2014학년도 9월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	③	3	②	4	③	5	②
6	③	7	⑤	8	①	9	①	10	②
11	⑤	12	④	13	①	14	④	15	②
16	③	17	④	18	④	19	⑤	20	③
21	⑤	22	9	23	12	24	16	25	4
26	10	27	13	28	200	29	18	30	360

수학 영역

해설

1. [출제의도] 서로 같은 복소수의 성질 이해하기
$2x(3+i)=6x+2xi=3y+4i$ 에서
$x=2,\ y=4$
따라서 $x+y=6$

2. [출제의도] 다항식의 덧셈과 뺄셈 계산하기
$A-2X=B$
$2X=A-B$
$=2x^3+x^2-4x+1-(x^2-4x+3)$
$=2x^3-2$
따라서 $X=x^3-1$

3. [출제의도] 곱셈 공식을 활용하여 계산하기
$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ 에서
$40=64-12ab$
따라서 $ab=2$

4. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기
ⅰ) $x\geq 2$ 일 때 $2x-4\leq 5$
$x\leq\dfrac{9}{2}$
따라서 $2\leq x\leq\dfrac{9}{2}$
ⅱ) $x<2$ 일 때 $-2x+4\leq 5$
$x\geq -\dfrac{1}{2}$
따라서 $-\dfrac{1}{2}\leq x<2$
ⅰ), ⅱ)에 의하여
$-\dfrac{1}{2}\leq x\leq\dfrac{9}{2}$ 이다.
따라서 정수 x 의 개수는 5

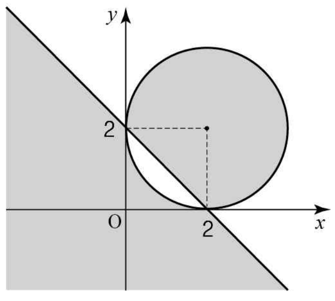
5. [출제의도] 다항식의 곱셈 계산하기
주어진 다항식을 전개하면
$a^3x^3+(6a^2+1)x^2+(12a-2)x+9$
x 의 계수가 34이므로 $12a-2=34$
따라서 $a=3$

6. [출제의도] 점의 평행이동을 활용한 수학 내적 문제 해결하기
점 $\mathrm{A}(-2,\ 1)$을 x축의 방향으로 m만큼 평행이동한 점은 $\mathrm{B}(-2+m,\ 1)$
점 $\mathrm{B}(-2+m,\ 1)$을 y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 점은 $\mathrm{C}(-2+m,\ 1+n)$
세 점 A, B, C를 지나는 원은 중심의 좌표가 $(3,\ 2)$이고 반지름의 길이가
$\sqrt{\{3-(-2)\}^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$ 이므로
$(x-3)^2+(y-2)^2=26$
점 B는 원 위의 점이므로
$(-2+m-3)^2+(1-2)^2=26$
$m=10\ (m>0)$
점 C는 원 위의 점이므로
$(-2+m-3)^2+(1+n-2)^2=26$
$n=2\ (n>0)$
따라서 $mn=20$
(다른 풀이) $\triangle\mathrm{ABC}$는 각 B가 직각이므로 변 AC가 원의 지름이고, 변 AC의 중점이 원의 중심이다.
$\left(\dfrac{-2+(-2)+m}{2},\ \dfrac{1+1+n}{2}\right)=(3,\ 2)$
$m=10,\ n=2$
따라서 $mn=20$

7. [출제의도] 사차방정식의 근 이해하기
$(x^2+x-1)(x^2+x+3)-5=0$
$(x^2+x+4)(x^2+x-2)=0$
$\alpha,\ \beta$는 $x^2+x+4=0$의 서로 다른 두 허근이므로 $\alpha\beta=4$
$\overline{\alpha}=\beta,\ \overline{\beta}=\alpha$ 이므로, $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=2\alpha\beta$
따라서 $\alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=8$

8. [출제의도] 나머지정리와 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기
(가)에서 $f(1)=1+p+q=1$
$p+q=0$ …… ㉠
(나)에서 $a-i$도 이차방정식의 근이므로
근과 계수의 관계에 의해
$p=-2a,\ q=a^2+1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $p+q=-2a+a^2+1=0$
$a=1,\ p=-2,\ q=2$
따라서 $p+2q=2$

9. [출제의도] 부등식의 영역 이해하기
부등식 $(x+y-2)(x^2+y^2-4x-4y+4)\leq 0$ 이 성립하는 경우는 다음 두 가지이다.
$y\geq -x+2,\ (x-2)^2+(y-2)^2\leq 4$ 또는
$y\leq -x+2,\ (x-2)^2+(y-2)^2\geq 4$
따라서 만족하는 영역은 그림과 같다.



