2014학년도 6월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	①	2	⑤	3	⑤	4	③	5	④
6	②	7	⑤	8	②	9	③	10	②
11	③	12	①	13	③	14	④	15	⑤
16	③	17	①	18	④	19	④	20	②
21	①	22	13	23	20	24	9	25	16
26	240	27	25	28	8	29	21	30	39

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$(4+3i)+(1-2i)=(4+1)+(3-2)i=5+i$

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$3A-B=3(x^2+1)-(2x^2+x-1)$
$\quad=3x^2+3-2x^2-x+1$
$\quad=x^2-x+4$

3. [출제의도] 조립제법 이해하기

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 1 & -3 & 2 & 4 \\ & & 2 & \boxed{-2} & 0 \\ \hline & 1 & -1 & 0 & \boxed{4} \end{array}$$

$a=2\times(-1)=-2,\ b=4+0=4$
따라서 $a+b=2$이다.

4. [출제의도] 치환을 이용한 사차방정식의 인수분해 이해하기

$x^2+2x=X$라 하면
주어진 식 $(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2$는
$X(X-3)+2=X^2-3X+2$
$\quad=(X-1)(X-2)$
이므로
$(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2=(x^2+2x-1)(x^2+2x-2)$이다.
따라서 $a=2,\ b=-1$이므로 $a+b=1$이다.
[다른풀이]
등식 $(x^2+2x)(x^2+2x-3)+2=(x^2+ax+b)(x^2+2x-2)$는 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=0$을 대입하면 $2=-2b$이다. 그러므로 $b=-1$이다.
양변에 $x=1$을 대입하면 $2=1+a+b$이고 $b=-1$이므로 $a=2$이다.
따라서 $a+b=1$이다.

5. [출제의도] 인수정리 이해하기

다항식 $2x^3+ax^2+bx+6$이 x^2-1로 나누어떨어지므로
$2x^3+ax^2+bx+6=(x^2-1)Q(x)$ …… ㉠
이다. ($Q(x)$는 다항식)
$x^2-1=(x+1)(x-1)$이므로 ㉠의 양변에
ⅰ) $x=-1$을 대입하면
$-2+a-b+6=0$이므로
$a-b=-4$ …… ㉡
ⅱ) $x=1$을 대입하면
$2+a+b+6=0$이므로
$a+b=-8$ …… ㉢
㉡, ㉢에 의해 $a=-6,\ b=-2$이다.
따라서 $ab=12$이다.
[다른풀이]
다항식 $2x^3+ax^2+bx+6$이 x^2-1로 나누어떨어지므로 $2x^3+ax^2+bx+6$을 x^2-1로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$2x^3+ax^2+bx+6=(x-1)(x+1)Q(x)$가 된다.
그러므로 조립제법을 이용하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 2 & a & b & 6 \\ & & 2 & a+2 & a+b+2 \\ \hline -1 & 2 & a+2 & a+b+2 & \boxed{a+b+8} \\ & & -2 & -a & \\ \hline & 2 & a & \boxed{b+2} & \end{array}$$

$a+b+8=0,\ b+2=0$이므로 $a=-6,\ b=-2$이다.
따라서 $ab=12$이다.

6. [출제의도] 절댓값의 성질 이해하기

$\sqrt{3}<a<\sqrt{6}$에서 $3<a^2<6$이다.
따라서 $a^2-2>0,\ a^2-7<0$이므로
$|a^2-2|+|a^2-7|=(a^2-2)-(a^2-7)=5$이다.

7. [출제의도] 복소수 계산하기

$$\sqrt{-2}\,\sqrt{-18}+\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{-3}}=\sqrt{2}i\times\sqrt{18}i+\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}i}$$
$$=\sqrt{36}i^2+\frac{2i}{i^2}$$
$$=-6-2i$$

8. [출제의도] 다항식의 곱셈공식 이해하기

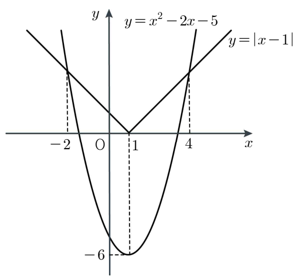
곱셈공식 $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$이므로
$(2x+y-1)^2=3$의 좌변을 전개하면
$4x^2+y^2+(-1)^2+4xy-2y-4x=3$이다.
따라서 $4x^2+y^2+4xy-4x-2y=2$이다.
[다른풀이]
$2x+y-1=\pm\sqrt{3}$이므로 $2x+y=1\pm\sqrt{3}$이다.
식의 양변을 제곱하면
$(2x+y)^2=(1\pm\sqrt{3})^2$이므로
$4x^2+4xy+y^2=4\pm2\sqrt{3}$이다.
주어진 식
$4x^2+y^2+4xy-2y-4x$
$=(4x^2+4xy+y^2)-2(2x+y)$
$=(4\pm2\sqrt{3})-2(1\pm\sqrt{3})$ (복호동순)
$=2$이다.

