}$일 때

$a^\alpha-\frac{5}{4}=\alpha$ 이므로 $\alpha=-\frac{3}{4}\quad\therefore a=2\sqrt[3]{2}$

ii) $a^\alpha=2$일 때

$a^\alpha-\frac{5}{4}=\alpha$ 이므로 $\alpha=\frac{3}{4}\quad\therefore a=2\sqrt[3]{2}$

따라서 $a^3=16$

30. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬을 활용하여 문제해결하기

x, y에 대한 연립일차방정식 $\begin{cases}ax+by=p\\cx+dy=q\end{cases}$가

오직 한 쌍의 해 $x=\alpha$, $y=\beta$를 가지므로

$ad-bc\ne0$이고 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ ······㉠

주어진 연립방정식 $\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$ ······㉡

㉠과 ㉡에서

$\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\frac{1}{bc-ad}\begin{pmatrix}c&-a\\-d&b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}$

$\therefore x_1=\beta,\ y_1=\alpha$

㉡의 해가 $x=\beta$, $y=\alpha$이므로 $\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$

$\therefore\begin{pmatrix}b&a\\d&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\beta\\-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-p\\-q\end{pmatrix}$

주어진 연립방정식 $\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -p \\ -q \end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$

$\therefore x_2=-\beta,\ y_2=-\alpha$

따라서 $\overline{\mathrm{BC}}=20$ 이므로

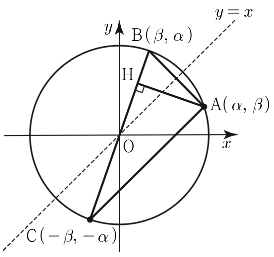
세 점 $\mathrm{A}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{B}(\beta, \alpha)$, $\mathrm{C}(-\beta, -\alpha)$ 는

원 $x^2+y^2=100$ 위의 점이다.

점 A에서 $\overline{\mathrm{BC}}$ 에 내린 수선의 발을 H라 하면

삼각형 ABC 는 밑변이 $\overline{\mathrm{BC}}$, 높이가 $\overline{\mathrm{AH}}$ 이므로

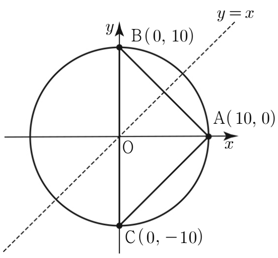
$\overline{\mathrm{AH}}=10$ 일 때 삼각형 ABC 의 넓이가 최대이다.



따라서 삼각형 ABC 의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times 20\times 10=100$

[참고] 그림과 같이 A(10, 0)일 때, B(0, 10), C(0, −10) 이고, 이때, 삼각형 ABC 의 넓이는 최대이다.



이 이외에 점 A의 좌표가 (0, 10), (−10, 0), (0, −10) 일 때, 삼각형 ABC 의 넓이는 최대이다.