(단, 경계선은 포함한다.)

10. [출제의도] 이차함수의 최댓값을 활용한 수학 외적 문제 해결하기
처음 속도가 10이고 중력가속도가 10인 지구에서의 물체의 높이 h는
$h=10t-5t^2=-5(t-1)^2+5$ 에서
$M_1=5$
처음 속도가 10이고 중력가속도가 6인 목성의 한 위성에서의 물체의 높이 h는
$h=10t-3t^2=-3\left(t-\dfrac{5}{3}\right)^2+\dfrac{25}{3}$ 에서
$M_2=\dfrac{25}{3}$
따라서 $M_2-M_1=\dfrac{10}{3}$

11. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계를 활용하여 추론하기
ㄱ. 이차함수의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만나므로 $b^2-4ac>0$ (참)
ㄴ. $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$x>0$일 때, $f(x)>0$
직선의 y절편 q가 양수이므로
$f(q)=aq^2+bq+c>0$ (참)
ㄷ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프와 직선 $y=px+q$의 교점의 x좌표는 $\alpha,\ \beta$
$ax^2+(b-p)x+c-q$
$=a(x-\alpha)(x-\beta)\leq 0$
$a>0$이므로 $\alpha\leq x\leq\beta$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

12. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계 추론하기
$\overline{\mathrm{AB}}=l$ 이므로 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{l}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{l}{2},\ 0\right)$이라 하면
$y=a\left(x+\dfrac{l}{2}\right)\left(x-\dfrac{l}{2}\right)$ (단, $a\neq 0$) …… ㉠
㉠의 그래프는 점 $\left(\dfrac{l+1}{2},\ 1\right)$을 지나므로
$1=a\left(\dfrac{l+1}{2}+\dfrac{l}{2}\right)\left(\dfrac{l+1}{2}-\dfrac{l}{2}\right)$
$1=a\left(l+\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{1}{2}$ …… ㉡
㉠의 그래프는 점 $\left(\dfrac{l+3}{2},\ 4\right)$를 지나므로
$4=a\left(\dfrac{l+3}{2}+\dfrac{l}{2}\right)\left(\dfrac{l+3}{2}-\dfrac{l}{2}\right)$
$4=a\left(l+\dfrac{3}{2}\right)\times\dfrac{3}{2}$ …… ㉢
㉡, ㉢ 에서 $4l+2=3l+\dfrac{9}{2}$
따라서 $l=\dfrac{5}{2}$

13. [출제의도] 도형의 대칭이동을 활용한 수학 내적 문제 해결하기
직선 $x-2y=9$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 $y-2x=9$가
원 $(x-3)^2+(y+5)^2=k$에 접하므로
$\dfrac{|-2\times 3+(-5)-9|}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}=\sqrt{k}$
따라서 $k=80$

14. [출제의도] 다항식의 나눗셈 계산하기

$P(x)+4x=3x^3+5x+11$ 을

$Q(x)=x^2-x+1$ 로 나누면

몫이 $3x+3$ 이고 나머지는 $5x+8$

따라서 $a=8$

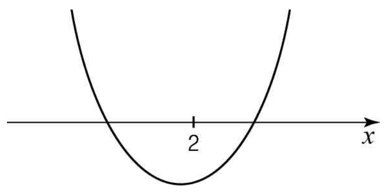
15. [출제의도] 이차함수를 활용하여 이차방정식의 근 이해하기

$P(x)-3(x+1)Q(x)+mx^2=mx^2+x+8$

이차방정식 $mx^2+x+8=0$ 의 근은 이차함수 $f(x)=mx^2+x+8$ 의 그래프가 x축과 만나는 점의 x좌표이다.