9. [출제의도] 이차함수와 이차부등식의 관계 이해하기

이차함수 $y=x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3$의 그래프는 아래로 볼록하므로 모든 실수 x에 대하여 $y\ge0$가 되려면 이차함수의 그래프가 x축에 접하거나 만나지 않아야 한다. 즉, $x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이다.
$\frac{D}{4}=(k-2)^2-(-k^2+5k-3)\le0$이므로
$k^2-4k+4+k^2-5k+3\le0$이다.
$2k^2-9k+7\le0$이고
$(k-1)(2k-7)\le0$이다.
즉, $1\le k\le\frac{7}{2}$
따라서 범위 안의 정수 k의 값은 1, 2, 3이므로 k의 값의 합은 6이다.
[다른풀이]
$x^2-2(k-2)x-k^2+5k-3$
$=x^2-2(k-2)x+(k-2)^2-(k-2)^2-k^2+5k-3$
$=\{x-(k-2)\}^2-2k^2+9k-7\ge0$
이 모든 실수 x에 대하여 성립하려면
$-2k^2+9k-7\ge0$이므로
$2k^2-9k+7\le0$이고
$(k-1)(2k-7)\le0$이다.
즉, $1\le k\le\frac{7}{2}$
따라서 범위 안의 정수 k의 값은 1, 2, 3이므로 k의 값의 합은 6이다.

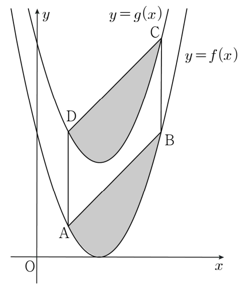
10. [출제의도] 절댓값을 포함한 부등식 이해하기

ⅰ) $x\ge1$일 때
$x^2-2x-5<x-1$이므로 $x^2-3x-4<0$이고
$(x+1)(x-4)<0$이다.
즉, $-1<x<4$이고, $x\ge1$이므로
범위는 $1\le x<4$이다.
ⅱ) $x<1$일 때
$x^2-2x-5<-(x-1)$이므로 $x^2-x-6<0$이고
$(x+2)(x-3)<0$이다.
즉, $-2<x<3$이고 $x<1$이므로
범위는 $-2<x<1$이다.
ⅰ), ⅱ)에 의해 $-2<x<4$이고 범위를 만족시키는 정수 x는 $-1, 0, 1, 2, 3$이므로 개수는 5이다.
[다른풀이]
$x^2-2x-5=x^2-2x+1-6$
$\quad=(x-1)^2-6$
$\quad=|x-1|^2-6\ (\because |x-1|^2=(x-1)^2)$
주어진 식 $x^2-2x-5<|x-1|$에 위 식을 대입하면
$|x-1|^2-6<|x-1|$이므로
$(|x-1|-3)(|x-1|+2)<0$이다.
$|x-1|+2>0$이므로 $|x-1|<3$이다.
따라서 $-2<x<4$이고 범위를 만족시키는 정수 x는 -1, 0, 1, 2, 3이므로 개수는 5이다.
[참고]
$y=x^2-2x-5$와 $y=|x-1|$의 그래프는 다음과 같다.

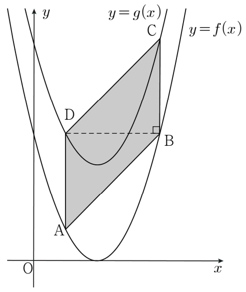


11. [출제의도] 이차함수의 그래프 이해하기

함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 선분 CD와 $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형과 선분 AB와 $y=f(x)$의 그래프로 둘러싸인 도형은 합동이다.



따라서 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 선분 AD, 선분 BC로 둘러싸인 도형의 넓이는 사각형 ABCD의 넓이와 같다.
또한, 선분 AD와 선분 BC는 평행하고 길이가 같으므로 사각형 ABCD는 평행사변형이 된다.



