# 2014학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

## • 수학 영역 •

### 수학 B형 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ③ | 2 | ③ | 3 | ① | 4 | ④ | 5 | ② |
| 6 | ① | 7 | ⑤ | 8 | ④ | 9 | ③ | 10 | ① |
| 11 | ② | 12 | ④ | 13 | ③ | 14 | ⑤ | 15 | ② |
| 16 | ② | 17 | ⑤ | 18 | ⑤ | 19 | ④ | 20 | ③ |
| 21 | ④ | 22 | 20 | 23 | 18 | 24 | 256 | 25 | 288 |
| 26 | 6 | 27 | 39 | 28 | 45 | 29 | 336 | 30 | 28 |

### 해 설

**1. [출제의도] 복소수를 계산한다.**

$3-i+\dfrac{2}{1-i}=3-i+\dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)}$

$=3-i+\dfrac{2(1+i)}{2}$

$=3-i+1+i$

$=4$

**2. [출제의도] 수직선 위의 두 점의 내분점을 구한다.**

선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표가 $\mathrm{P}(a)$이므로

$a=\dfrac{1\times7+3\times1}{1+3}$

$=\dfrac{5}{2}$

**3. [출제의도] 함숫값을 이용하여 무리함수를 구한다.**

$f(2)=5$이므로

$\sqrt{2a+3}=5$

양변을 제곱하면

$2a+3=25$

$2a=22$

$\therefore\ a=11$

**4. [출제의도] 순열과 조합의 수를 이용하여 상수의 값을 구한다.**

${}_n\mathrm{C}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_3=2\cdot{}_n\mathrm{P}_2$에서

$\dfrac{n(n-1)}{2}+\dfrac{(n+1)n(n-1)}{6}=2n(n-1)$

$n\geq2$이므로 $n(n-1)\neq0$

양변에 $\dfrac{6}{n(n-1)}$을 곱하면

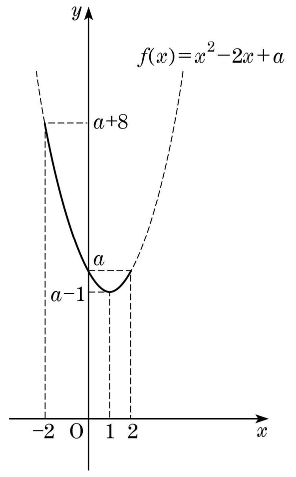
$3+(n+1)=12$

$\therefore\ n=8$

**5. [출제의도] 이차함수의 최댓값과 최솟값을 구한다.**

$f(x)=x^2-2x+a$

$=(x-1)^2+a-1\ \ (-2\leq x\leq2)$




위의 그래프에서 함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(1)=a-1$

이고, 최댓값은

$f(-2)=a+8$

최댓값과 최솟값의 합이 21이므로

$(a+8)+(a-1)=21$

$\therefore\ a=7$

**6. [출제의도] 절대부등식을 이용하여 무리식이 실수가 되는 조건을 구한다.**

모든 실수 $x$에 대하여 $\sqrt{kx^2-kx+3}$이 실수가 되기 위해서는 $kx^2-kx+3\geq0$을 만족해야 한다.

(i) $k=0$일 때,

$3\geq0$이므로 성립한다.

(ii) $k\neq0$일 때,

$k>0$이고 $D\leq0$

$D=k^2-12k=k(k-12)\leq0$

$\therefore\ 0<k\leq12$

(i), (ii)에서 $0\leq k\leq12$이므로 정수 $k$의 개수는 13이다.

**7. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식의 값을 구한다.**

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{2}{3}$, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta$

$\dfrac{4}{9}=1+2\sin\theta\cos\theta$

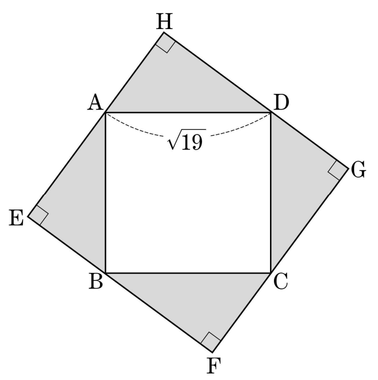
$\therefore\ \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{5}{18}$

