2014학년도 6월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 B형 정답

1	③	2	④	3	②	4	④	5	①
6	③	7	⑤	8	③	9	①	10	②
11	⑤	12	⑤	13	④	14	⑤	15	④
16	①	17	③	18	③	19	①	20	②
21	③	22	32	23	18	24	37	25	34
26	42	27	24	28	90	29	835	30	69

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$9^{\frac{2}{3}}\times 3^{-\frac{1}{3}}=3^{\frac{4}{3}}\times 3^{-\frac{1}{3}}=3$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_3 27=3$이므로

$\log_3 27^3=3\log_3 27=3\times 3=9$

$(\log_3 27)^3=3^3=27$ 이다.

따라서 $\log_3 27^3+(\log_3 27)^3=9+27=36$이다.

3. [출제의도] 행렬 계산하기

$2A-AB=\begin{pmatrix}6&0\\-2&4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&6\\2&-2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}6&-6\\-4&6\end{pmatrix}$

4. [출제의도] 역행렬의 성질 이해하기

$A+A^{-1}=3E$이므로

$A^2+(A^{-1})^2=(A+A^{-1})^2-2E=9E-2E=7E$이다.

5. [출제의도] 등차수열의 합의 공식 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$2d=a_{100}-a_{98}=6$에서 $d=3$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 3인 등차수열이다. 따라서

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\frac{10\times(4+9\times 3)}{2}=155$

이다.

6. [출제의도] 역행렬과 지수 문제 해결하기

$x=0,\ y=0$ 이외의 해를 갖기 위해서는

행렬 $\begin{pmatrix}2^a&-1\\8&2^a-6\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

$2^a(2^a-6)+8=0$

$2^a=t$로 치환하면 $t^2-6t+8=0$이다.

$t=2$ 또는 $t=4$이므로 $a=1$ 또는 $a=2$이다.

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 3이다.

7. [출제의도] 지수함수와 로그함수 문제 해결하기

$y=3^{\frac{x-1}{2}}-4$에서 $y+4=3^{\frac{x-1}{2}}$

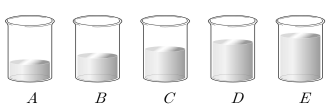
양변에 밑이 3인 로그를 취하면

$\log_3(y+4)=\frac{x-1}{2}\ (y>-4)$이므로

$x=2\log_3(y+4)+1$이다.

따라서 구하는 역함수는 $y=2\log_3(x+4)+1\ (x>-4)$이므로 $a+b+c=7$이다.

8. [출제의도] 등차수열을 이용하여 실생활 문제 해결하기



A B C D E

5개 컵에 들어 있는 물의 양을

$a-2d,\ a-d,\ a,\ a+d,\ a+2d$라고 하면

$(a-2d)+(a-d)+a+(a+d)+(a+2d)=800$이므로

$a=160$이다. 따라서 컵 C에 들어 있는 물의 양은 160ml이다.

[다른풀이]

$S_{2n-1}=\frac{(2n-1)\{2a+(2n-2)d\}}{2}$

$=(2n-1)\{a+(n-1)d\}$

$=(2n-1)a_n$

이므로 $a_n=\frac{S_{2n-1}}{2n-1}$이다.

따라서 $a_3=\frac{S_5}{5}=160$이다.

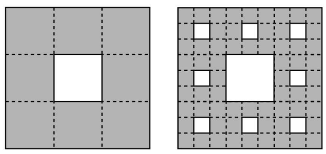
9. [출제의도] 지수와 로그의 성질 문제 해결하기

$a^{\log x}=x$에서 양변에 log를 취하면 $\log x\log a=\log x$이므로 $\log x(\log a-1)=0$이다. 이 식이 모든 양수 x에 대하여 성립하므로 $\log a=1$이다. 그러므로 $a=10$이다.