$\overline{\mathrm{AD}}=g(1)-f(1)=3$이고, 점A의 x좌표가 1, 점B의 x좌표가 4이므로 평행사변형 ABCD의 높이는 3이다.
따라서 평행사변형 ABCD의 넓이는 $3\times3=9$이다.

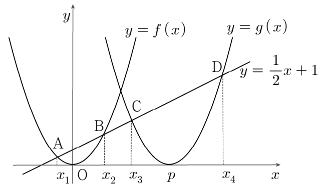
12. [출제의도] 삼차방정식의 근의 성질을 이용하여 추론하기

α가 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 한 근이므로
$\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha+1=0$
이다.
α는 0이 아니므로 양변을 α^3으로 나누면
$1+\frac{2}{\alpha}+\frac{3}{\alpha^2}+\frac{1}{\alpha^3}=0$이므로
식을 정리하면
$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+\boxed{3}\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+2\left(\frac{1}{\alpha}\right)+1=0$
이다.
그러므로 $\frac{1}{\alpha}$은 최고차항의 계수가 1인 x에 대한
삼차방정식 $\boxed{x^3+3x^2+2x+1}=0$
의 한 근이다.
같은 방법으로
β, γ도 삼차방정식 $x^3+2x^2+3x+1=0$의 근이므로
$\beta^3+2\beta^2+3\beta+1=0$ …… ㉠
이고,
$\gamma^3+2\gamma^2+3\gamma+1=0$ …… ㉡
이다.
β, γ는 0이 아니므로 식 ㉠, ㉡의 양변을 각각 β^3, γ^3으로 나누면
$1+\frac{2}{\beta}+\frac{3}{\beta^2}+\frac{1}{\beta^3}=0$, $1+\frac{2}{\gamma}+\frac{3}{\gamma^2}+\frac{1}{\gamma^3}=0$이므로
식을 정리하면
$\left(\frac{1}{\beta}\right)^3+3\left(\frac{1}{\beta}\right)^2+2\left(\frac{1}{\beta}\right)+1=0$, $\left(\frac{1}{\gamma}\right)^3+3\left(\frac{1}{\gamma}\right)^2+2\left(\frac{1}{\gamma}\right)+1=0$
이다.
그러므로 $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$은 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식 $x^3+3x^2+2x+1=0$의 근이다.
따라서 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$을 세 근으로 갖는 최고차항의 계수가 1인 x에 대한 삼차방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
이다.
따라서 $p=3$, $f(2)=25$이므로 $p+f(2)=28$이다.

13. [출제의도] 이차부등식 문제해결하기

이차부등식 $\frac{1}{2}f(x)\le k$에 $f(x)=x^2$을 대입하면
$\frac{1}{2}x^2\le k$이다.
($k<0$이면 $\frac{1}{2}x^2\le k$를 만족하는 정수 x가 없다.)
$x^2\le 2k$이므로 $x^2-2k\le 0$이다.
따라서 $(x-\sqrt{2k})(x+\sqrt{2k})\le 0$이다.
그러므로 $-\sqrt{2k}\le x\le\sqrt{2k}$를 만족하는 정수 x의 개수가 7이므로 $3\le\sqrt{2k}<4$이다.
즉, $9\le 2k<16$이다.
따라서 $\frac{9}{2}\le k<8$를 만족하는 자연수 $k=5$, 6, 7이므로 k의 합은 18이다.

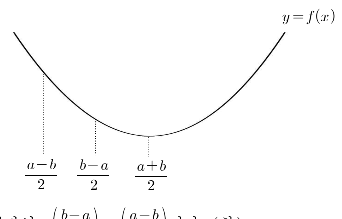
14. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계 추론하기



함수 $y=g(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼 평행이동한 것이므로
$g(x)=(x-p)^2$이 된다.
이차함수 $y=x^2$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 교점 A, B의 x좌표를 각각 x_1, x_2라 하면 x_1, x_2는
방정식 $x^2=\frac{1}{2}x+1$의 근이 된다.
따라서 이차방정식 $2x^2-x-2=0$의 두 근의 합
$x_1+x_2=\frac{1}{2}$이다.
같은 방법으로 이차함수 $y=(x-p)^2$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}x+1$의 교점 C, D의 x좌표를 x_3, x_4라 하면
x_3, x_4는 방정식 $(x-p)^2=\frac{1}{2}x+1$의 근이 된다.
그러므로 이차방정식 $2x^2-(4p+1)x+2p^2-2=0$의
두 근의 합 $x_3+x_4=2p+\frac{1}{2}$이다.
따라서 $x_1+x_2+x_3+x_4=1+2p$이므로 $1+2p=9$이고, $p=4$이다.

