제 2 교시

수학 영역 (B형)

5지선다형

1. $\sqrt[3]{(-8)^2}\times 9^{\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① 6 ② 9 ③ 12 ④ 18 ⑤ 24

2. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $AB-A$의 모든 성분의 합은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

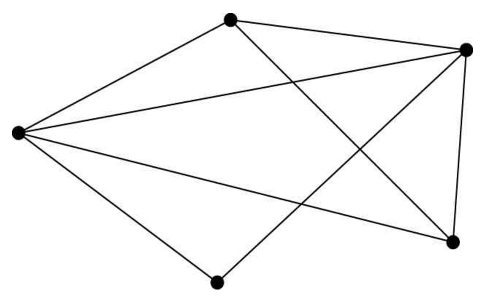
3. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+2n}{\sqrt{n^2+1}}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+a_3=6$, $a_3+a_5=26$일 때, a_3의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

5. 다음 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬의 성분 중 0의 개수는? [3점]



① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

6. 이차정사각행렬 A가 다음 조건을 만족시킬 때, 행렬 $A+2E$의 역행렬은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.) [3점]

(가) 행렬 $A-E$의 역행렬이 존재한다.
(나) $(A^2-E)(A+E)=O$

① $-A$ ② $-\frac{1}{2}A$ ③ $A-E$ ④ $\frac{1}{2}A$ ⑤ A

7. 첫째항이 10이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $\frac{a_8}{S_{10}-S_8}=\frac{4}{3}$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

8. 정의역이 $\{x \mid -1 \le x \le 2\}$인 함수 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + 3)$의 최솟값은? [3점]

① $-\log_2 7$　② $-\log_2 6$　③ $-\log_2 5$
④ -2　⑤ $-\log_2 3$

9. 첫째항이 1이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{10}{61}$　② $\frac{12}{61}$　③ $\frac{14}{61}$
④ $\frac{16}{61}$　⑤ $\frac{18}{61}$

10. 연립부등식

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}|x-5| > -3 \\ \log_3 x + \log_3(x+2) \ge 1 \end{cases}$$

를 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

① 5　② 7　③ 9　④ 11　⑤ 13

11. 어느 해상에서 태풍의 최대 풍속은 중심 기압에 따라 변한다. 태풍의 중심 기압이 P(hPa)일 때 최대 풍속 V(m/초)는 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$V = 4.86\,(1010 - P)^{0.5}$$

이 해상에서 태풍의 중심 기압이 900(hPa)과 960(hPa)일 때, 최대 풍속이 각각 V_A(m/초), V_B(m/초)이었다. $\frac{V_A}{V_B}$의 값은? (단, $\log 1.1 = 0.0414$, $\log 1.472 = 0.1679$, $\log 1.483 = 0.1712$, $\log 2 = 0.3010$으로 계산한다.) [3점]

① 1.301 ② 1.414 ③ 1.472 ④ 1.483 ⑤ 1.679

12. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+1} > a_n$
(나) $(a_n + a_{n+1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4^n$

a_{10}의 값은? [4점]

① 1021 ② 1022 ③ 1023 ④ 1024 ⑤ 1025

[13~14] 두 곡선 $y=2^x$, $y=4^x$이 직선 $x=k$와 만나는 점을 각각 A와 B, 직선 $y=m\,(0<m<1)$과 만나는 점을 각각 C와 D라 하자. 13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

13. $k=\log_2 3$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$일 때, m의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2^4}$ ② $\frac{1}{2^6}$ ③ $\frac{1}{2^8}$ ④ $\frac{1}{2^{10}}$ ⑤ $\frac{1}{2^{12}}$

14. k가 자연수일 때 선분 AB의 길이를 l_k라 하자. $S_n=\sum_{k=1}^{n} l_k$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^{n+1}}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

15. $1 < k < 128$ 인 실수 k에 대하여 직선 $x = k$가 두 로그함수 $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{4}} x$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB의 길이가 자연수가 되도록 하는 모든 k의 값의 곱을 M이라 할 때, $3\log_2 M$의 값은? [4점]

① 80 ② 90 ③ 100 ④ 110 ⑤ 120

16. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n-1} \le n!$ 임을 이용하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}+1}{2 \cdot k!} \le \frac{3^n - 1}{2^n} \quad \cdots\cdots (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

<증명>

(i) $n = 1$ 일 때,

(좌변)$=$ $\boxed{(가)}$ 이고 (우변)$= 1$ 이므로 ($\bigstar$)이 성립한다.