$x^{\log b}=b$에서 양변에 log를 취하면 $\log b\log x=\log b$이므로 $\log b(\log x-1)=0$이다. 이 식이 모든 양수 x에 대하여 성립하므로 $\log b=0$이다. 그러므로 $b=1$이다

따라서 $a+b=11$이다.

10. [출제의도] 등비수열의 합의 공식 추론하기



A_1 A_2 …

$S_1=\frac{8}{9}$

$S_2=\frac{8}{9}S_1=\left(\frac{8}{9}\right)^2$

$S_3=\frac{8}{9}S_2=\left(\frac{8}{9}\right)^3$

⋮

수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\frac{8}{9}$이고 공비가 $\frac{8}{9}$인 등비수열이므로

$\sum_{n=1}^{10}S_n=\frac{\frac{8}{9}\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{10}\right\}}{1-\frac{8}{9}}=8\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{10}\right\}$

이다.

[다른풀이]

n번째 잘라낸 정사각형의 넓이의 합을 T_n이라 하면 수열 $\{T_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{9}$이고 공비가 $\frac{8}{9}$인 등비수열이므로

$S_n=1-\sum_{k=1}^{n}T_k=1-\frac{\frac{1}{9}\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^n\right\}}{1-\frac{8}{9}}=\left(\frac{8}{9}\right)^n$

이다. 따라서

$\sum_{n=1}^{10}S_n=\frac{\frac{8}{9}\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{10}\right\}}{1-\left(\frac{8}{9}\right)}=8\left\{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{10}\right\}$

이다.

11. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 실생활 문제 해결하기

먼저 주어진 등식 $T_iV_i^{\gamma-1}=T_fV_f^{\gamma-1}$에 기체몰 열용량 비 $\gamma=\frac{5}{3}$를 대입하여 정리하면

$T_iV_i^{\frac{5}{3}-1}=T_fV_f^{\frac{5}{3}-1}$

$T_iV_i^{\frac{2}{3}}=T_fV_f^{\frac{2}{3}}$

이다. 문제의 조건에서 $T_i=480$, $V_i=5$이고

$T_f=270$이므로 각각을 $T_iV_i^{\frac{2}{3}}=T_fV_f^{\frac{2}{3}}$에 대입하여 정리하면

$480\times 5^{\frac{2}{3}}=270\times V_f^{\frac{2}{3}}$

$16\times 5^{\frac{2}{3}}=9\times V_f^{\frac{2}{3}}$

$V_f^{\frac{2}{3}}=\frac{16}{9}\times 5^{\frac{2}{3}}$

$V_f=\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{3}{2}}\times\left(5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$V_f=\frac{64}{27}\times 5=\frac{320}{27}$

이다.

12. [출제의도] 행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $B^2=A+E$를 $B^4=A+2E$에 대입하면

$(A+E)^2=A+2E$이다. 따라서 $A^2+A=E$이다. (참)

ㄴ. $B^2-A=E$에서 $B(B^2-A)=B$이므로

$BA=B^3-B$이다. 같은 방법으로 $(B^2-A)B=B$이므로 $AB=B^3-B$이다. 따라서 $AB=BA$이다.(참)

ㄷ. $A^2+A=E$에서 $A(A+E)=E$이고 $B^2=A+E$이므로 $AB^2=E$이다. 따라서 AB의 역행렬은 B이다. (참)

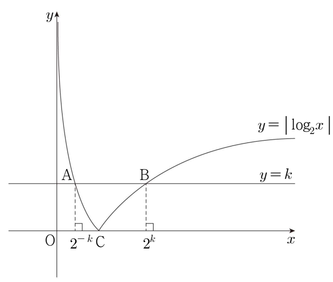
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

[다른풀이]

ㄷ. $A^2+A=E$이므로 A는 역행렬을 가진다.