$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$=\dfrac{8}{27}-3\times\left(-\dfrac{5}{18}\right)\times\dfrac{2}{3}$

$=\dfrac{23}{27}$

**8. [출제의도] 이중근호를 이용하여 정사각형의 한 변의 길이를 구한다.**




정사각형 ABCD의 각 변에 직각삼각형 4개를 붙여 만든 정사각형을 EFGH라 하면

$\square\mathrm{EFGH}=\square\mathrm{ABCD}+4\times\triangle\mathrm{AEB}$

$=(\sqrt{19})^2+4\times2\sqrt{3}$

$=19+8\sqrt{3}$

이므로 정사각형 EFGH의 한 변의 길이는

$\sqrt{19+8\sqrt{3}}=\sqrt{19+2\sqrt{48}}$

$=\sqrt{(4+\sqrt{3})^2}$

$=4+\sqrt{3}$

$\therefore\ p+q=4+3=7$

**9. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 직선의 기울기를 구한다.**

원의 중심을 C, 원의 중심에서 직선에 내린 수선의 발을 H라고 하면,

원의 중심에서 현에 내린 수선은 현을 이등분하므로

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}=\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}$

$=\sqrt{2^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}$

이때 선분 CH의 길이는 원의 중심 $\mathrm{C}(-1,\ 3)$과 직선 $mx-y+2=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\dfrac{|m\times(-1)-3+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$|m+1|=\sqrt{2}\sqrt{m^2+1}$

양변을 제곱하면

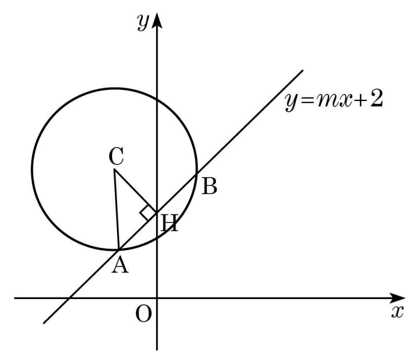
$(m+1)^2=2(m^2+1)$

$m^2+2m+1=2m^2+2$

$m^2-2m+1=0$

$(m-1)^2=0$

$\therefore\ m=1$




**10. [출제의도] 순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.**

5가지의 색 중 4개를 택하는 순열의 수는

${}_5\mathrm{P}_4=5\times4\times3\times2=120$

**11. [출제의도] 참인 명제와 진리집합 사이의 관계를 이용하여 실수의 값을 구한다.**

조건 $p,\ q,\ r$의 진리집합을 각각 $P,\ Q,\ R$라 하면 명제 $p\rightarrow q$와 명제 $q\rightarrow r$가 모두 참이므로

$P\subset Q\subset R$

(i) $P\subset Q$에서

$5-a\leq4$

$\therefore\ a\geq1$

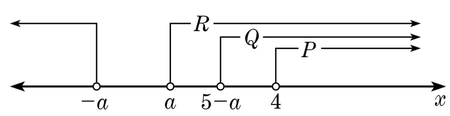
(ii) $Q\subset R$에서

$a$는 양수이므로

$R=\{x\,|\,x<-a$ 또는 $x>a\}$

$a\leq5-a$

$\therefore\ a\leq\dfrac{5}{2}$




(i), (ii)에서

$1\leq a\leq\dfrac{5}{2}$

따라서 실수 $a$의 최댓값과 최솟값의 합은

$\dfrac{5}{2}+1=\dfrac{7}{2}$

**12. [출제의도] 근과 계수의 관계를 이용하여 이차방정식의 두 근의 곱을 구한다.**

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$

$=x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc+x^2-(c+a)x+ca$

$=3x^2-2(a+b+c)x+ab+bc+ca=0$

에서 근과 계수의 관계에 의하여

$\dfrac{2(a+b+c)}{3}=4$, $\dfrac{ab+bc+ca}{3}=-3$

$\therefore\ a+b+c=6$, $ab+bc+ca=-9$

$(x-a)^2+(x-b)^2+(x-c)^2$

$=3x^2-2(a+b+c)x+a^2+b^2+c^2=0$

에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은

$\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}=\dfrac{1}{3}\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}$