15. [출제의도] 이차함수의 성질 추론하기

ㄱ. $a=b$이면 $f(x)=(x-a)^2$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이다. (참)
ㄴ. $f(x)=x^2-(a+b)x+ab$이므로
$f(x)=x^2-(a+b)x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
$=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+ab-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
$=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$이다.
따라서 $f(x)$는 $x=\frac{a+b}{2}$일 때 최솟값은
$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$이다. (참)
ㄷ. 이차함수 $f(x)$는 아래로 볼록하고, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$를 최솟값으로 가지고, $0<a<b$에서
$\frac{a-b}{2}<\frac{b-a}{2}<\frac{a+b}{2}$이므로
$f\left(\frac{a-b}{2}\right)>f\left(\frac{b-a}{2}\right)>f\left(\frac{a+b}{2}\right)$이다.



따라서 $f\left(\frac{b-a}{2}\right)<f\left(\frac{a-b}{2}\right)$이다. (참)
[다른풀이]
ㄷ. $f\left(\frac{b-a}{2}\right)=\left(\frac{b-a}{2}-a\right)\left(\frac{b-a}{2}-b\right)$
$=\left(\frac{b-3a}{2}\right)\left(\frac{-a-b}{2}\right)$
$=\frac{(3a-b)(a+b)}{4}$이고
$f\left(\frac{a-b}{2}\right)=\left(\frac{a-b}{2}-a\right)\left(\frac{a-b}{2}-b\right)$
$=\left(\frac{-a-b}{2}\right)\left(\frac{a-3b}{2}\right)$
$=\frac{(3b-a)(a+b)}{4}$
이므로
$f\left(\frac{b-a}{2}\right)-f\left(\frac{a-b}{2}\right)=\frac{(a+b)}{4}(4a-4b)$
$=(a+b)(a-b)$이다.
$0<a<b$에서 $a+b>0$, $a-b<0$이므로 $(a+b)(a-b)<0$이다.
따라서 $f\left(\frac{b-a}{2}\right)<f\left(\frac{a-b}{2}\right)$이다. (참)

16. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

$x^2-3x-2=0$의 두 근이 α, β이므로
근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=-2$
또한 α는 $x^2-3x-2=0$의 근이므로
$\alpha^2-3\alpha-2=0$
즉, $\alpha^2-3\alpha=2$이다.
$\alpha^3-3\alpha^2+\alpha\beta+2\beta=\alpha(\alpha^2-3\alpha)+\alpha\beta+2\beta$
$=2\alpha+\alpha\beta+2\beta$
$=2(\alpha+\beta)+\alpha\beta$
$=6-2=4$이다.
따라서 $\alpha^3-3\alpha^2+\alpha\beta+2\beta$의 값은 4이다.

17. [출제의도] 이차방정식을 활용한 실생활 문제해결하기

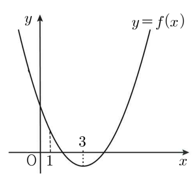
$\frac{3}{10}=\frac{E_2}{E_1}=\frac{\frac{1}{2}GM_2^{\,2}\times\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)}{\frac{1}{2}GM_1^{\,2}\times\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{20}\right)}=\frac{M_2^{\,2}}{M_1^{\,2}}\times\frac{5}{4}$이다.
$\frac{3}{10}=\frac{M_2^{\,2}}{M_1^{\,2}}\times\frac{5}{4}$이므로 $\frac{M_2^{\,2}}{M_1^{\,2}}=\frac{3}{10}\times\frac{4}{5}=\frac{6}{25}$
따라서 $\frac{M_2}{M_1}=\frac{\sqrt{6}}{5}$이다.

18. [출제의도] 삼차방정식의 근의 성질을 활용하여 문제해결하기

삼차방정식 $x^3-5x^2+(k-9)x+k-3=0$에서 조립제법을 이용하여 인수분해하면

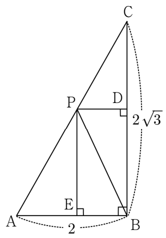
-1	1	-5	$k-9$	$k-3$
		-1	6	$-k+3$
	1	-6	$k-3$	0

$x^3-5x^2+(k-9)x+k-3=(x+1)(x^2-6x+k-3)$이다.
$x=-1$은 주어진 삼차방정식의 해이다.
따라서 $x^2-6x+k-3=0$은 1보다 큰 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.
$f(x)=x^2-6x+k-3$이라 하면
1보다 큰 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식을 D라 하면 $\frac{D}{4}=9-k+3>0$이므로
$k<12$이다. …… ㉠
또한, $f(1)=1-6+k-3>0$이므로 $k>8$이다. …… ㉡

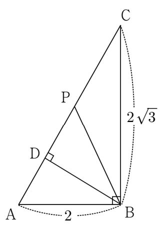


따라서 ㉠, ㉡을 모두 만족하는 k의 값은 $8<k<12$이므로 정수 k는 9, 10, 11이다. 그러므로 모든 정수 k의 값의 합은 30이다.

