2014학년도 7월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설(수학 영역)

수학 영역

B형 정답

1	①	2	②	3	②	4	③	5	⑤
6	③	7	④	8	①	9	②	10	②
11	⑤	12	③	13	①	14	④	15	⑤
16	①	17	⑤	18	④	19	③	20	④
21	③	22	39	23	11	24	4	25	32
26	10	27	13	28	5	29	102	30	13

B형 해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산하기

$\sqrt[4]{81}\times\sqrt{\sqrt{16}}=3\times2=6$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$A^2+AB=A(A+B)=\begin{pmatrix}2&0\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\2&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&0\\10&16\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 30

3. [출제의도] 함수의 극한값 계산하기

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+2}-2}$ 에서

분모, 분자에 $\left(\sqrt{x+2}+2\right)$를 곱하면

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x+2)(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{x-2}=16$

4. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

두 사건 A와 B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, $\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

따라서 $\mathrm{P}(A^C)=1-\mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{2}$

5. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$(1+\tan\theta)\tan2\theta$

$=(1+\tan\theta)\times\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan\theta}=3$

따라서 $\tan\theta=\dfrac{3}{5}$

6. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4a_n+3}{2-a_n}=2$ 에서 $\dfrac{4\alpha+3}{2-\alpha}=2$

$4\alpha+3=4-2\alpha$, $\alpha=\dfrac{1}{6}$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha=\dfrac{1}{6}$

7. [출제의도] 접선의 방정식 이해하기

(사각형 AQCP의 넓이)

=(삼각형 ACP의 넓이)+(삼각형 AQC의 넓이)

직선 AC의 기울기가 2이므로 사각형 AQCP의 넓이가 최대가 되려면 접선의 기울기가 2가 되는 접점을 P와 Q로 하면 된다.

$y'=3x^2-10x+4$에서 $3x^2-10x+4=2$,

$3x^2-10x+2=0$의 두 근이 점 P, Q의 x좌표이므로 두 점 P, Q의 x좌표의 곱은 $\dfrac{2}{3}$

8. [출제의도] 분수부등식을 이용하여 수학내적 문제해결하기

부등식 $\dfrac{f(x)}{f(x)-g(x)}\le0$ $(f(x)-g(x)\ne0)$의

양변에 $\{f(x)-g(x)\}^2$을 곱하면

$f(x)\{f(x)-g(x)\}\le0$

(i) $f(x)\le0$, $f(x)>g(x)$인 정수해는 존재하지 않는다.

(ii) $f(x)\ge0$, $f(x)<g(x)$인 정수해는 $x=0,1,5,6$

(i)과 (ii)에 의하여 정수 x의 개수는 4

9. [출제의도] 부분적분법을 이용하여 수학내적 문제해결하기

$\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)=x\cos x$에서

$\int\{xf(x)\}'dx=\int x\cos x\,dx$

$xf(x)=x\sin x+\cos x+C$ (단, C는 적분상수)

(가)에서 $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$이므로

$\dfrac{\pi}{2}f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{2}+C$

$\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}+C$이므로 $C=0$

$\pi f(\pi)=\pi\sin\pi+\cos\pi$에서

$f(\pi)=-\dfrac{1}{\pi}$

10. [출제의도] 중복조합 이해하기

$x\ge1$, $y\ge1$, $z\ge1$이고 $x+y+z=6$이므로

$x-1=X$, $y-1=Y$, $z-1=Z$로 치환하면

$X+Y+Z=3$인 음이 아닌 정수해

$(X,\ Y,\ Z)$의 개수와 일치하므로

${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_3=10$

11. [출제의도] 역행렬의 성질 추론하기

ㄱ. $A*O=A^2=O$이면 $A=O$ (거짓)

반례) $A=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$

ㄴ. $A*B=A*(-B)$이므로 $AB=BA$이다.