한편, $A=B^2-E$를 $B^4=A+2E$에 대입하여 정리하면 $B^4-B^2=E$, 즉, $B(B^3-B)=E$이다. 그러므로 B도 역행렬을 가진다. 따라서 행렬 AB의 역행렬이 존재한다. (참)

13. [출제의도] 로그함수와 수열 문제 해결하기



$\mathrm{A}(2^{-k},\ k)$, $\mathrm{B}(2^k,\ k)$이므로 x좌표가 2^m(m은 정수)의 꼴인 점의 개수는 $-k$부터 k까지 정수의 개수이다.

따라서 $a_k=k-(-k)+1=2k+1$이다.

그러므로

$\sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}(2k+1)=2\times\frac{15\times 16}{2}+15=255$

이다.

[다른풀이]

$k=1$일 때, $\mathrm{A}(2^{-1},\ 1)$, $\mathrm{B}(2^1,\ 1)$이고 $a_1=3$이다.

$k=2$일 때, $\mathrm{A}(2^{-2},\ 2)$, $\mathrm{B}(2^2,\ 2)$이고 $a_2=5$이다.

k가 증가할수록 양 끝점이 두 개씩 늘어나므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열이다.

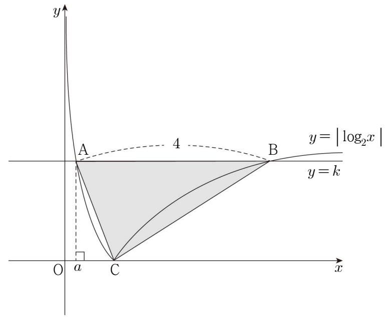
따라서 $a_k=2k+1$이다.

그러므로

$\sum_{k=1}^{15}a_k=\sum_{k=1}^{15}(2k+1)=2\times\frac{15\times 16}{2}+15=255$

이다.

14. [출제의도] 지수방정식 이해하기



점 A의 x좌표를 a라 하면 삼각형 ABC의 넓이 $S=\frac{1}{2}\times 4\times(-\log_2 a)$이다.

점 B의 x좌표는 $a+4$이므로 $-\log_2 a=\log_2(a+4)$이다. $a^2+4a-1=0$이 되고 $a=-2\pm\sqrt{5}$이고 $a=-2+\sqrt{5}$ (진수조건에 의해 $a>0$)가 된다.

넓이 S를 계산하면 $S=\log_2(-2+\sqrt{5})^{-2}$이므로

$2^S=(-2+\sqrt{5})^{-2}$

$=\frac{1}{9-4\sqrt{5}}$

$=9+4\sqrt{5}$

이다.

[다른풀이]

$A(2^{-k}, k)$, $B(2^k, k)$이므로

$S=\frac{1}{2}\times 4\times k=2k$

$\overline{AB}=4$에서 $2^k-2^{-k}=4$

$2^k=t$라 두면 $t-t^{-1}=4$

$t^2-4t-1=0$

$t=2+\sqrt{5}$ ($\because\ t>0$)

$2^k=2+\sqrt{5}$

$2^S=2^{2k}=(2^k)^2=(2+\sqrt{5})^2=9+4\sqrt{5}$

15. [출제의도] 지수법칙을 이용한 거듭제곱근 추론하기

$\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $\beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ 라 두면

$\alpha\beta=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})}$
$=\sqrt[3]{-1}=\boxed{-1}$

이다. $\alpha+\beta=x$라 하면

$(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$을 이용하여

삼차방정식 $x^3+3x-4=0$을 얻을 수 있다.

$x^3+3x-4=0$

$(x-1)(x^2+x+4)=0$

에서 이 방정식의 실근은 $x=1$뿐이므로 $\alpha+\beta=1$이다. 따라서 $\alpha+\beta=1$과 $\alpha\beta=\boxed{-1}$인 실수 α, β를 두 근으로 하는 최고차항의 계수가 1인 이차방정식은 $\boxed{x^2-x-1=0}$이다. 이 이차방정식의 두 근 α, β가 $\beta<0<\alpha$이므로 $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}=\boxed{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$이다.

따라서 $a=-1$, $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$이므로

$a+10b=-1+10\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=4+5\sqrt{5}$이다.

16. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\sum_{k=1}^{1}a_k=1$, $\sum_{k=2}^{4}a_k=2^2$, $\sum_{k=5}^{25}a_k=5^2$, $\sum_{k=26}^{676}a_k=26^2$이므로

$\sum_{k=1}^{677}a_k=1+4+25+676+a_{677}=777$ 이다.

따라서 $a_{677}=71$이다.

17. [출제의도] 지수부등식과 로그부등식 문제 해결하기

$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{13x-6}\geq 0$에서 $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2}\geq\left(\frac{1}{2}\right)^{13x-6}$

$2x^2-13x+6\leq 0$이고 $\frac{1}{2}\leq x\leq 6$이므로

$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$이다.

$\log_3(5x+6)-\frac{2}{\log_x 3}>0$에서

$\log_3(5x+6)-\log_3 x^2>0$

$\log_3(5x+6)>\log_3 x^2$

$x^2-5x-6<0$이므로 $-1<x<6$이다.

로그의 정의에 의해 $0<x<6$, $x\neq 1$이므로

$B=\{2, 3, 4, 5\}$이다. 그러므로 $A-B=\{1, 6\}$이다.

따라서 $A-B$의 모든 원소의 합은 7이다.

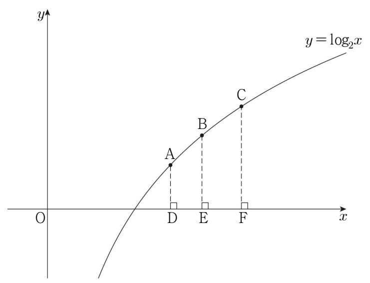
18. [출제의도] 상용로그의 지표 이해하기

n이 한 자릿수이면 a_n은 n 자릿수이므로 $b_n=n-1$, n이 두 자릿수이면 a_n은 $2n$ 자릿수이므로 $b_n=2n-1$이다. 따라서

$$\sum_{n=1}^{20}b_n=\sum_{n=1}^{9}(n-1)+\sum_{n=10}^{20}(2n-1)$$
$$=-\sum_{n=1}^{9}n+\sum_{n=1}^{9}(2n-1)+\sum_{n=10}^{20}(2n-1)$$
$$=-\sum_{n=1}^{9}n+\sum_{n=1}^{20}(2n-1)=355$$

이다.

19. [출제의도] 로그함수와 수열의 문제 해결하기



세 점 A, B, C의 각각의 y좌표가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 x좌표는 등비수열을 이룬다.

따라서 세 점 A, B, C의 각각의 x좌표를 a, ar, ar^2 ($a>0$, $r>1$)이라 하자. 점 F는 선분 DE를 $9:5$로 외분하는 점이므로 $ar^2=\frac{9ar-5a}{9-5}$이다. 따라서 $r=\frac{5}{4}$이므로

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}+\overline{OF}}=\frac{\frac{5}{4}a}{a+\frac{25}{16}a}=\frac{20}{41}$$

이다. 그러므로 $p+q=61$이다.

[다른풀이1]

세 점 A, B, C의 각각의 x좌표를 각각 a, b, c라 하자. 세 점 A, B, C의 각각의 y좌표가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\log_2 a$, $\log_2 b$, $\log_2 c$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 그러므로 $2\log_2 b=\log_2 a+\log_2 c$이므로 $b^2=ac$이다. 따라서 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 공비를 r이라 하면 $b=ar$, $c=ar^2$이다.

점 F는 선분 DE를 $9:5$로 외분하는 점이므로 $ar^2=\frac{9ar-5a}{9-5}$이다. 따라서 $r=\frac{5}{4}$이므로

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}+\overline{OF}}=\frac{\frac{5}{4}a}{a+\frac{25}{16}a}=\frac{20}{41}$$

이다. 그러므로 $p+q=61$이다.