(ii) $n = m$일 때, ($\bigstar$)이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{3^{k-1}+1}{2 \cdot k!} \le \frac{3^m - 1}{2^m}$ 이다.

$n = m+1$ 일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{3^{k-1}+1}{2 \cdot k!} = \sum_{k=1}^{m} \frac{3^{k-1}+1}{2 \cdot k!} + \boxed{(나)}$$

$$\le \frac{3^m - 1}{2^m} + \boxed{(나)}$$

한편, 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n-1} \le n!$ 이 성립하므로

$$\sum_{k=1}^{m+1} \frac{3^{k-1}+1}{2 \cdot k!} \le \frac{3^m - 1}{2^m} + \boxed{(나)}$$

$$\le \frac{3^m - 1}{2^m} + \frac{3^m + 1}{\boxed{(다)}} = \frac{3^{m+1} - 1}{\boxed{(다)}}$$

이 성립한다.

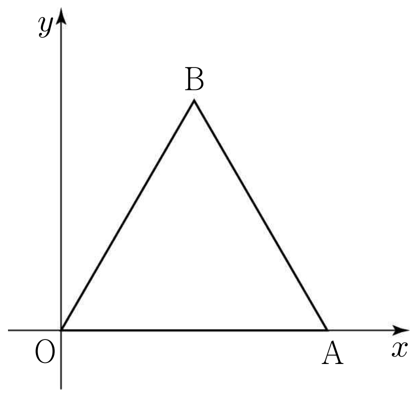
따라서 $n = m+1$ 일 때도 ($\bigstar$)이 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 ($\bigstar$)이 성립한다.

위의 증명에서 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $f(p) \times g(p)$의 값은? [4점]

① 2 ② 4 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

17. 그림과 같이 좌표평면 위에 원점 O, x축 위의 점 A, 제1사분면 위의 점 B를 세 꼭짓점으로 하는 정삼각형 OAB가 있다.



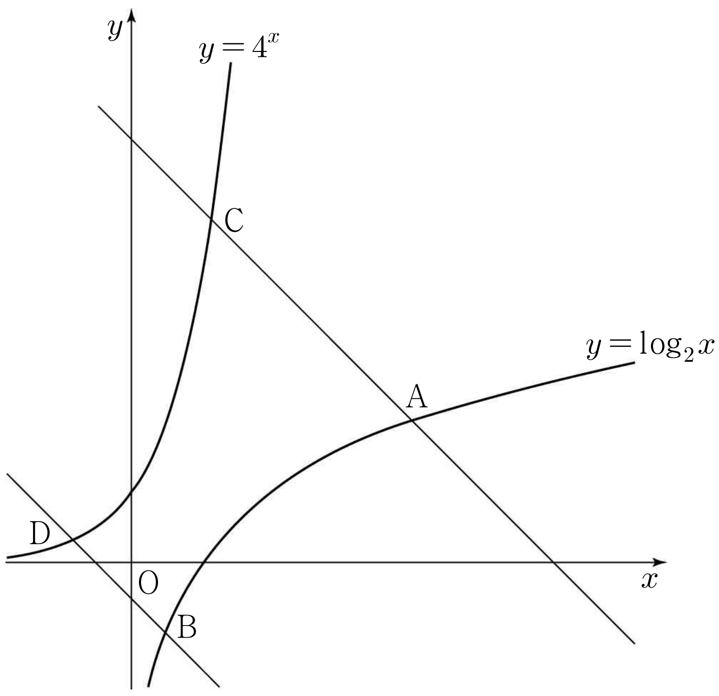
자연수 n에 대하여 정삼각형 OAB를 좌표평면에서 원점을 중심으로 시계 반대 방향으로 $\frac{n\pi}{3}$만큼 회전시킨 정삼각형과 직선 $y=nx$가 만나는 점의 개수를 a_n이라 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{100} a_n$의 값은? [4점]