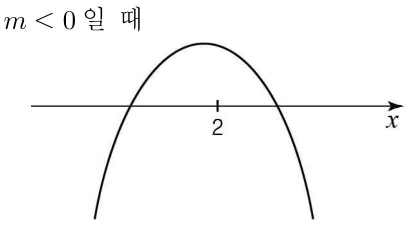
한 근이 2보다 크고 다른 한 근이 2보다 작은 경우는 다음과 같다.

i) $m>0$일 때



$f(2)=4m+10<0$ 이므로 만족하는 정수 m은 존재하지 않는다.

ii) $m<0$일 때



$f(2)=4m+10>0$ 이므로 $-\dfrac{5}{2}<m<0$

i), ii)에 의하여 $-\dfrac{5}{2}<m<0$

따라서 정수 m의 개수는 2

16. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

$x^2+4x-21\le 0$

$(x+7)(x-3)\le 0$

$-7\le x\le 3$ …… ㉠

$x^2-5kx-6k^2>0$

$(x-6k)(x+k)>0$

$k>0$이므로 $x<-k$ 또는 $x>6k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 해가 존재하기 위한 k값의 범위는 $0<k<7$ 이다.

따라서 양의 정수 k의 개수는 6

17. [출제의도] 원의 방정식을 활용한 원의 성질 추론하기

<증명>

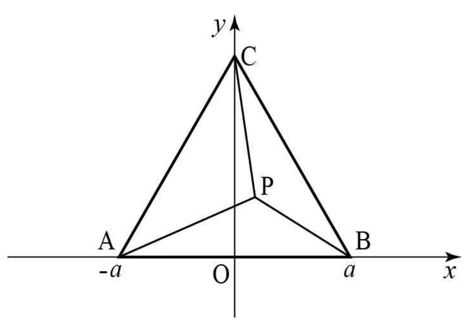
그림과 같이 변 AB를 x축 위에 놓고

변 AB의 중점을 원점 O라 하면

점 A의 좌표는 $(-a,\ 0)$,

점 B의 좌표는 $(a,\ 0)$,

점 C의 좌표는 $(0,\ \boxed{\sqrt{3}a})$이다.



정삼각형 ABC의 내부의 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=\overline{CP}^2$ 을 만족하므로

$\{(x+a)^2+y^2\}+\{(x-a)^2+y^2\}$

$=x^2+(y-\boxed{\sqrt{3}a})^2$ 이다.

위 식을 정리하면

$x^2+(y+\sqrt{3}a)^2=4a^2$

점 P는 중심이 점 $(0,\ \boxed{-\sqrt{3}a})$이고

반지름의 길이가 $\boxed{2a}$인 원 위의 점이다.

점 $(0,\ \boxed{-\sqrt{3}a})$에서 두 점 A, B까지의 거리가 각각 반지름의 길이 $\boxed{2a}$로 같다.

따라서 점 P가 호 AB 위의 점이므로

$\angle APB=150^\circ$ 이다.

$f(a)=\sqrt{3}a,\ g(a)=-\sqrt{3}a,\ h(a)=2a$

따라서 $f(3)+g(3)+h(7)=14$

18. [출제의도] 미지수가 3개인 연립일차방정식을 활용한 수학 외적 문제 해결하기

갑이 가진 1, 2, 3의 숫자가 적힌 카드의 개수를 각각 $a,\ b,\ c$라 하면, 을이 가진 1, 2, 3의 숫자가 적힌 카드의 개수는 각각 $6-a$, $5-b$, $4-c$이다.