[다른풀이2]

점 F는 선분 DE를 $9:5$로 외분하는 점이므로 세 점 A, B, C의 각각의 x좌표를 각각 a, $a+4k$, $a+9k$라 하자. 세 점 A, B, C의 각각의 y좌표가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $\log_2 a$, $\log_2(a+4k)$, $\log_2(a+9k)$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. 그러므로

$2\log_2(a+4k)=\log_2 a+\log_2(a+9k)$이므로

$(a+4k)^2=a(a+9k)$이다. 따라서 $a=16k$이므로

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}+\overline{OF}}=\frac{20k}{16k+25k}=\frac{20}{41}$$

이다. 그러므로 $p+q=61$이다.

20. [출제의도] 여러 가지 수열의 규칙성 추론하기

	1열	2열	3열	4열	5열	⋯
1행	1	2	3	4	5	⋯
2행	2	4	7	11	16	⋯
3행	3	7	14	25	41	⋯
4행	4	11	25	50	91	⋯
5행	5	16	41	91	182	⋯
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

$a_1=1$

$a_2=2+2=4$

$a_3=3+4+3=10$

$a_4=4+7+7+4=22$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 다음의 수열 $\{b_n\}$을 계차수열로 가진다.

$\{b_n\}$: 3, 6, 12, ⋯

수열 $\{b_n\}$은 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열이므로 $b_n=3\cdot 2^{n-1}$이다.

$$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}3\cdot 2^{k-1}$$
$$=1+3\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1}$$
$$=3\cdot 2^{n-1}-2$$

따라서 $a_n=3\cdot 2^{n-1}-2$이다. 그러므로

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{20}=\sum_{k=1}^{20}(3\cdot 2^{k-1}-2)$$
$$=3\cdot\frac{2^{20}-1}{2-1}-40$$
$$=3\cdot 2^{20}-43$$

이다.

21. [출제의도] 역행렬이 존재하지 않는 조건 이해하기

행렬 $\begin{pmatrix} x & y \\ a & b \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$bx-ay=0$이다.

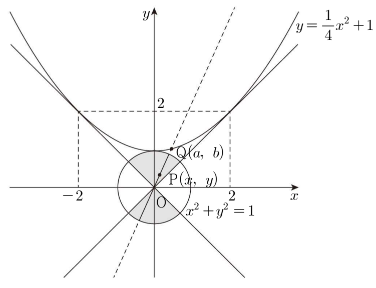
ⅰ) $a=0$일 때

$b=1$이므로 점 Q(0, 1)이고 점 P는 직선 $x=0$ ($-1<y<1$) 위에 존재한다. 그러므로 세 점 O, P, Q가 일직선 위에 있다.

ⅱ) $a\neq 0$일 때

$y=\frac{b}{a}x$이므로 세 점 O, P, Q가 일직선 위에 있다.

ⅰ), ⅱ)에 의해 점 P가 존재하는 영역은 그림에서 색칠한 부분이다.



이제 곡선 $y=\frac{1}{4}x^2+1$과 접하는 직선 $y=mx$의 기울기 m을 구하자.

$mx=\frac{1}{4}x^2+1$에서 $x^2-4mx+4=0$이고

$\frac{D}{4}=4m^2-4=0$이다.

그러므로 $m=\pm1$이므로 두 접선은 수직이다.

따라서 점 P가 존재하는 영역의 넓이

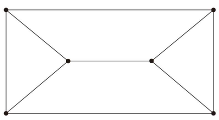
$S=\frac{1}{2}\times1^2\times\frac{\pi}{2}\times2=\frac{\pi}{2}$이다.

22. [출제의도] 등비수열 계산하기

$a_1=2$이고 공비를 r이라 두면 $a_3=2r^2=8$이다.

그러므로 $r^2=4$이다. 따라서 $a_5=2r^4=32$이다.

23. [출제의도] 그래프와 행렬 사이의 관계 이해하기



이 그래프의 변의 개수가 9이므로 행렬의 모든 성분의 합은 $9\times2=18$이다.

