2014학년도 4월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[B형]

1	④	**2**	②	**3**	④	**4**	①	**5**	③
6	②	**7**	①	**8**	⑤	**9**	④	**10**	③
11	②	**12**	③	**13**	①	**14**	③	**15**	②
16	⑤	**17**	③	**18**	②	**19**	①	**20**	⑤
21	④	**22**	5	**23**	102	**24**	90	**25**	63
26	36	**27**	13	**28**	11	**29**	120	**30**	34

1. [A형 2번과 동일]

2. [출제의도] 정적분 계산하기

$\int_0^1 (x^2+2)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1 = \frac{7}{3}$

3. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}\times\frac{3x}{e^{3x}-1}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

4. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기

$f(2A+B)=2f(A)+f(B)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

$f(B)=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$

$f(A-B)=f(A)-f(B)=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

5. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$\log_3 3n^2 < \log_3 a_n < \log_3 3(n+1)^2$

$3n^2 < a_n < 3(n+1)^2$

$\frac{3n^2}{n^2} < \frac{a_n}{n^2} < \frac{3(n+1)^2}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2} \le \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{n^2}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)^2}{n^2}=3$

따라서 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2}=3$

6. [출제의도] 무리방정식 이해하기

$2x^2-x=t$라 하자.

$t-2=\sqrt{-t+14}$ $(2\le t\le 14)$

$t^2-3t-10=0$

$t=5$ $(\because\ 2\le t\le 14)$

$2x^2-x=5$, $2x^2-x-5=0$

근과 계수의 관계에 의하여 주어진 방정식의

두 실근의 곱은 $-\frac{5}{2}$

7. [출제의도] 함수의 극대, 극소 이해하기

함수 $f(x)$가 극값을 가지려면

$f'(x)=3x^2+2ax+(a^2-4a)=0$이 서로 다른

두 실근을 가져야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-4a)>0$, $2a^2-12a<0$

$0<a<6$이므로 정수 a는 1, 2, 3, 4, 5

따라서 주어진 함수가 극값을 갖도록 하는 정수 a의 개수는 5

8. [출제의도] 미분계수 이해하기

$f'(1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$이므로 $f'(1)=3$

$\frac{1}{n}=h$라 하면 $n\to\infty$일 때 $h\to0$이므로

$\lim_{n\to\infty}n\left\{f\left(1+\frac{1}{2n}\right)-f\left(1-\frac{1}{3n}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f\left(1-\frac{h}{3}\right)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f\left(1+\frac{h}{2}\right)-f(1)}{\frac{h}{2}}\times\frac{1}{2}+\frac{f\left(1-\frac{h}{3}\right)-f(1)}{-\frac{h}{3}}\times\frac{1}{3}\right\}$

$=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{3}f'(1)=\frac{5}{2}$

9. [출제의도] 삼각방정식 이해하기

$3(2\cos^2x-1)-2(1-\cos^2x)-4\cos x+5=0$

$8\cos^2x-4\cos x=0$

$\cos x=0$ 또는 $\cos x=\frac{1}{2}$

$0\le x<\pi$에서 $x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{\pi}{3}$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{5}{6}\pi$

10. [출제의도] 닮음변환 이해하기

주어진 일차변환은 원점을 닮음의 중심으로 하고 닮음비가 k인 닮음변환이므로 원 C의 중심 (k, k)는 점 (k^2, k^2)으로 옮겨지고, 원 C의 반지름의 길이 k는 k^2이 된다.