19. **[출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용한 문제해결하기**



점 P에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하고 변 AB에 내린 수선의 발을 E라 하고 닮음을 이용하면
$\overline{PD}=a$이면 $\overline{CD}=\sqrt{3}a$, $\overline{BD}=(2-a)\sqrt{3}$이므로
$\overline{PB}^2=a^2+3(2-a)^2=4a^2-12a+12$이고,
$\overline{PC}^2=a^2+3a^2=4a^2$이다.
$\overline{PB}^2+\overline{PC}^2=8a^2-12a+12=8\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{15}{2}$이므로
최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.
[다른풀이]



변 AC위의 임의의 한 점 P에 대해 $\overline{PC}=x$라 하자.
점 B에서 변 AC에 내린 수선의 발을 D라 하면
삼각형 BDP는 직각삼각형이다.
피타고라스 정리에 의해서 $\overline{PB}^2=\overline{PD}^2+\overline{BD}^2$이고,
삼각형 ADB는 $\angle A=60^\circ$인 직각삼각형이므로
$\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=1$, $\overline{DB}=\sqrt{3}$이다.
$\overline{PD}=4-\overline{AD}-\overline{CP}=4-1-x=3-x$이므로
$\overline{PB}^2=(3-x)^2+(\sqrt{3})^2$이다.
따라서

$$\begin{aligned}\overline{PB}^2+\overline{PC}^2&=(3-x)^2+(\sqrt{3})^2+x^2\\&=x^2-6x+9+3+x^2\\&=2x^2-6x+12\\&=2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{2}+12\\&=2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}\end{aligned}$$

이다.
따라서 최솟값은 $\frac{15}{2}$이다.

20. **[출제의도] 이차방정식의 근의 성질과 복소수의 성질을 이용하여 문제해결하기**

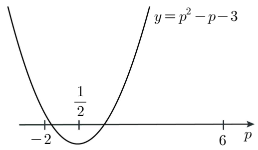
복소수 α가 이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 근이면 $\overline{\alpha}$도 근이므로
$\alpha=a+bi$라 하면, $\overline{\alpha}=a-bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)이고,
근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\overline{\alpha}=2a=p$, $\alpha\overline{\alpha}=a^2+b^2=p+3$이므로
$a=\frac{p}{2}$, $b^2=-a^2+p+3=-\frac{p^2}{4}+p+3$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\alpha^3&=(a+bi)^3\\&=a^3+3a^2bi-3ab^2-b^3i\\&=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i\end{aligned}$$

α^3이 실수이므로 허수부분인 $3a^2b-b^3=0$이다.
$b\neq 0$이므로 $b^2=3a^2$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$-\frac{p^2}{4}+p+3=3\left(\frac{p}{2}\right)^2$을 정리하면
$p^2-p-3=0$이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의해 모든 실수 p의 곱은 -3이다.
[다른풀이1]
이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근을 가지므로
판별식을 D라 하면 $D=p^2-4(p+3)<0$이므로
$-2<p<6$이다.
이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 허근이 α이므로
$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$이 성립한다.
즉, $\alpha^2=p\alpha-p-3$이다.

$$\begin{aligned}\alpha^3=\alpha^2\times\alpha&=p\alpha^2-(p+3)\alpha\\&=p(p\alpha-p-3)-(p+3)\alpha\\&=(p^2-p-3)\alpha-p(p+3)\end{aligned}$$

이므로
α^3은 실수, $p(p+3)$은 실수, α는 허수이므로
$p^2-p-3=0$이다.