24. [출제의도] 여러 가지 수열 계산하기

$\sum_{k=1}^{9}\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}=\sum_{k=1}^{9}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{15}-\frac{1}{17}\right)+\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{19}\right)$

$=1-\frac{1}{19}=\frac{18}{19}$

따라서 $p+q=37$이다.

25. [출제의도] 행렬의 거듭제곱 이해하기

$A=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}$

$A^2=\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\2\cdot3&1\end{pmatrix}$

$A^3=\begin{pmatrix}1&0\\6&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\9&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\3\cdot3&1\end{pmatrix}$

$\vdots$

따라서

$A^n=\begin{pmatrix}1&0\\3n&1\end{pmatrix}$

이다. 그러므로 $a_n=3n$이고 $3n>100$를 만족하는 자연수 n의 최솟값은 34이다.

26. [출제의도] 여러 가지 수열 추론하기

수열 $\{S_{2n-1}\}$은 $S_1=a_1=1$이고 공비가 2인 등비수열이므로 $S_{2n-1}=2^{n-1}$이다.

수열 $\{a_{2n-1}\}$은 $a_1=1$이고 공차가 3인 등차수열이므로

$a_{2n-1}=3n-2$이다.

$S_{14}=S_{15}-a_{15}$이므로

$a_{14}=S_{14}-S_{13}$

$=(S_{15}-a_{15})-S_{13}$

$=S_{15}-S_{13}-a_{15}$

$=(2^7-2^6)-22$

$=42$

이다.

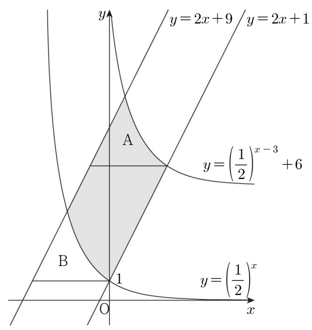
27. [출제의도] 지수함수 이해하기

$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+6$의 그래프는 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 y축의 방향으로 6만큼 평행이동한 것이다.

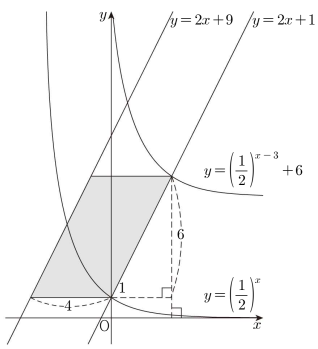
따라서 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$의 그래프 위의 점 $(0,\,1)$이 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+6$의 그래프 위의 점 $(3,\,7)$로 이동한다.

그러므로 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-3}+6$의 그래프와 직선 $y=2x+1$의 교점은 $(3,\,7)$이다.

[그림1]의 A부분과 B부분의 넓이가 서로 같으므로 구하고자 하는 도형의 넓이는 [그림2]와 같이 색칠된 평행사변형의 넓이와 같다. 따라서 구하는 도형의 넓이는 $4\times6=24$이다.



[그림1]



[그림2]

28. [출제의도] 로그방정식 이해하기

$\begin{cases}x^2=y^3\\x^y=y^x\end{cases}$

두 식의 양변에 상용로그를 취하면

$2\log x=3\log y$ ……㉠

$y\log x=x\log y$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\frac{2\log x}{y\log x}=\frac{3\log y}{x\log y}$

따라서 $\frac{2}{y}=\frac{3}{x}$이므로

$2x=3y$

이다. 이 식을 $x^2=y^3$에 대입하면

$x^2=\left(\frac{2}{3}x\right)^3$

$x^2=\frac{8}{27}x^3$

이다. 따라서 $x=\frac{27}{8}$이고 $2x=3y$에 대입하면 $y=\frac{9}{4}$

이다. 그러므로 $16(\alpha+\beta)=90$이다.