$a+b+c=9$

(가)에서

$a+2b+3c=(6-a)+2(5-b)+3(4-c)+2$

(나)에서

$a+4b+9c=(6-a)+4(5-b)+9(4-c)-4$

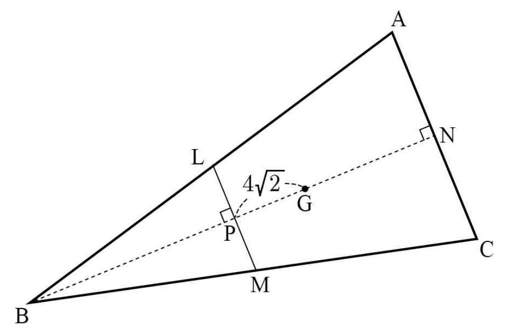
정리하면

$$\begin{cases} a+b+c=9 \\ a+2b+3c=15 \\ a+4b+9c=29 \end{cases}$$

$a=4,\ b=4,\ c=1$

따라서 갑이 가진 카드 중 숫자 2가 적힌 카드는 모두 4장

19. [출제의도] 선분의 내분점과 직선의 수직 조건을 활용한 수학 내적 문제 해결하기



직선 BN과 직선 LM의 교점을 P라 할 때 직선 BN이 선분 AC의 수직이등분선이므로 점 P는 선분 LM의 중점이다. 따라서 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{1-1}{2}\right)=(3,\ 0)$

$\triangle ABC$의 무게중심 G에 대하여

$\overline{BG}=2\overline{GN}$ 이고 $\overline{NP}=\overline{BP}$ 이므로

$(\overline{NP}+4\sqrt{2}):(\overline{NP}-4\sqrt{2})=2:1$

$\overline{NP}=12\sqrt{2}$

$\overline{NP}^2=(a-3)^2+b^2=(12\sqrt{2})^2$ …… ㉠

한편 직선 LM과 직선 NP는 서로 수직이므로

$\dfrac{b}{a-3}=1,\ b=a-3$ …… ㉡

무게중심 G가 제 1사분면에 있으므로

㉠, ㉡에서 $a=15,\ b=12$

따라서 $ab=180$

20. [출제의도] 두 직선의 위치관계 추론하기

ㄱ. $a=0$ 일 때 $l:y=2,\ m:x=-2$

두 직선 l과 m은 서로 수직이다. (참)

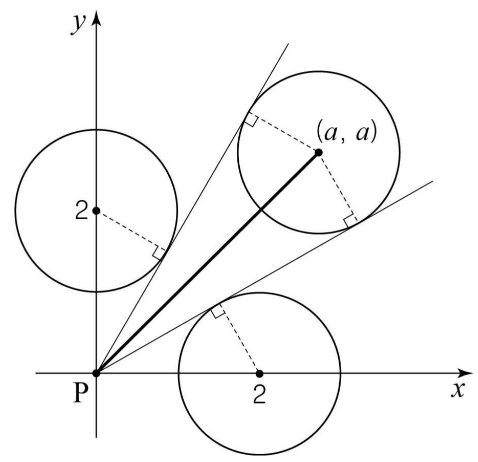
ㄴ. a에 관하여 정리하면 $a(x+1)-y+2=0$ 이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다. (거짓)

ㄷ. $a=0$일 때, ㄱ에서 두 직선은 서로 수직

$a\ne 0$일 때, 두 직선 $l,\ m$의 기울기는 각각 $a,\ -\dfrac{4}{a}$이다. $a=-\dfrac{4}{a}$를 만족하는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 평행이 되기 위한 a의 값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 활용한 수학 외적 문제 해결하기



관람지점 P를 좌표평면 위의 원점이라 하면 전시물 A의 밑면은 중심이 $(0,\ 2)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다. 또한, 전시물 B의 밑면은 중심이 $(2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이다. 두 전시물 사이로 전시물 C가 보여야 하므로 원점에서 그은 두 원의 접선 사이에 전시물 C의 밑면이 존재해야 한다. 이때, 원점에서 전시물 C의 밑면의 중심까지의 거리가 최소가 되려면 전시물 C의 밑면이 두 접선에 모두 접해야 한다.

따라서 전시물 C의 밑면은 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 접선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$, $y=\sqrt{3}x$에 모두 접하는 반지름의 길이가 1인 원이다.

중심의 좌표를 $(a,\ a)$라 할 때, 중심에서 두 접선까지의 거리는 각각 반지름의 길이와 같으므로

$$\frac{|a-\sqrt{3}a|}{\sqrt{1+3}}=\frac{|\sqrt{3}a-a|}{\sqrt{3+1}}=1$$

$a=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$

원점에서 전시물 C의 밑면의 중심까지의

거리는 $\sqrt{2}a$

따라서 d의 최솟값은 $\sqrt{6}+\sqrt{2}$

22. [출제의도] 나머지정리를 활용하여 계산하기

다항식 $P(x)$가 $x+2$로 나누어떨어지려면

$P(-2)=(-2)^3-(-2)^2-k(-2)-6=0$

$2k-18=0$

따라서 $k=9$

23. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기

이차방정식의 판별식을 D라 하자.