$(AB)^2=A^2B^2$ (참)

ㄷ. $A*E=A$이므로 $A^2-A-E=O$

$A^2-A-E=(A+E)(A-2E)+E=O$

$(A+E)(2E-A)=E$이므로

$(A+E)^{-1}=2E-A$ (참)

따라서 ㄴ, ㄷ

12. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기

$f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로 $f(g(x))=x$

$g(2)=\theta$라 하면 $f(\theta)=2$

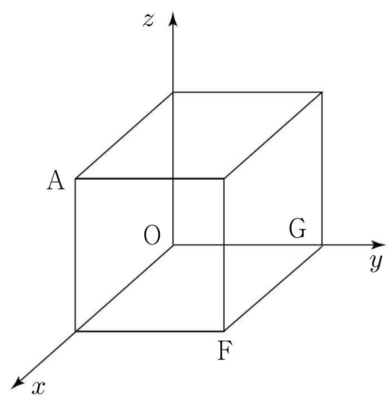
$f(\theta)=2\sin\theta+1=2$에서 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$, $g(2)=\dfrac{\pi}{6}$

따라서

$g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}=\dfrac{1}{f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)}=\dfrac{1}{2\cos\dfrac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

13. [출제의도] 좌표공간의 선분의 내분점 이해하기

점 H를 좌표공간의 원점으로 하면



점 A$(3,\ 0,\ 3)$, 점 G$(0,\ 3,\ 0)$에서

내분점 I의 좌표는 $(2,\ 1,\ 2)$

점 F$(3,\ 3,\ 0)$이므로 $\overline{\mathrm{FI}}=3$

14. [출제의도] 조건부확률 이해하기

두 점 사이의 거리가 무리수일 사건을 A라 하고 두 점 사이의 거리가 $3\sqrt{3}$일 사건을 B라 하자.

정육면체의 꼭짓점 중 서로 다른 두 점을 택하는 모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2=\dfrac{8\times7}{2}=28$

두 점 사이의 거리가 무리수인 경우의 수는 16

두 점 사이의 거리가 $3\sqrt{3}$인 경우의 수는 4

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{4}{7}$이고 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{1}{7}$이다.

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{1}{4}$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

주어진 식에 의하여

$$(n+1)a_{n+1}=2na_n+n\cdot 2^{n+1}$$

이다. $b_n=\dfrac{n}{2^n}a_n$ 이라 하면

$$b_{n+1}=b_n+\boxed{n}\quad(n\geq 1)$$

이고 $b_1=\boxed{6}$ 이므로

$$b_n=\boxed{\dfrac{n^2-n+12}{2}}\quad(n\geq 1)$$

이다. 그러므로

$$a_n=\dfrac{2^n}{n}\times\boxed{\dfrac{n^2-n+12}{2}}\quad(n\geq 1)$$

이다.

$f(n)=n$, $p=6$,

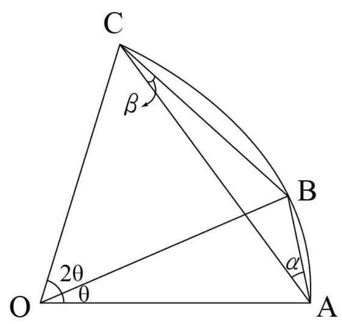
$g(n)=b_n=6+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\quad(n\geq 2)$

$g(n)=6+\dfrac{n(n-1)}{2}=\dfrac{n^2-n+12}{2}$

따라서 $f(p)+g(p)=f(6)+g(6)=6+21=27$

16. [출제의도] 삼각함수의 반각공식을 이용하여 수학내적 문제해결하기

O 를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{\mathrm{OA}}$ 인 원을 그리면



원주각과 중심각의 관계에 의하여

$\angle\mathrm{BOC}=2\theta$ 이므로 $\alpha=\theta$

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ 이므로 $\beta=\dfrac{\theta}{2}$

따라서 $\sin^2(\alpha-\beta)=\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{2}=\dfrac{1}{20}$

17. [출제의도] 일차변환의 합성 이해하기

O 를 원점이라 하고 $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ 라 하면

$\overline{\mathrm{OB}}=2\sqrt{5}$, $\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

닮음변환 f를 나타내는 행렬 $M=\begin{pmatrix}\sqrt{5} & 0\\ 0 & \sqrt{5}\end{pmatrix}$

회전변환 g를 나타내는 행렬

$$N=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\end{pmatrix}$$

따라서 합성변환 $h=f\circ g$를 나타내는 행렬

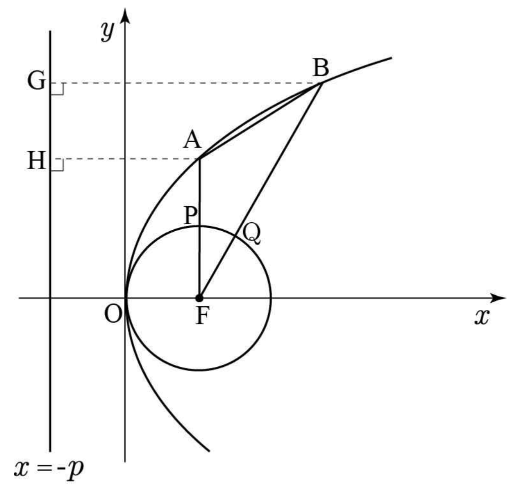
$MN=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}$