[다른풀이]

$x^2=y^3$에서 $y=x^{\frac{2}{3}}$

이 식을 $x^y=y^x$에 대입하여 정리하면

$x^{x^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{2}{3}x}$

이다. $x>1$이므로

$x^{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}x$

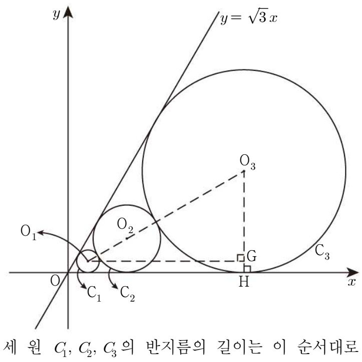
이다. 양변을 세제곱하면

$x^2=\frac{8}{27}x^3$

이다. 따라서 $x=\frac{27}{8}$이고 $y=x^{\frac{2}{3}}$에 대입하면 $y=\frac{9}{4}$

이다. 그러므로 $16(\alpha+\beta)=90$이다.

29. [출제의도] 등비수열 이해하기



세 원 $C_1,\,C_2,\,C_3$의 반지름의 길이는 이 순서대로 등비수열을 이루므로 세 원 $C_1,\,C_2,\,C_3$의 반지름의 길이를 각각 $a,\,ar,\,ar^2$이라고 하자. 원 C_1의 중심과 원 C_3의 중심 사이의 거리는 12이므로

$a+2ar+ar^2=12$ ……㉠

이다.

세 원 $C_1,\,C_2,\,C_3$의 중심을 각각 O_1, O_2, O_3라 하자. 점 O_3에서 x축에 내린 수선의 발을 H, 점 O_1에서 선분 O_3H에 내린 수선의 발을 G라고 하면 $\angle O_3O_1G=30°$이므로 $\overline{O_1O_3}=2\overline{O_3G}$이다.

따라서

$a(1+2r+r^2)=2a(r^2-1)$ ……㉡

이다.

㉡에서 $r=3$이고 이것을 ㉠에 대입하면 $a=\frac{3}{4}$이다.

따라서 세 원의 넓이의 합은

$\left(\frac{3}{4}\right)^2\pi+\left(\frac{9}{4}\right)^2\pi+\left(\frac{27}{4}\right)^2\pi=\frac{819}{16}\pi$

이다. 그러므로 $p+q=835$이다.

30. [출제의도] 수열 및 상용로그의 지표와 가수 문제 해결하기

$f(a)=n$이라 하면

$n=f(a)\le f\left(\sqrt[10]{10}\,a\right)\le f\left(\sqrt[10]{10^2}\,a\right)\le f\left(\sqrt[10]{10^3}\,a\right)\le\cdots$

$\le f\left(\sqrt[10]{10^9}\,a\right)\le f\left(\sqrt[10]{10^{10}}\,a\right)=n+1$

이고 $\sum_{k=1}^{10}f\left(\sqrt[10]{10^k}\,a\right)=94$이므로

$f\left(\sqrt[10]{10}\,a\right)=f\left(\sqrt[10]{10^2}\,a\right)=f\left(\sqrt[10]{10^3}\,a\right)=\cdots=f\left(\sqrt[10]{10^6}\,a\right)=9$,

$f\left(\sqrt[10]{10^7}\,a\right)=f\left(\sqrt[10]{10^8}\,a\right)=f\left(\sqrt[10]{10^9}\,a\right)=f\left(\sqrt[10]{10^{10}}\,a\right)=10$

이다. 그러므로

$9\le\frac{1}{10}+\log a<10$ ………①

$9\le\frac{2}{10}+\log a<10$ ………②

$\vdots$

$9\le\frac{6}{10}+\log a<10$ ………⑥

$10\le\frac{7}{10}+\log a<11$ ………⑦

$\vdots$

$10\le\frac{10}{10}+\log a<11$ ………⑩

이다. 이 10개의 부등식은 ⑥, ⑦만 연립하면 충분하다. 따라서 $9.3\le\log a<9.4$이므로 $0.3\le g(a)<0.4$이고 $30\le100g(a)<40$이다. 그러므로 $M+m=39+30=69$이다.