$D=(2k)^2-4(8k-12)$

$=4(k^2-8k+12)$

$=4(k-2)(k-6)$

이차방정식이 허근을 가지려면 $D<0$

$2<k<6$이다.

따라서 모든 정수 k의 값의 합은 12

24. [출제의도] 다항식의 연산을 활용한 수학 외적 문제 해결하기

직육면체의 부피는

$(a+b)^2(a+2b)=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$

부피가 a^3인 직육면체 : 1개

부피가 a^2b인 직육면체 : 4개

부피가 ab^2인 직육면체 : 5개

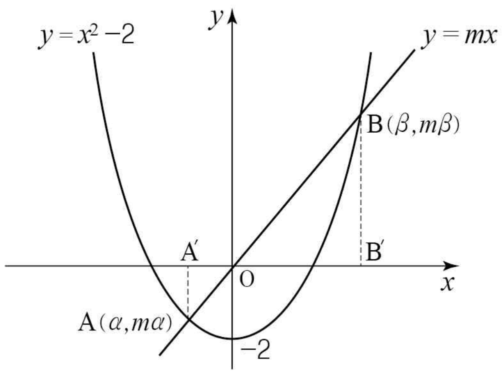
부피가 b^3인 직육면체 : 2개

$ab^2=150=6\times5^2$

서로소인 두 자연수 $a=6$, $b=5$

따라서 $a+2b=16$

25. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기



A′, B′의 x좌표를 각각 α, $\beta(\alpha<0<\beta)$라 하면 α, β가 이차방정식 $x^2-2=mx$의 두 근이므로 $\alpha+\beta=m$이다.

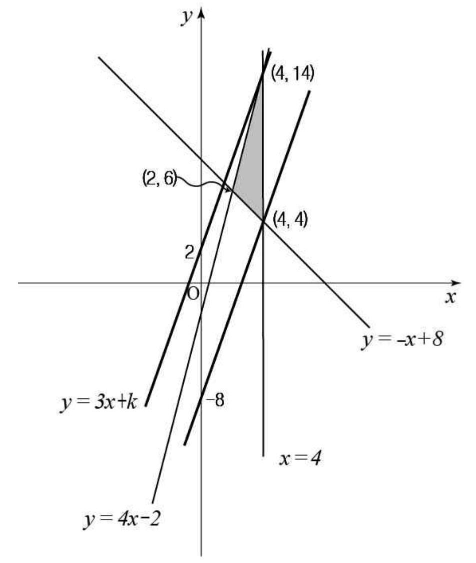
$\overline{\mathrm{AA'}}=-m\alpha$, $\overline{\mathrm{BB'}}=m\beta$이므로

$|\overline{\mathrm{AA'}}-\overline{\mathrm{BB'}}|=|-m\alpha-m\beta|$

$=|m(\alpha+\beta)|=m^2=16$

따라서 $m=4$

26. [출제의도] 부등식의 영역을 활용하여 최대·최소 추론하기



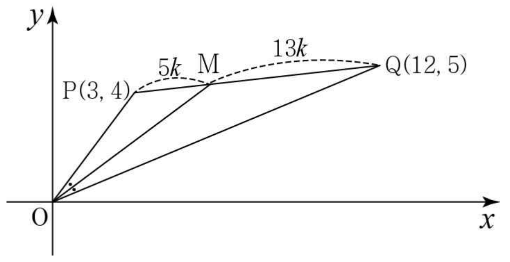
$y-3x=k$ (k는 상수)라 하면

$y=3x+k$의 그래프가 점 (4, 14)를 지날 때 k의 값은 최대이므로 $M=2$

$y=3x+k$의 그래프가 점 (4, 4)를 지날 때 k의 값은 최소이므로 $m=-8$

따라서 $M-m=10$

27. [출제의도] 선분의 내분점을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기



$\overline{\mathrm{OP}}=5$, $\overline{\mathrm{OQ}}=13$

$\angle\mathrm{POQ}$의 이등분선과 $\overline{\mathrm{PQ}}$의 교점을 M이라 하면 각의 이등분선의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{PM}}:\overline{\mathrm{MQ}}=5:13$