점 $\mathrm{B}(-2,\ 4)$는 일차변환 h에 의하여 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$로 옮겨지므로

$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=MN\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\ -8\end{pmatrix}$

따라서 $ab=48$

18. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기



원의 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{FP}}=p$ 이므로 $\overline{\mathrm{AP}}=p$

$\overline{\mathrm{AF}}=\overline{\mathrm{AH}}$ 이므로 점 A의 x 좌표는 p

$\overline{\mathrm{FQ}}=p$ 이므로 $\overline{\mathrm{BQ}}=\dfrac{5}{2}p$

$\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{BG}}$ 이므로 점 B의 x 좌표는 $\dfrac{5}{2}p$

삼각형 AFB의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times 2p\times\left(\dfrac{5}{2}p-p\right)=24$

따라서 $p=4$

19. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학내적 문제해결하기

C_1은 중심이 $\mathrm{O}_1(2-1,\ 0)$, 반지름의 길이가 1인 원

C_2는 중심이 $\mathrm{O}_2\left(2-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, 반지름의 길이가 $\dfrac{1}{2}$인 원

C_3은 중심이 $\mathrm{O}_3\left(2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^2,\ 0\right)$, 반지름의 길이가 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$인 원

C_n은 중심이 $\mathrm{O}_n\left(2-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1},\ 0\right)$,

반지름의 길이가 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$인 원

$\mathrm{B}(-1,\ 0)$을 지나고, 기울기가 a_n인 직선의 방정식을 $y=a_n(x+1)$이라 하자.

점 O_n부터 직선 $a_nx-y+a_n=0$까지의 거리는 원 C_n의 반지름의 길이 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$과 같다.

$$\frac{\left|a_n\left(3-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)\right|}{\sqrt{{a_n}^2+1}}=\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\sqrt{{a_n}^2+1}=2^{n-1}a_n\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\begin{aligned}{a_n}^2+1&=4^{n-1}{a_n}^2\left(3-\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2\\ &={a_n}^2(9\cdot 4^{n-1}-3\cdot 2^n+1)\end{aligned}$$

$${a_n}^2=\frac{1}{9\cdot 4^{n-1}-3\cdot 2^n}$$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{9\cdot 4^{n-1}-3\cdot 2^n}}$$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{\sqrt{9\cdot 4^{n-1}-3\cdot 2^n}}=\frac{2}{3}$

20. [출제의도] 타원의 접선의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기

초점 $\mathrm{F}(1,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-1,\ 0)$

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 접선의 방정식은

$3x_1x+4y_1y=12$

접선의 x절편은 $\dfrac{4}{x_1}$

$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 접선에 수직인 직선의 방정식은

$y-y_1=\dfrac{4y_1}{3x_1}(x-x_1)$

접선에 수직인 직선의 방정식의 x절편은 $\dfrac{x_1}{4}$

세 삼각형의 높이는 모두 같으므로 세 삼각형의 밑변의 길이가 등차수열을 이룬다.

$\overline{\mathrm{RF}}=1-\dfrac{x_1}{4}$, $\overline{\mathrm{F'R}}=\dfrac{x_1}{4}+1$, $\overline{\mathrm{FQ}}=\dfrac{4}{x_1}-1$

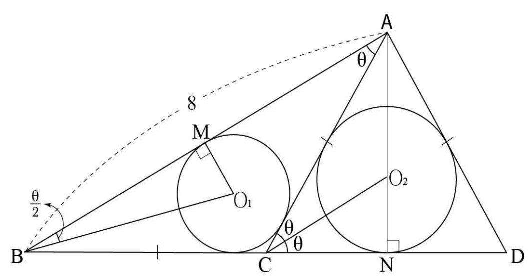
$2\left(\dfrac{x_1}{4}+1\right)=\left(1-\dfrac{x_1}{4}\right)+\left(\dfrac{4}{x_1}-1\right)$

양변에 $4x_1$을 곱하여 정리하면

$3{x_1}^2+8x_1-16=(3x_1-4)(x_1+4)=0$

따라서 $x_1=\dfrac{4}{3}$

21. [출제의도] 도형과 함수의 극한을 이용하여 수학내적 문제해결하기



삼각형 ABC에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_1, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r_2라 하자.