$f(p)=p^2-p-3$이라 하면
$f(p)=\left(p-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$이다.
ⅰ) 축 $p=\frac{1}{2}$은 -2와 6 사이에 존재하고
ⅱ) $f(-2)>0$, $f(6)>0$
ⅲ) $f\left(\frac{1}{2}\right)<0$이므로 실근이 존재한다.
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $p^2-p-3=0$의 두 실근은 -2와 6사이에 존재한다.
따라서 α^3이 실수가 되는 모든 실수 p의 값의 곱은 -3이다.
[다른풀이2]
이차방정식 $x^2-px+p+3=0$이 허근을 가지므로
판별식을 D라 하면 $D=p^2-4(p+3)<0$이므로
$-2<p<6$이다.
이차방정식 $x^2-px+p+3=0$의 한 허근이 α이므로
$\alpha^2-p\alpha+p+3=0$이고, $\alpha^2-p\alpha+p^2=p^2-p-3$이다.
식의 양변에 $\alpha+p$를 각각 곱하면
$\alpha^3+p^3=(\alpha+p)(p^2-p-3)$이므로
$\alpha^3=(p^2-p-3)\alpha-p(p+3)$이다.
α^3이 실수이므로 $p^2-p-3=0$이다.

21. **[출제의도] 나머지정리를 이용한 다항식 추론하기**

조건 (가)에서 $x=1$을 대입하면 $P(1)=0$이다.
$x=7$을 대입하면 $P(5)=0$이다.
$P(x)$는 삼차다항식이므로 조건 (나)에 의해
$P(x)=(x^2-4x+2)(ax+b)+2x-10$이다.
(단, a, b는 상수)
$P(1)=0$이므로 $-a-b-8=0$
따라서 $a+b=-8$이다. …… ㉠
$P(5)=0$이므로 $35a+7b=0$
따라서 $5a+b=0$이다. …… ㉡
㉠과 ㉡에 의하여 $a=2$, $b=-10$이다.
따라서 $P(x)=(x^2-4x+2)(2x-10)+2x-10$이므로
$P(4)=-6$이다.
[다른풀이1]
조건 (가)에서 $x=1$을 대입하면 $P(1)=0$이고,
$x=7$을 대입하면 $P(5)=0$이므로 상수 a, k에 대하여
$P(x)=a(x-1)(x-5)(x-k)$이다. (단, $a\neq 0$)
위 식을 조건 (가)에 대입하면
$a(x-1)(x-3)(x-7)(x-k-2)$
$=a(x-7)(x-1)(x-5)(x-k)$
이므로 $(x-3)(x-k-2)=(x-5)(x-k)$ 즉, $k=3$이다.
따라서 $P(x)=a(x-1)(x-3)(x-5)$이다.
조건 (나)에 의해 $P(x)$를 x^2-4x+2로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면
$a(x-1)(x-3)(x-5)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$
즉, $a(x^2-4x+3)(x-5)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$ …㉠
$x^2-4x+2=0$의 해를 α라 하면 $\alpha^2-4\alpha+2=0$이므로
식 ㉠에 $x=\alpha$를 대입하면 $a(\alpha-5)=2\alpha-10$
즉, $a=2$이다.
따라서 $P(x)=2(x-1)(x-3)(x-5)$이므로 $P(4)=-6$이다.
[다른풀이2]
조건 (나)에 의해 $P(x)=(x^2-4x+2)Q(x)+2x-10$으로 둘 수 있다.($Q(x)$는 일차식)
조건 (가)에 위의 식을 대입하면 좌변은
$(x-1)P(x-2)$
$=(x-1)\{(x-2)^2-4(x-2)+2\}Q(x-2)+2(x-2)-10$
$=(x-1)(x^2-8x+14)Q(x-2)+2(x-7)$
우변은 $(x-7)P(x)$
$=(x-7)\{(x^2-4x+2)Q(x)+2(x-5)\}$
좌변과 우변을 비교하면
$(x^2-8x+14)Q(x-2)$가 $x-7$을 인수로 가져야 한다.
즉, $Q(x-2)$는 $x-7$을 인수로 가져야 한다.
그러므로 $Q(x-2)=a(x-7)$이 되어 $Q(x)=a(x-5)$를 얻는다.
또한 $a(x^2-4x+2)(x-5)+2(x-5)$가 $x-1$을 인수로 가지므로
$x=1$을 대입하면
$a(1-4+2)\times(-4)+(-8)=0$이다.
따라서 $a=2$이다.
다항식 $P(x)=2(x^2-4x+2)(x-5)+2(x-5)$이므로
$P(4)=-6$이다.

22. **[출제의도] 항등식 이해하기**

등식 $x^2+5x+7=(x-1)Q(x)+a$에 $x=1$을 대입하면 $1+5+7=a$이다.
따라서 $a=13$이다.