① 133 ② 135 ③ 137 ④ 139 ⑤ 141

18. 부등식 $(x-4)^2+(y-1)^2 \le 4$를 만족시키는 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 대하여 행렬 A를 $A=\begin{pmatrix} 3 & y \\ 4 & x-1 \end{pmatrix}$이라 하자. 행렬 A의 역행렬이 존재하지 않을 때, 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형의 길이는? [4점]

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{6}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{15}$

19. 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 $\mathrm{A}(4,\ 2)$를 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 $\mathrm{C}(x_1,\ y_1)$이라 하고, 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 $\mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\ -1\right)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=4^x$과 만나는 점을 $\mathrm{D}(x_2,\ y_2)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]



<보 기>

ㄱ. $x_1+x_2>0$

ㄴ. $y_1y_2>1$

ㄷ. $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>\dfrac{7}{6}$

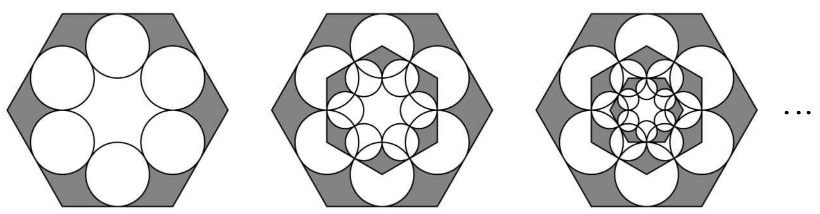
① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 한 변의 길이가 2인 정육각형 A_1이 있다. 그림과 같이 A_1의 내부에 반지름의 길이가 같은 원 6개를 서로 외접하면서 A_1의 각 변의 중점에 접하도록 그리고 A_1의 내부와 6개의 원의 외부로 이루어진 영역 중 A_1의 각 변과 원으로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에 그려진 6개의 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 A_2라 하자. 그림 R_1에 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 A_2의 내부에 반지름의 길이가 같은 원 6개를 서로 외접하면서 A_2의 각 변의 중점에 접하도록 그리고 A_2의 내부와 A_2의 내부에 그린 6개의 원의 외부로 이루어진 영역 중 A_2의 각 변과 원으로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

그림 R_2에 새로 그려진 6개의 원의 중심을 꼭짓점으로 하는 정육각형을 A_3이라 하자. 그림 R_2에 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 A_3의 내부에 반지름의 길이가 같은 원 6개를 서로 외접하면서 A_3의 각 변의 중점에 접하도록 그리고 A_3의 내부와 A_3의 내부에 그린 6개의 원의 외부로 이루어진 영역 중 A_3의 각 변과 원으로 둘러싸인 부분에 색칠하여 얻은 그림을 R_3이라 하자.

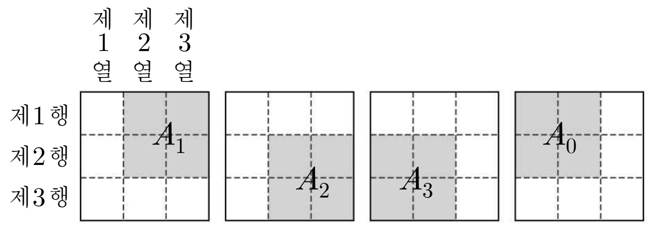
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



R_1 R_2 R_3 …

① $4\sqrt{3}-\pi$ ② $6\sqrt{3}-2\pi$ ③ $4\sqrt{3}-\frac{\pi}{2}$ ④ $6\sqrt{3}-\pi$ ⑤ $8\sqrt{3}-2\pi$

21. 3행 3열로 이루어진 바닥에 고정된 숫자판이 있다. [그림]과 같이 이 숫자판에서 이웃한 두 행과 이웃한 두 열이 교차하여 만들어지는 오른쪽 위, 오른쪽 아래, 왼쪽 아래, 왼쪽 위에 있는 두 행과 두 열의 네 칸으로 이루어진 영역을 각각 A_1, A_2, A_3, A_0이라 하자.