$=\dfrac{1}{3}(36+18)$

$=18$

13. **[출제의도] 항등식의 성질을 이용하여 직선이 항상 일정한 점을 지남을 보인다.**

점 $P(a, b)$는 직선 $x+y=2$ 위의 점이므로

$a+b=2$에서

$b=2-a$

점 P에서 $x$축, $y$축에 내린 수선의 발은 각각

$Q(a, 0)$, $R(0, b)$

직선 $l$은 직선 QR와 수직이고, 직선 QR의 기울기는 $-\frac{b}{a}$이므로 직선 $l$의 기울기는

$\frac{a}{b}=\boxed{\frac{a}{2-a}}$

따라서 직선 $l$의 방정식은

$y-(2-a)=\boxed{\frac{a}{2-a}}(x-a)$

$(2-a)y-(2-a)^2=a(x-a)$

$2y-ay-4+4a-a^2=ax-a^2$

$a$에 대하여 정리하면

$(x+y-4)a+(4-2y)=0$ …… ㉠

㉠이 $a$의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$x+y-4=0$, $4-2y=0$

$x=\boxed{2}$, $y=\boxed{2}$

따라서 $f(a)=\frac{a}{2-a}$, $\alpha=2$, $\beta=2$이므로

$f\left(\frac{4}{3}\right)+\alpha+\beta=6$

14. **[출제의도] 나머지정리를 이용하여 나머지를 구한다.**

다항식 $x^3-4x^2+7x+4$를 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$로 나눈 나머지가 $2x+6$으로 같으므로 $A(x)$, $B(x)$는 $x^3-4x^2+7x+4-(2x+6)$의 인수이다.

$x^3-4x^2+7x+4-(2x+6)=x^3-4x^2+5x-2$

$=(x-1)^2(x-2)$ …… ㉠

두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는 ㉠의 서로 다른 인수이므로

$A(x)=(x-1)^2$, $B(x)=(x-1)(x-2)$

또는 $A(x)=(x-1)(x-2)$, $B(x)=(x-1)^2$

$\therefore\ A(x)+B(x)=(x-1)^2+(x-1)(x-2)$

다항식 $A(x)+B(x)$를 $x-4$로 나눈 나머지는 다항식 $A(x)+B(x)$의 $x$에 4를 대입한 값과 같다.

$\therefore\ A(4)+B(4)=3^2+3\times2=15$

15. **[출제의도] 분수함수의 그래프에서 절대부등식을 이용하여 넓이의 최솟값을 구한다.**

점 P, Q의 좌표를 각각

$P\left(a, \frac{4}{a}\right)$, $Q\left(-b, -\frac{4}{b}\right)$ $(a>0,\ b>0)$

이라 하면 점 A, B, C, D의 좌표는

$A(a,\ 0)$, $B\left(0,\ \frac{4}{a}\right)$, $C(-b,\ 0)$, $D\left(0,\ -\frac{4}{b}\right)$

육각형 APBCQD의 넓이를 $S$라 하면

$S=\square OAPB+\square OCQD+\triangle OBC+\triangle ODA$

$=a\times\frac{4}{a}+b\times\frac{4}{b}+\frac{1}{2}\times b\times\frac{4}{a}+\frac{1}{2}\times a\times\frac{4}{b}$

$=8+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)$

$a>0$, $b>0$이므로 $\frac{b}{a}>0$, $\frac{a}{b}>0$

$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge2\sqrt{\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}}=2$

(등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

$\therefore\ S=8+2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)\ge8+2\times2=12$

따라서 육각형 APBCQD의 넓이의 최솟값은 12이다.

16. **[출제의도] 다항식의 최대공약수를 이용하여 식의 최댓값을 구한다.**

두 다항식을

$P(x)=x^3+(a-1)x^2+(a^2-a)x-a^2$

$Q(x)=x^3+bx^2-bx+2a^2$

이라 하자.

$P(1)=1+(a-1)+(a^2-a)-a^2=0$

이므로 인수정리에 의하여 다항식 $P(x)$는 일차식 $x-1$을 인수로 가진다. 따라서 조립제법에 의하여

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & a-1 & a^2-a & -a^2 \\ & & 1 & a & a^2 \\ \hline & 1 & a & a^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\therefore\ P(x)=(x-1)(x^2+ax+a^2)$

$Q(1)=1+b-b+2a^2$

$=1+2a^2\neq0$

이므로 다항식 $Q(x)$는 일차식 $x-1$을 인수로 갖지 않는다.