C' : $(x-k^2)^2+(y-k^2)^2=k^4$

C'이 C의 중심 (k, k)를 지나므로

$(k-k^2)^2+(k-k^2)^2=k^4$

$k^2(k^2-4k+2)=0$

$k=2+\sqrt{2}$ $(\because\ k>1)$

따라서 k의 값은 $2+\sqrt{2}$

11. [A형 11번과 동일]

12. [A형 16번과 동일]

13. [출제의도] 정적분 이해하기

$g(x)=(x-1)^2-1$이고

$1\le x\le e$에서 $\ln x-1\le0$이므로

$\int_1^e\sqrt{g(\ln x)+1}\,dx=\int_1^e\sqrt{(\ln x-1)^2}\,dx$

$=\int_1^e|\ln x-1|\,dx=\int_1^e(1-\ln x)dx$

$=\left[x-x\ln x+x\right]_1^e=e-2$

14. [출제의도] 분수부등식 이해하기

$\frac{(f\circ g)(x)}{g(x)}\le1$

$\frac{(f\circ g)(x)-g(x)}{g(x)}\le0$

$g(x)\{f(g(x))-g(x)\}\le0$, $g(x)\ne0$

i) $g(x)>0$일 때 $f(g(x))\le g(x)$

$g(x)=t\,(t>0)$라 하면

$f(t)\le t$

$0<t\le3$ $(\because\ t>0)$

$0<g(x)\le3$이므로 $-1\le x<0$ 또는 $2<x\le3$

$\therefore$ 정수 x는 -1, 3

ii) $g(x)<0$일 때 $f(g(x))\ge g(x)$

$g(x)=t\,(t<0)$라 하면

$f(t)\ge t$

$-2\le t<0$ $(\because\ t<0)$

$-2\le g(x)<0$이므로 $0<x<2$

$\therefore$ 정수 x는 1

따라서 모든 정수 x의 개수는 3

15. [출제의도] 치환적분법 이해하기

주어진 등식의 좌변에서 $\ln x=s$라 하면

$\int_{e^2}^{e^3}\frac{a+\ln x}{x}\,dx=\int_2^3(a+s)\,ds$

$=\left[as+\frac{1}{2}s^2\right]_2^3=a+\frac{5}{2}$

주어진 등식의 우변에서 $\sin x=t$라 하면

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin x)\cos x\,dx=\int_0^1(1+t)dt$

$=\left[t+\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{3}{2}$

$a+\frac{5}{2}=\frac{3}{2}$ $\therefore$ $a=-1$

따라서 a의 값은 -1

16. [A형 18번과 동일]

17. [출제의도] 함수의 연속성 추론하기

ㄱ. $|x|<1$일 때 $f(x)=x^2$은 연속이고,

$|x|>1$일 때 $f(x)=x^2-4|x|+3$은 연속이다.

i) $x=-1$일 때

$\lim_{x\to-1-0}f(x)=0$, $\lim_{x\to-1+0}f(x)=1$

ii) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-0}f(x)=1$, $\lim_{x\to1+0}f(x)=0$

$\therefore$ $x=-1$과 $x=1$에서 불연속이므로

$f(x)$가 불연속인 점은 2개이다. (참)

ㄴ. i) $x=-1$일 때

$\lim_{x\to-1-0}f(x)\cos\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to-1+0}f(x)\cos\frac{\pi}{2}x=0$

$f(-1)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$

ii) $x=1$일 때

$\lim_{x\to1-0}f(x)\cos\frac{\pi}{2}x=\lim_{x\to1+0}f(x)\cos\frac{\pi}{2}x=0$

$f(1)\cos\frac{\pi}{2}=0$

$\therefore$ 함수 $y=f(x)\cos\frac{\pi}{2}x$는 $x=-1$과 $x=1$에서

연속이다. (참)