점 M은 선분 PQ를 $5:13$으로 내분하므로

점 M의 x좌표 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{11}{2}$

따라서 $a+b=13$

28. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 활용한 수학 내적 문제 해결하기

원의 중심의 좌표는 $(n,\ n^2)$, 반지름의 길이는 $|n|$이다. 중심에서 직선 $y=\sqrt{3}x-2$까지의 거리가 반지름의 길이와 같으므로

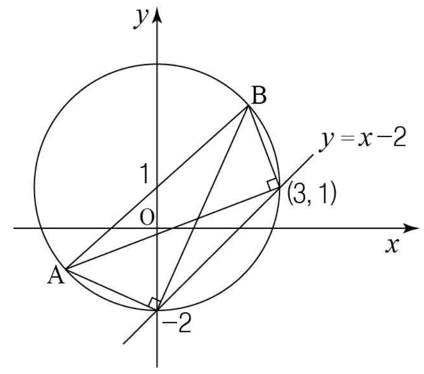
$\dfrac{|n^2-\sqrt{3}n+2|}{\sqrt{1+3}}=|n|$

$n^2-\sqrt{3}n+2=\pm2n$에서 실근을 갖는 이차방정식은 $n^2-(2+\sqrt{3})n+2=0$

두 근이 a, b이므로 $ab=2$

따라서 $100ab=200$

29. [출제의도] 원의 방정식을 활용한 수학 내적 문제 해결하기

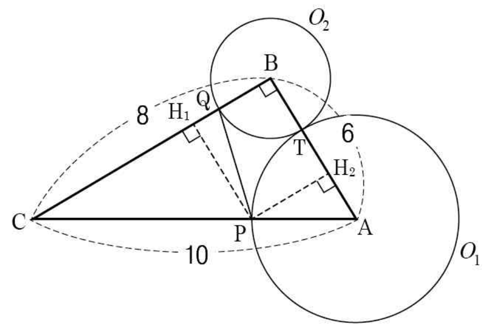


$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{AQB}=90^\circ$이므로 두 점 P, Q는 $\overline{\mathrm{AB}}$를 지름으로 하는 원 위에 있다. 이 원의 중심은 $(0,\ 1)$, 반지름의 길이는 3이므로 원의 방정식은 $x^2+(y-1)^2=9$이다.

직선 $y=x-2$와 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 교점은 $\mathrm{P}(0,\ -2)$, $\mathrm{Q}(3,\ 1)$

따라서 $l^2=18$

30. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용한 수학 내적 문제 해결하기



두 원의 접점을 T, 점 P에서 $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{AB}}$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$라 하고 원 O_1의 반지름의 길이를 r(단, $0<r<6$)라 하자.

$\triangle\mathrm{AH_2P}\sim\triangle\mathrm{ABC}$이므로 $\overline{\mathrm{PH_2}}=\dfrac{4}{5}r$

$\overline{\mathrm{BH_1}}=\overline{\mathrm{PH_2}}=\dfrac{4}{5}r$,

$\overline{\mathrm{BQ}}=\overline{\mathrm{BT}}=6-r$이므로

$\overline{\mathrm{QH_1}}=|\overline{\mathrm{BH_1}}-\overline{\mathrm{BQ}}|$

$=\left|\dfrac{4}{5}r-(6-r)\right|$

$=\left|\dfrac{9}{5}r-6\right|$ …… ㉠

$\triangle\mathrm{PH_1C}\sim\triangle\mathrm{ABC}$, $\overline{\mathrm{CP}}=10-r$ 이므로

$\overline{\mathrm{PH_1}}=\dfrac{3}{5}(10-r)$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의해

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{PH_1}}^2+\overline{\mathrm{QH_1}}^2$

$=\left\{\dfrac{3}{5}(10-r)\right\}^2+\left(\dfrac{9}{5}r-6\right)^2$

$=\dfrac{18}{5}(r^2-8r+20)$

$=\dfrac{18}{5}(r-4)^2+\dfrac{72}{5}$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2$은 $r=4$일 때 최솟값 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{72}{5}$

따라서 $ab=360$