두 다항식 $P(x)$와 $Q(x)$의 최대공약수가 이차식이므로 $x^2+ax+a^2$이 최대공약수이다.

다항식 $Q(x)$는 이차식 $x^2+ax+a^2$으로 나누어떨어지므로 그 몫을 $x+k$($k$는 상수)라 하면

$x^3+bx^2-bx+2a^2=(x^2+ax+a^2)(x+k)$

양변의 계수를 비교하면

$b=a+k$, $-b=a^2+ak$, $2a^2=ka^2$

$2a^2=ka^2$에서

$a=0$ 또는 $k=2$

(i) $a=0$일 때

$b=0$

(ii) $k=2$일 때

$b=a+2$, $-b=a^2+2a$

$a^2+2a=-(a+2)$에서

$a^2+3a+2=0$

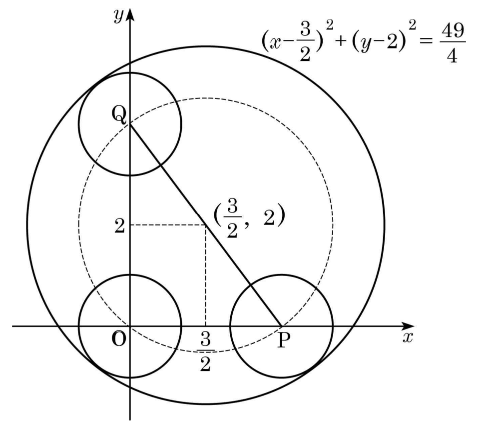
$a=-2$ 또는 $a=-1$

$\therefore\ a=-2,\ b=0$ 또는 $a=-1,\ b=1$

(i), (ii)에서 $a^2+b^2$의 최댓값은

$(-2)^2+0^2=4$

17. **[출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 원의 반지름의 최솟값을 추론한다.**




집합 $A$, $B$, $C$가 나타내는 원의 중심의 좌표를 각각 $O(0, 0)$, $P(3, 0)$, $Q(0, 4)$

라 하자.

집합 $D$를 좌표평면에 나타내면 반지름의 길이가 $\sqrt{k}$인 원과 그 내부이므로 삼각형 OPQ의 외접원의 반지름의 길이를 $r$라 하면

$(A\cup B\cup C)\subset D$에서

$\sqrt{k}\ \ge\ r+1$

이때 삼각형 OPQ는 직각삼각형이므로

$r=\frac{1}{2}\times\overline{PQ}=\frac{5}{2}$

$k\ \ge\ (r+1)^2=\left(\frac{5}{2}+1\right)^2=\frac{49}{4}$

따라서 $k$의 최솟값은 $\frac{49}{4}$이다.

18. **[출제의도] 직선의 방정식을 이용하여 명제의 참, 거짓을 판별한다.**

ㄱ. 직선 AB의 방정식은

$y-\frac{2}{a}=\frac{\frac{2}{b}-\frac{2}{a}}{b-a}(x-a)$

$y=-\frac{2}{ab}(x-a)+\frac{2}{a}$

$0=-\frac{2}{ab}(x-a)+\frac{2}{a}$에서

$\frac{2}{ab}(x-a)=\frac{2}{a}$

$2(x-a)=2b$

$\therefore\ x=a+b$ (참)

ㄴ. 점 D는 선분 AB의 중점이므로

$D\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a+b}{ab}\right)$

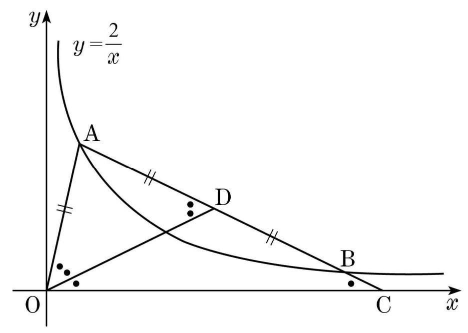
직선 OD의 기울기는

$\frac{\frac{a+b}{ab}}{\frac{a+b}{2}}=\frac{2}{ab}$

따라서 두 직선 AB와 OD의 기울기의 합은

$-\frac{2}{ab}+\frac{2}{ab}=0$ (참)

ㄷ.