ㄷ. [반례] $a=2$일 때

$f(x)$는 $x=-1$, 1에서 불연속이고,

$f(x-2)$는 $x=1$, 3에서 불연속이므로

$x=-1$, 1, 3에서의 연속성을 조사해 보면

$\lim_{x\to-1-0}f(x)f(x-2)=\lim_{x\to-1+0}f(x)f(x-2)$

$=f(-1)f(-3)=0$

$\lim_{x\to1-0}f(x)f(x-2)=\lim_{x\to1+0}f(x)f(x-2)$

$=f(1)f(-1)=0$

$\lim_{x\to3-0}f(x)f(x-2)=\lim_{x\to3+0}f(x)f(x-2)$

$=f(3)f(1)=0$

$\therefore$ 함수 $y=f(x)f(x-2)$는 실수 전체의 집합에서

연속이다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

18. [출제의도] 여러 가지 수열 추론하기

$A_1(0,0)$
$A_2(0,(-1)\times 3)$
$A_3((-1)\times 3,(-1)\times 3)$
$A_4((-1)\times 3,(-1)\times 3+(-1)^2\times 5)$
$A_5((-1)\times 3+(-1)^2\times 5,(-1)\times 3+(-1)^2\times 5)$
$A_6((-1)\times 3+(-1)^2\times 5,$
$\qquad (-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7)$
$A_7((-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7,$
$\qquad (-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7)$
$\cdots$

$\therefore\ p=(-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7$
$\quad +\cdots+(-1)^{14}\times 29$
$\quad =-3+5-7+9-\cdots+29=14$
$q=(-1)\times 3+(-1)^2\times 5+(-1)^3\times 7$
$\quad +\cdots+(-1)^{15}\times 31$
$\quad =-3+5-7+9-\cdots-31=-17$
따라서 $p+q=-3$

19. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\triangle$ABP에서 $\angle \mathrm{ABP}=\dfrac{\theta}{2}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=2\sin\dfrac{\theta}{2}$, $\overline{\mathrm{BP}}=2\cos\dfrac{\theta}{2}$

$\triangle$AOP의 외접원의 반지름의 길이를 R_1,
$\triangle$BOP의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하면
사인법칙에 의하여

$R_1=\dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$이고 $f(\theta)=\pi\dfrac{1}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$R_2=\dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$이고 $g(\theta)=\pi\dfrac{1}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}$

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\frac{\pi}{2}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\dfrac{\pi}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}-\dfrac{\pi}{4\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\frac{\pi}{2}-\theta}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\pi\left(\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)4\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta}$$

$\dfrac{\pi}{2}-\theta=t$라 하면 $\theta\to\dfrac{\pi}{2}-0$일 때 $t\to+0$

따라서 $\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\pi\cos\theta}{\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin^2\theta}=\lim_{t\to+0}\frac{\pi\sin t}{t\cos^2 t}=\pi$

20. [A형 21번과 동일]

21. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

정사각형 EFGH의 두 대각선의 교점을 P라 하자.
동경 OP가 나타내는 각을 θ라 하면 공통부분이
생기는 θ의 범위는 $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$이다.
점 $\mathrm{P}(\cos\theta,\sin\theta)$, 점 $\mathrm{G}(\cos\theta+1,\sin\theta+1)$이므로
공통부분의 넓이 $S(\theta)=\cos\theta(\sin\theta+1)$
$S'(\theta)=\cos 2\theta-\sin\theta$
$\quad =-(\sin\theta+1)(2\sin\theta-1)=0$

$\sin\theta=-1$ 또는 $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta=\dfrac{\pi}{6}\ \left(\because\ -\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$

θ	$-\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		↗	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	↘	

$S(\theta)$는 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$에서 극대이고 최댓값을 갖는다.

따라서 최댓값은 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

22. [출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기

$\begin{pmatrix}k-2 & 1\\ 2 & k-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$이 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 가지려면
행렬$\begin{pmatrix}k-2 & 1\\ 2 & k-3\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.
$\therefore\ (k-2)(k-3)-2=0$
$k^2-5k+4=0$, $k=1$ 또는 $k=4$
따라서 모든 실수 k의 값의 합은 5

23. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.
$a_1+a_2+a_3=3a+3d=21$
$a_7+a_8+a_9=3a+21d=75$
$\therefore\ a=4$, $d=3$
따라서 $a_{10}+a_{11}+a_{12}=3a+30d=102$