23. **[출제의도] 이차함수와 직선의 위치관계 이해하기**

이차함수 $y=x^2+5$의 그래프와 직선 $y=mx$가 접해야하므로 방정식 $x^2+5=mx$는 중근을 가져야 한다.
그러므로 판별식을 D라 하면 $D=m^2-20=0$이다.
따라서 $m^2=20$이다.

24. **[출제의도] 연립부등식의 성질 이해하기**

부등식 $|x-1|\le 6$의 해를 구하면 $-6\le x-1\le 6$이므로 $-5\le x\le 7$이다.
부등식 $(x-2)(x-8)\le 0$의 해를 구하면 $2\le x\le 8$이다.
그러므로 연립부등식의 해는 $2\le x\le 7$이다.
따라서 $\alpha+\beta$의 값은 9이다.

25. **[출제의도] 미지수가 3개인 연립일차방정식 이해하기**

$$\begin{cases}x-2y=10 & \cdots\cdots ㉠\\ x-y-z=8 & \cdots\cdots ㉡\\ x+3y+z=-12 & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$$

㉡+㉢을 계산하면
$2x+2y=-4$ …… ㉣
㉠+㉣를 계산하면 $3x=6$ …… ㉤
㉣, ㉤에 의해 $x=2$, $y=-4$, $z=-2$이다.
따라서 $xyz=16$이다.
[다른풀이]
㉠+㉡+㉢을 계산하면 $3x=6$이므로 $x=2$이다.
㉠, ㉡에 의해 $y=-4$, $z=-2$이므로 $xyz=16$이다.

26. **[출제의도] 곱셈공식을 활용한 문제해결하기**

$\overline{AC}=x$, $\overline{CB}=y$라 하면 $x+y=8$이고, $x^3+y^3=224$이다. 두 정육면체의 겉넓이의 합은 $6(x^2+y^2)$이므로 xy의 값을 구해야 한다.
$(x+y)^3=(x^3+y^3)+3xy(x+y)$이므로 $8^3=224+3xy\times 8$에 의해 $xy=12$이다.

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$를 이용하면 $x^2+y^2=40$이고,
두 정육면체의 겉넓이의 합은 240이다.
[다른풀이]
$\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{CB}}=8-x$이므로 $x^3+(8-x)^3=224$
이고, $x^3-x^3+24x^2-192x+512=224$이므로
$24x^2-192x+288=0$이다.
$x^2-8x+12=0$이므로 $(x-6)(x-2)=0$이다.
$x=6$ 또는 $x=2$이므로 두 정육면체의 변의 길이는 각각 6과 2이다.
따라서 두 정육면체의 겉넓이는 $6\times6^2+6\times2^2=240$이다.

27. [출제의도] 미지수가 2개인 연립이차방정식 이해하기

$$\begin{cases} x^2-y^2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+y)^2-2(x+y)=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

식 ㉡에서 $x+y=t$라 하면 $t^2-2t-3=0$이므로
$(t-3)(t+1)=0$ 즉, $t=3$ 또는 $t=-1$이다.
그러므로 $x+y=3$ 또는 $x+y=-1$이다.
한편, x, y는 양수이므로
$x+y=3$ …… ㉢
식 ㉠을 인수분해하면 $(x+y)(x-y)=6$이므로
㉢에 의해 $3(x-y)=6$이다.
따라서 $x-y=2$ …… ㉣
이다.
㉢+㉣을 계산하면 $2x=5$이므로 $x=\frac{5}{2}$이다.
$x=\frac{5}{2}$를 ㉢에 대입하면 $y=\frac{1}{2}$이다.
따라서 $20xy=25$이다.
[다른풀이]

$$\begin{cases} x^2-y^2=6 & \cdots\cdots ㉠ \\ (x+y)^2-2(x+y)=3 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

$x+y=\alpha$, $xy=\beta$라 하면 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$이므로
$(x-y)^2=\alpha^2-4\beta$ …… ㉢
식 ㉡에 의해 $\alpha^2-2\alpha-3=0$이 된다.
그러므로 $\alpha=3$ 또는 $\alpha=-1$이고 x, y는 양수이므로
$\alpha=3$ 즉, $x+y=3$이다.
따라서 식 ㉢은 $(x-y)^2=9-4\beta$이다.
또한, 식 ㉠을 제곱하면 $(x^2-y^2)^2=6^2$이고, 등식을
정리하면 $(x+y)^2(x-y)^2=6^2$ …… ㉣
식 ㉣에 $x+y=3$과 식 ㉢을 대입하면
$3^2(9-4\beta)=6^2$이므로 $9-4\beta=4$ 즉, $\beta=\frac{5}{4}$이다.
따라서 $20xy=25$이다.