$\overline{AO}=\overline{AD}$이므로

$\angle AOD=\angle ADO$

두 직선 AB와 OD의 기울기의 합은 0이므로

$\angle DOC=\angle DCO$

$\angle ADO=\angle DOC+\angle DCO$이므로

$\therefore\ \angle ADO=2\angle DOC$

$\angle AOC=\angle AOD+\angle DOC$

$=\angle AOD+\frac{1}{2}\angle ADO$

$=\frac{3}{2}\angle AOD$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

19. **[출제의도] 길이의 비를 이용하여 코사인법칙으로 코사인의 값을 구한다.**

$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$, 삼각형 ABC의 넓이를 $S$라 하면

$S=\frac{1}{2}\times a\times\overline{AD}=\frac{1}{2}\times b\times\overline{BE}=\frac{1}{2}\times c\times\overline{CF}$

$a=\frac{2S}{\overline{AD}}$, $b=\frac{2S}{\overline{BE}}$, $c=\frac{2S}{\overline{CF}}$

$a:b:c=\frac{2S}{\overline{AD}}:\frac{2S}{\overline{BE}}:\frac{2S}{\overline{CF}}$

$=\frac{1}{\overline{AD}}:\frac{1}{\overline{BE}}:\frac{1}{\overline{CF}}$

$=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}$

$=6:4:3$

$a=6k$, $b=4k$, $c=3k$($k$는 양수)라 하면

$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

$=\frac{(6k)^2+(4k)^2-(3k)^2}{2\times6k\times4k}$

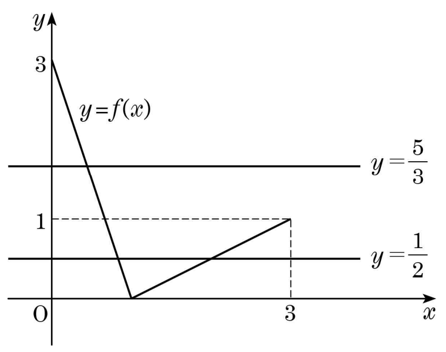
$=\frac{43}{48}$

20. **[출제의도] 함수의 그래프를 이용하여 방정식의 실근의 개수를 구한다.**

$f(x)=\begin{cases}-3x+3 & (0\le x<1)\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2} & (1\le x\le3)\end{cases}$

이므로 $f(x)=t\,(0\le t\le3)$라 하면

$f(f(x))=2-f(x)$에서
$f(t)=2-t$
(i) $0\le t<1$일 때
$-3t+3=2-t$
$\therefore\ t=\frac{1}{2}$
(ii) $1\le t\le 3$일 때
$\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}=2-t$
$\therefore\ t=\frac{5}{3}$
(i), (ii)에서
$f(x)=\frac{1}{2}$ 또는 $f(x)=\frac{5}{3}$




그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$은 서로 다른 두 점에서 만나고, 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{5}{3}$는 한 점에서 만나므로 방정식 $f(f(x))=2-f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

**[다른 풀이]**

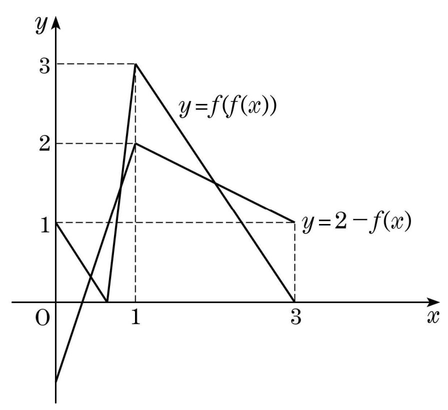
$$f(f(x))=\begin{cases}-3f(x)+3 & (0\le f(x)<1)\\ \frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2} & (1\le f(x)\le 3)\end{cases}$$

$-3x+3=1$에서 $x=\frac{2}{3}$이므로

$$f(f(x))=\begin{cases}\frac{1}{2}(-3x+3)-\frac{1}{2} & \left(0\le x<\frac{2}{3}\right)\\ -3(-3x+3)+3 & \left(\frac{2}{3}\le x<1\right)\\ -3\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+3 & (1\le x\le 3)\end{cases}$$

$$=\begin{cases}-\frac{3}{2}x+1 & \left(0\le x<\frac{2}{3}\right)\\ 9x-6 & \left(\frac{2}{3}\le x<1\right)\\ -\frac{3}{2}x+\frac{9}{2} & (1\le x\le 3)\end{cases}$$