삼각형 $\mathrm{BO_1M}$에서 $r_1=4\tan\dfrac{\theta}{2}$

삼각형 BCM에서 $\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{4}{\cos\theta}=\overline{\mathrm{AC}}$

삼각형 ACN에서 $\overline{\mathrm{CN}}=\dfrac{4}{\cos\theta}\times\cos 2\theta$

삼각형 $\mathrm{CNO_2}$에서

$r_2=\overline{\mathrm{CN}}\tan\theta=\dfrac{4\tan\theta\cos 2\theta}{\cos\theta}$

따라서

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{r_1 r_2}{\theta^2} = \lim_{\theta \to +0} \frac{16\tan\frac{\theta}{2}\tan\theta\cos 2\theta}{\theta^2 \cos\theta} = 8$$

22. [출제의도] 등차수열 이해하기

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_6 + a_7 = (a_3 + 3d) + (a_3 + 4d)$

$= 2a_3 + 7d = 10 + 7d = 24$에서 $d = 2$

따라서 $a_{20} = a_3 + 17d = 39$

23. [출제의도] 일차변환의 성질 이해하기

일차변환을 나타내는 행렬을 A라 하면

$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$이므로

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

따라서 모든 성분의 합은 11

24. [출제의도] 무리방정식 이해하기

$t = \sqrt{x^2 + 8x + 8}$이라 하면 $t^2 + t - 6 = 0$

$t = 2\ (t \geq 0)$

그러므로 $\sqrt{x^2 + 8x + 8} = 2$

따라서 $x^2 + 8x + 4 = 0$이므로

모든 실근의 곱은 4

25. [출제의도] 로그방정식을 이용하여 수학외적 문제해결하기

주어진 조건에 의하여

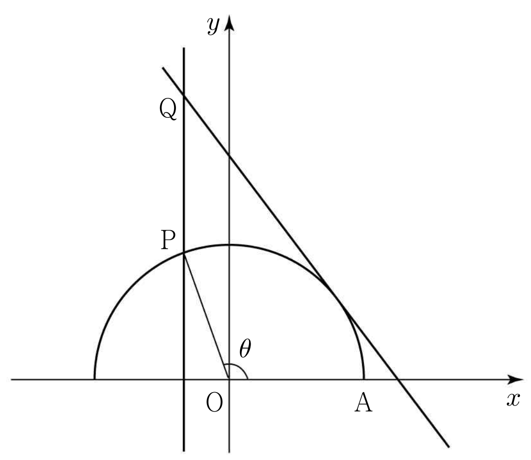
$E_1 = 300R\log_a 16$, $E_2 = 240R\log_a x$ 이고,

$E_1 = E_2$이므로 $300R\log_a 16 = 240R\log_a x$

$\frac{5}{4}\log_a 16 = \log_a 32 = \log_a x$

따라서 $x = 32$

26. [출제의도] 속도와 가속도를 이용하여 수학내적 문제해결하기



$\angle \mathrm{AOP} = \theta$라 하면 호의 길이 $l = 10\theta$

점 $\mathrm{P}(10\cos\theta,\ 10\sin\theta)$가 매초 5의 일정한 속력으로 이동하므로 양변을 시각 t에 대해 미분하면

$\frac{dl}{dt} = 10\frac{d\theta}{dt} = 5$, $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{PQ}} = L = 20 - 10\sqrt{3}\cos\theta - 10\sin\theta$

따라서 L을 시각 t에 대해 미분하면

$\frac{dL}{dt} = (10\sqrt{3}\sin\theta - 10\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$

$= 10\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

따라서 $\theta = \frac{2\pi}{3}$ 일 때, 최댓값은 10

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이용하여 수학외적 문제해결하기

펭귄 인형을 크기가 작은 것부터 a_1, a_2, a_3이라 하고 곰 인형을 크기가 작은 것부터 b_1, b_2, b_3, b_4라 하자.