24. [출제의도] 음함수의 미분법 이해하기

$3x^3-xy^2=6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$9x^2-y^2-2xy\dfrac{dy}{dx}=0$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{9x^2-y^2}{2xy}$

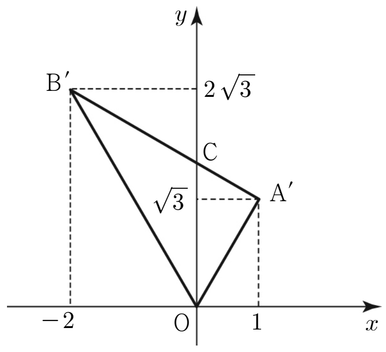
따라서 점 $(2,3)$에서 $m=\dfrac{9}{4}$이고 $40m=90$

25. [출제의도] 지수부등식을 활용하여 추론하기

$2(2^x)^2-(2n+1)2^x+n\le 0$
$(2\times 2^x-1)(2^x-n)\le 0$
$2^{-1}\le 2^x\le n$
부등식을 만족시키는 모든 정수 x의 개수가 7이므로
정수 $x=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
$\therefore\ 2^5\le n<2^6$
따라서 자연수 n의 최댓값은 63

26. [출제의도] 일차변환의 합성을 활용하여 문제해결하기

$g\circ f$에 의해 점 $\mathrm{A}(-2,0)$은 점 $\mathrm{A}'(1,\sqrt{3})$으로,
점 $\mathrm{B}(-2,2\sqrt{3})$은 점 $\mathrm{B}'(-2,2\sqrt{3})$으로 옮겨진다.



삼각형 OA′B′에서 $\overline{\mathrm{OC}}$는 $\angle \mathrm{A'OB'}$의 이등분선
이므로 $\overline{\mathrm{A'C}}:\overline{\mathrm{CB'}}=\overline{\mathrm{OA'}}:\overline{\mathrm{OB'}}=1:2$
$\therefore$ 삼각형 OA′B′의 넓이는 삼각형 OA′C의 넓이의 3배이다.
따라서 $4k^2=36$

27. [출제의도] 지표와 가수를 활용하여 문제해결하기

(가)에서 $f(a)=1$

(나)에서 $g(a)=\dfrac{1}{2}$, $f(b)=0$

$g(b)=0$이면 $g(b)=g\left(\dfrac{1}{b}\right)=0$이므로 (다)를 만족하지 않는다.

(다)에서 $g(b)\ne 0$이고 $g\left(\dfrac{1}{b}\right)=1-g(b)$이므로

$g(b)=1-g(b)+\dfrac{1}{2}$

$\therefore\ g(b)=\dfrac{3}{4}$

$\log a=f(a)+g(a)=\dfrac{3}{2}$, $\log b=f(b)+g(b)=\dfrac{3}{4}$이므로

$a=10^{\frac{3}{2}}$, $b=10^{\frac{3}{4}}$

따라서 $ab=10^{\frac{9}{4}}$이고 $m+n=13$

28. [출제의도] 무한급수와 정적분을 활용하여 문제해결하기

점 $\mathrm{D}_k\left(0,\dfrac{k}{n}\right)$이므로 직선 AD_k의 방정식은

$y=\dfrac{k}{n}x+\dfrac{k}{n}$

직선 AD_k와 곡선 $y=-x^2+1$과의 교점 P_k는

$\mathrm{P}_k\left(1-\dfrac{k}{n},\ \dfrac{2k}{n}-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right)$이므로

$\triangle \mathrm{AP}_k\mathrm{Q}_k$의 밑변의 길이는 $2-\dfrac{k}{n}$이고

높이는 $\dfrac{2k}{n}-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2$

$\therefore\ S_k=\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{k}{n}\right)\left\{\dfrac{2k}{n}-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2\right\}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}S_k=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(2-\frac{k}{n}\right)\left\{\frac{2k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}(2-x)(2x-x^2)\,dx=\frac{11}{24}$$

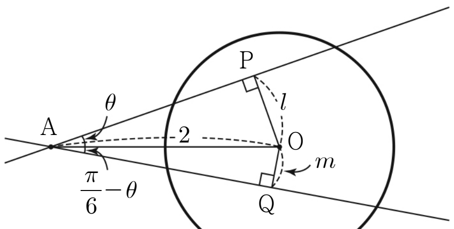
따라서 $\alpha=\dfrac{11}{24}$이고 $24\alpha=11$

29. [출제의도] 삼각함수의 합성을 활용하여 문제해결하기

점 O에서 두 직선에 내린 수선의 발을 각각
P, Q라 하자.