(i) $0\le x<\frac{2}{3}$일 때
$f(f(x))=2-f(x)$에서
$-\frac{3}{2}x+1=2-(-3x+3)$
$\therefore\ x=\frac{4}{9}$
(ii) $\frac{2}{3}\le x<1$일 때
$f(f(x))=2-f(x)$에서
$9x-6=2-(-3x+3)$
$\therefore\ x=\frac{5}{6}$
(iii) $1\le x\le 3$일 때
$f(f(x))=2-f(x)$에서
$-\frac{3}{2}x+\frac{9}{2}=2-\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)$
$\therefore\ x=2$
(i), (ii), (iii)에서 방정식 $f(f(x))=2-f(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.




**21. [출제의도] 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 추론한다.**

$f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=2,\ f(4)=1,\ f(5)=2,$
$f(6)=2,\ f(7)=3,\ f(8)=1,\ f(9)=2,\ f(10)=2,$
$f(11)=3,\ f(12)=2,\ f(13)=3,\ f(14)=3,\ f(15)=4,$
$f(16)=1,\ f(17)=2,\ \cdots$
따라서 $f(n)=2$를 만족시키는 $n$을 나열하면
$3=2+1,\ \ 5=2^2+1,\ \ 6=2^2+2,\ \ 9=2^3+1,\ \ 10=2^3+2,$
$12=2^3+2^2,\ 17=2^4+1,\ \cdots$
$\therefore\ n=2^m+1$ 또는 $n=2^m+2^k$
(단, $m$과 $k$는 자연수이고, $k<m$)
(i) $n=2^m+1$일 때
$n=2^m+1\le 100$에서
$1\le m\le 6$
(ii) $n=2^m+2^k$일 때
$n=2^m+2^k\le 100$에서
$1\le k<m\le 6$ …… ㉠
㉠을 만족시키는 두 자연수 $k$, $m$의 순서쌍 $(k, m)$의 개수는 1부터 6까지 서로 다른 6개의 자연수에서 2개의 수를 택하는 조합의 수 ${}_6\mathrm{C}_2=15$와 같다.
(i), (ii)에서 $f(n)=2$를 만족시키는 $n$의 개수는
$6+15=21$
**[참고]** $f(n)$의 값은 $n$을 이진법의 수로 나타내었을 때 1의 개수이다.

**22. [출제의도] 조건을 만족시키는 함숫값을 계산한다.**

$x-3=2$에서 $x=5$
$f(x-3)=x^2-5$에 $x=5$를 대입하면
$f(2)=5^2-5=20$
**[다른 풀이]**
$x-3=t$라 하면 $x=t+3$이므로
$f(t)=(t+3)^2-5$
$=t^2+6t+4$
$\therefore\ f(2)=4+12+4=20$

**23. [출제의도] 이차부등식의 해를 구한다.**

$2x^2-33x-17=(2x+1)(x-17)\le 0$
$-\frac{1}{2}\le x\le 17$
따라서 정수 $x$의 개수는 18이다.

**24. [출제의도] 실생활 소재를 활용하여 삼각방정식의 해를 구한다.**

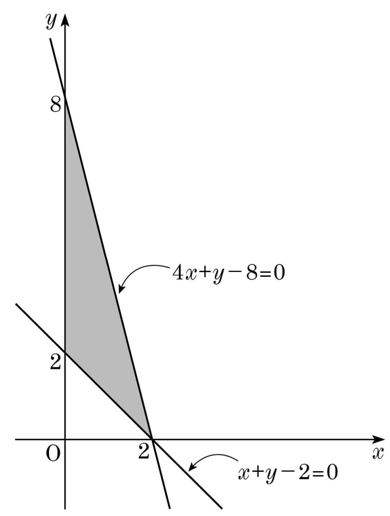
$m=144,\ L=10,\ t=2$일 때
$h=20-10\cos\frac{4\pi}{\sqrt{144}}$
$=20-10\cos\frac{\pi}{3}$
$=15$
$m=a,\ L=5\sqrt{2},\ t=2$일 때
$h=20-5\sqrt{2}\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}$
$=15$
$\cos\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$
$a\ge 100$에서
$0<\frac{4\pi}{\sqrt{a}}\le\frac{4\pi}{\sqrt{100}}=\frac{2}{5}\pi$
$\frac{4\pi}{\sqrt{a}}=\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{a}=16$
$\therefore\ a=256$