(i) a_3이 b_2보다 왼쪽에 있는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!} = 4$

(ii) a_3이 b_2보다 오른쪽에 있는 경우의 수는

$\frac{3!}{2!} \times \frac{3!}{2!} = 9$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 13

28. [출제의도] 도형과 무한등비급수 추론하기

$S_1 = 2\{$(삼각형 $\mathrm{A_1B_1C_1}$의 넓이)

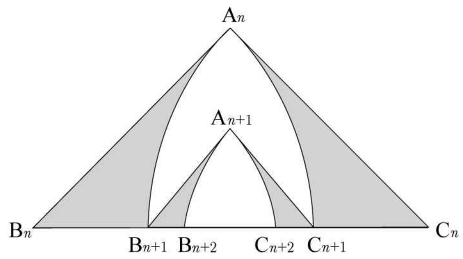
$-$(부채꼴 $\mathrm{B_1A_1C_2}$의 넓이)$\}$

$= 2\left(4 - \frac{1}{2}\cdot 8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = 2(4 - \pi)$

$S_2 = 2\{$(삼각형 $\mathrm{A_2B_2C_2}$의 넓이)

$-$(부채꼴 $\mathrm{B_2A_2C_3}$의 넓이)$\}$

$= 2(4-\pi)(\sqrt{2}-1)^2$



$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n} = 2l_n$, $\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = 2l_{n+1}$이라 하면

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}} = \sqrt{2}\,l_n$ 이고

$\frac{1}{2}\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n} + \frac{1}{2}\overline{\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}} = \overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_{n+1}}$ 이므로

$l_n + l_{n+1} = \sqrt{2}\,l_n$

$l_{n+1} = (\sqrt{2}-1)l_n$

$S_{n+1} = (\sqrt{2}-1)^2 S_n$

$$\frac{1}{4-\pi}\sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{1}{4-\pi}\cdot\frac{2(4-\pi)}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = 1 + \sqrt{2}$$

$a = 1$, $b = 2$

따라서 $a^2 + b^2 = 5$

29. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 수학내적 문제해결하기

$\int_{-3}^{3} x^2 f(x)dx$

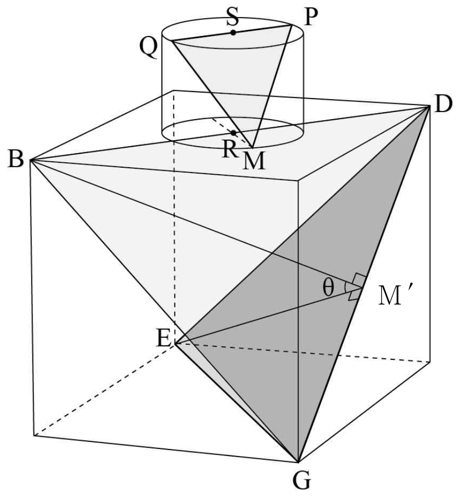
$= \int_{-3}^{-1} x^2 f(x)dx + \int_{-1}^{1} x^2 f(x)dx + \int_{1}^{3} x^2 f(x)dx$

$= 2\int_{1}^{3} x^2 f(x)dx + 2$

$= 2\int_{-1}^{1} (x+2)^2 f(x+2)dx + 2$

$= 2\int_{-1}^{1} (x+2)^2 f(x)dx + 2 = 102$

30. [출제의도] 정사영을 이용하여 수학외적 문제해결하기



원기둥의 밑면 α, β의 중심을 각각 R, S라 하자.

$\overline{\mathrm{PQ}} \mathbin{/\!/} \overline{\mathrm{DB}}$이고, $\overline{\mathrm{SM}} \mathbin{/\!/} \overline{\mathrm{EG}}$이므로 평면 MPQ와 평면 GDB는 평행하다.

삼각형 GDB와 삼각형 DEG는 모두 정삼각형이고 두 삼각형이 만나서 생기는 선분은 $\overline{\mathrm{DG}}$이다. 선분 DG의 중점을 M′이라 하고

$\theta = \angle \mathrm{BM'E}$라 하면

$\overline{\mathrm{BM'}} = \overline{\mathrm{EM'}} = 2\sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{BE}} = 4\sqrt{2}$ 이므로

삼각형 BM′E에서 코사인법칙에 의하여

$\cos\theta = \cos(\angle \mathrm{BM'E}) = \frac{24 + 24 - 32}{2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{3}$

삼각형 MPQ의 넓이 S는

$S = \frac{2\sqrt{2}\times\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3}$ 이므로

삼각형 MPQ의 평면 DEG 위로의 정사영의 넓이는

$S\cos\theta = 2\sqrt{3}\times\frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$a = 3$, $b = 2$

따라서 $a^2 + b^2 = 13$