$\angle \mathrm{OAP}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{6}\right)$라 하면 $\angle \mathrm{OAQ}=\dfrac{\pi}{6}-\theta$

$l=2\sin\theta$, $m=2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta$



$2l^2+m^2=8\sin^2\theta+(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)^2$
$=8\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+3\sin^2\theta$
$=1+10\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta$
$=6-5\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta$
$=6-2\sqrt{7}\sin(2\theta+\alpha)$
$\left(단,\ \sin\alpha=\frac{5\sqrt{7}}{14},\ \cos\alpha=\frac{\sqrt{21}}{14}\right)$

$\tan\alpha=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ $\therefore$ $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{\pi}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{6}$ 이고 $\alpha<2\theta+\alpha<\frac{\pi}{3}+\alpha$ 이므로

$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $\sin(2\theta+\alpha)=1$

$2l^2+m^2$ 의 최솟값은 $6-2\sqrt{7}$ 이므로 $p=6$, $q=-2$
따라서 $30(p+q)=120$

30. [출제의도] 함수의 그래프의 개형으로 문제해결하기

$f(x)=\frac{\ln x^2}{x}$ 에 대하여

i) $x>0$ 일 때

$f(x)=\frac{2\ln x}{x}$, $f'(x)=\frac{2-2\ln x}{x^2}$

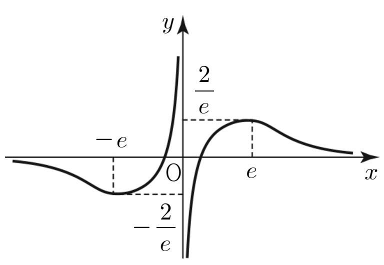
$x=e$ 에서 $f'(x)=0$ 이고

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	$\frac{2}{e}$	↘

$\therefore$ 극댓값 $\alpha=\frac{2}{e}$

ii) $x\neq0$ 인 모든 실수 x 에 대하여
$f(-x)=-f(x)$ 가 성립하므로 $f(x)$ 는 원점에 대하여 대칭이다.

i), ii)에 의하여 $y=f(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$y=\frac{2}{en}x$ 는 원점을 지나는 직선이고 원점에서

곡선 $y=\frac{2\ln x}{x}$ 에 그은 접선의 접점을 $(t, f(t))$ 라 하면 접선의 방정식은

$y=\frac{2-2\ln t}{t^2}(x-t)+\frac{2\ln t}{t}$ 이고 $(0,0)$ 을 지나므로

$0=\frac{2-2\ln t}{t^2}(0-t)+\frac{2\ln t}{t}$

$\therefore$ $t=\sqrt{e}$

$\therefore$ 접점은 $\left(\sqrt{e}, \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ 이고

접선의 방정식은 $y=\frac{1}{e}x$

$n=1$ 일 때, 직선 $y=\frac{2}{e}x$ 와 함수 $f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 0 $\therefore$ $a_1=0$

$n=2$ 일 때, 직선 $y=\frac{1}{e}x$ 와 함수 $f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 2 $\therefore$ $a_2=2$

$3\leq n\leq10$ 일 때, 직선 $y=\frac{2}{en}x$ 와 함수 $f(x)$ 의 그래프의 교점의 개수는 4 $\therefore$ $a_n=4$

따라서 $\sum_{n=1}^{10}a_n=0+2+4\times8=34$