**25. [출제의도] 양의 약수의 개수가 홀수인 자연수를 구한다.**

양의 약수의 개수가 홀수인 자연수는 완전제곱수다.
$\langle n\rangle=16$을 만족시키는 자연수 $n$의 범위는
$16^2\le n<17^2$
이므로 자연수 $n$의 최댓값은
$17^2-1=288$
**[참고]** 자연수 $N$을 소인수분해 한 것이
$N=a^pb^q$($a$와 $b$는 서로 다른 소수, $p$와 $q$는 자연수)
일 때, $N$의 양의 약수의 개수는
$(p+1)(q+1)$
이다. 이때, 이 값이 홀수이려면
$p+1,\ q+1$
이 모두 홀수이어야 하므로 두 수 $p$, $q$는 모두 짝수이다.
따라서 자연수 $N$은 완전제곱수이다.

**26. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구한다.**

$z^2$이 실수이려면 $z$는 실수이거나 순허수이다.
$\therefore\ x+y-2=0$ 또는 $4x+y-8=0$



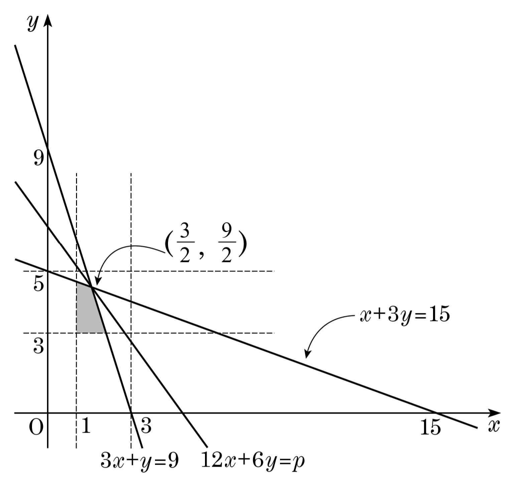

따라서 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 나타내는 도형은 그림과 같이 두 직선 $x+y-2=0$, $4x+y-8=0$이고, 이 두 직선과 $y$축으로 둘러싸인 부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times 6\times 2=6$
**[참고]** 복소수 $z=a+bi$($a$와 $b$는 실수)에 대하여
$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$
이므로 $z^2$이 실수이기 위한 필요충분조건은
$2ab=0$, 즉 $a=0$ 또는 $b=0$
$a=0,\ b\ne 0$이면 $z^2$은 음수
$a\ne 0,\ b=0$이면 $z^2$은 양수
$a=0,\ b=0$이면 $z^2=0$

**27. [출제의도] 집합의 연산법칙과 약수와 배수의 성질을 이용하여 자연수의 개수를 구한다.**

집합 $A_n\cap A_2$는 $n$과 2의 공배수의 집합이다.
$A_n\cap A_2=A_{2n}$에서 $n$과 2의 최소공배수는 $2n$이므로 $n$과 2는 서로소이다.
따라서 $n$은 홀수인 자연수이다.
90이 집합 $A_2-A_n$의 원소이면 $90\in A_2$, $90\notin A_n$이므로 90은 $n$의 배수가 아니다.
즉, $n$은 90의 약수가 아니다.

한편, 90의 홀수인 약수는 1, 3, 5, 9, 15, 45이다.
따라서 주어진 조건을 만족시키는 자연수 $n$은 90 이하의 홀수 중 90의 홀수인 약수를 제외한 나머지 수이므로 그 개수는
$45-6=39$