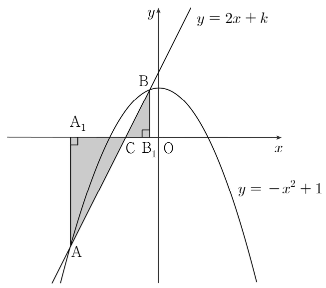
28. [출제의도] 복소수의 성질을 이용하여 추론하기

$z=a+bi(a, b$는 실수)라 하면 $z^2=(a^2-b^2)+2abi$이고
복소수의 성질에 의해 $(\bar{z})^2=\overline{z^2}$이므로
$(\bar{z})^2=a^2-b^2-2abi$이다.
따라서 $z^2+(\bar{z})^2=2(a^2-b^2)$이다.
조건 (나)에 의해 $z^2+(\bar{z})^2$은 음수이므로
$2(a^2-b^2)<0$
즉, $2(a+b)(a-b)<0$ …… ㉠
조건 (가)의 $z=3x+(2x-7)i$에서 $a=3x$, $b=2x-7$을
식 ㉠에 대입하면
$2\{3x+(2x-7)\}\{3x-(2x-7)\}=2(5x-7)(x+7)$이고
$(5x-7)(x+7)<0$이므로 $-7<x<\frac{7}{5}$을 만족하는
정수 x는 -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1이고
정수 x의 개수는 8이다.

29. [출제의도] 사차방정식 해의 성질을 활용하여 문제해결하기

$x^2=t\,(t\geq0)$라 하면 주어진 사차방정식은
$t^2-9t+k-10=0$이므로 t에 대한 이차방정식이다.
즉, 방정식 $t^2-9t+k-10=0$의 두 실근이 0이상이어야 한다.
따라서 판별식을 D라 하면 $D\geq0$, (두 근의 합) ≥0,
(두 근의 곱) ≥0이어야 한다.
$D=9^2-4(k-10)\geq0$이므로
$k\leq\frac{121}{4}$ …… ㉠
(두 근의 합) $=9\geq0$이므로
k의 값에 관계없이 성립한다. …… ㉡
두 근의 곱 $k-10\geq0$이므로
$k\geq10$ …… ㉢
㉠, ㉡, ㉢에 의해 $10\leq k\leq\frac{121}{4}$이므로 모든 근이
실수가 되도록 하는 자연수 k는 10, 11, $\cdots$, 30
이므로 k의 개수는 21이다.

30. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계를 활용하여 문제해결하기



점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라 하면 $\mathrm{A}(\alpha,\ 2\alpha+k)$,
$\mathrm{B}(\beta,\ 2\beta+k)$, $\mathrm{A_1}(\alpha,\ 0)$, $\mathrm{B_1}(\beta,\ 0)$, $\mathrm{C}\left(-\frac{k}{2},\ 0\right)$이고,
α, β는 이차방정식 $-x^2+1=2x+k$
즉, $x^2+2x+k-1=0$의 근이므로
근과 계수의 관계에 의해
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=k-1$ …… ㉠
이다.
삼각형 $\mathrm{ACA_1}$의 넓이를 S_1이라 하면
$S_1=\frac{1}{2}(-2\alpha-k)\left(-\frac{k}{2}-\alpha\right)=\left(\frac{k}{2}+\alpha\right)^2$이고,
삼각형 $\mathrm{BCB_1}$의 넓이를 S_2라 하면
$S_2=\frac{1}{2}(2\beta+k)\left(\beta+\frac{k}{2}\right)=\left(\frac{k}{2}+\beta\right)^2$이다.
두 삼각형 $\mathrm{ACA_1}$과 $\mathrm{BCB_1}$의 넓이의 합이 $\frac{3}{2}$이므로
$\left(\alpha+\frac{k}{2}\right)^2+\left(\beta+\frac{k}{2}\right)^2=\frac{3}{2}$이고,
$(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)+\frac{k^2}{2}=\frac{3}{2}$이다.
즉, $2(\alpha^2+\beta^2)+2k(\alpha+\beta)+k^2-3=0$이고,
㉠에 의해 $k^2-8k+9=0$이다.
그러므로 $k=4\pm\sqrt{7}$이고 $-2<k<2$이므로
$k=4-\sqrt{7}$이다.
따라서 $p=4$, $q=-1$이므로 $10p+q=39$이다.