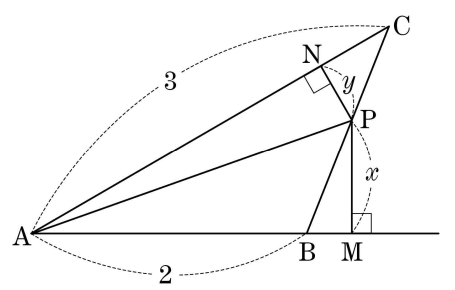
28. **[출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 최댓값을 구한다.**
집합 $A$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 것은 아래와 같다.
$\{1, x\}$, $\{1, 3\}$, $\{1, y\}$, $\{1, 5\}$
$\{x, 3\}$, $\{x, y\}$, $\{x, 5\}$
$\{3, y\}$, $\{3, 5\}$
$\{y, 5\}$
$1<x<3$, $3<y<5$이므로
(가)에서
$m_1+m_2+m_3+\cdots+m_{10}$
$=1\times4+x\times3+3\times2+y$
$=3x+y+10\le19$
$\therefore\ 3x+y\le9$
(나)에서
$M_1+M_2+M_3+\cdots+M_{10}$
$=x+3\times2+y\times3+5\times4$
$=x+3y+26\le41$
$\therefore\ x+3y\le15$
연립부등식
$1<x<3$, $3<y<5$, $3x+y\le9$, $x+3y\le15$
의 영역을 좌표평면에 나타내면 다음 그림과 같다.




$12x+6y=p$($p$는 상수)로 놓고 부등식의 영역 안에서 움직여 보면 두 직선의 교점을 지날 때, $p$의 값이 최대이다.
$3x+y=9$, $x+3y=15$를 연립하면
$x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{9}{2}$
따라서 $12x+6y$의 최댓값은
$12\times\frac{3}{2}+6\times\frac{9}{2}=45$

29. **[출제의도] 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 추론한다.**
1부터 9까지 자연수 중 합이 9가 되는 두 수의 쌍은
$(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$
조건을 만족시키는 세 자리 자연수에 대하여
(i) 9가 포함된 경우
백의 자리의 수가 9이면 십의 자리의 수는 1부터 8까지 8가지이다.
이때 일의 자리의 수에는
9, 십의 자리의 수, 9에서 십의 자리의 수를 뺀 수를 제외한 6가지가 올 수 있다.
십의 자리의 수 또는 일의 자리의 수가 9인 경우도 마찬가지이므로 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$8\times6\times3=144$
(ii) 9가 포함되지 않는 경우
백의 자리의 수는 1부터 8까지 8가지
십의 자리의 수에는
백의 자리의 수, 9에서 백의 자리의 수를 뺀 수를 제외한 6가지가 올 수 있다.
마찬가지 방법으로 생각하면 일의 자리에 올 수 있는 수는 4가지이다.
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$8\times6\times4=192$
(i), (ii)에서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$144+192=336$
**[다른 풀이]**
각 자리의 수 중 어느 두 수의 합이 9가 되는 세 자리 자연수의 개수를 구하면 다음과 같다.
1부터 9까지 자연수 중 합이 9가 되는 두 수의 쌍은
$(1, 8)$, $(2, 7)$, $(3, 6)$, $(4, 5)$
의 4개이다.
이 4개의 쌍 중 하나를 택하고 9개의 숫자 중 이미 택한 2개의 숫자를 제외한 7개의 숫자 중 하나를 택하여 3개의 숫자를 얻는다.
이렇게 얻은 3개의 숫자를 일렬로 배열하는 경우의 수는
$4\times7\times{}_3P_3=4\times7\times6$
$=168$
한편, 1부터 9까지 자연수 중 세 수를 택하는 순열의 수는
${}_9P_3=9\times8\times7$
$=504$
따라서 구하는 세 자리 자연수의 개수는
$504-168=336$

30. **[출제의도] 삼각형의 넓이와 절대부등식을 활용하여 최솟값을 구한다.**




$\overline{PM}=x$, $\overline{PN}=y$라 하면
$\triangle ABC=\triangle ABP+\triangle APC$에서
$\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin30°=\frac{1}{2}\times2\times x+\frac{1}{2}\times3\times y$
$\therefore\ 2x+3y=3$
$\frac{\overline{AB}}{\overline{PM}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{PN}}=\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$ 에서
$3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)=(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)$
$=13+\frac{6x}{y}+\frac{6y}{x}$
$\ge13+2\sqrt{\frac{6x}{y}\times\frac{6y}{x}}=25$
(단, 등호는 $x=y$일 때 성립한다.)
따라서 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\ge\frac{25}{3}$ 이므로 $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}$의 최솟값은 $\frac{25}{3}$이다.
$\therefore\ p+q=3+25=28$