[그림]

0 이상의 정수 n에 대하여 숫자판 T_n을 다음과 같은 규칙에 따라 만든다.

(가) 모든 칸에 0을 써 만든 숫자판이 T_0이다.

0	0	0
0	0	0
0	0	0

T_0

(나) $n \geq 1$, $m = (n$을 4로 나눈 나머지$)$일 때, 숫자판 T_{n-1}에서 영역 A_m의 네 칸에만 각각 n을 더하여 만든 숫자판이 T_n이다.

T_1

0	1	1
0	1	1
0	0	0

T_2

0	1	1
0	3	3
0	2	2

T_3

0	1	1
3	6	3
3	5	2

T_4

4	5	1
7	10	3
3	5	2

T_5

4	10	6
7	15	8
3	5	2

…

숫자판 T_n에서 제2행에 있는 세 수를 왼쪽부터 차례대로 a_n, b_n, c_n이라 하자. 예를 들어 $a_5 = 7$, $b_5 = 15$, $c_5 = 8$이다. 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $b_8 = 36$

ㄴ. $c_{4n} = \sum_{k=1}^{n}(8k-5)$

ㄷ. $\sum_{n=1}^{10} a_{4n} = 1505$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 행렬 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$의 역행렬의 모든 성분의 곱을 구하시오. [3점]

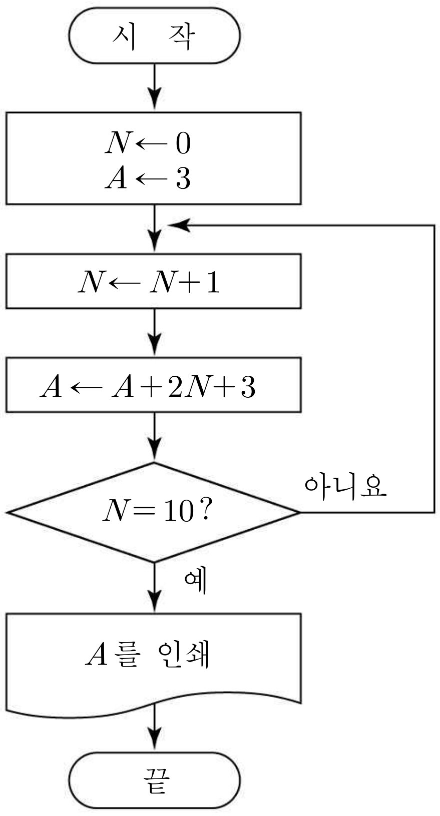
23. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = -3$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(5a_n - 2b_n)$의 값을 구하시오. [3점]

24. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{pmatrix}$에 대하여 $A^9=\begin{pmatrix}1 & a\\ 0 & b\end{pmatrix}$일 때, $a-b$의 값을 구하시오. [3점]

25. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=(n+1)^2$일 때 $\lim_{n\to\infty}\frac{10a_n}{n}$의 값을 구하시오. [3점]

26. 지수방정식 $2^x-2^{-x+2}=2\sqrt{5}$를 만족시키는 x에 대하여 $(\sqrt{2})^x$의 값을 $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$라 하자. 이때 두 자연수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

27. 다음 순서도에서 인쇄되는 A의 값을 구하시오. [4점]



28. $\log_2 65$의 소수 부분을 a, $\log_5 72$의 소수 부분을 b라 하자. 두 자연수 p와 q에 대하여 $2^{p+a} \times 5^{q+b}$의 값이 100의 배수가 될 때, $p+q$의 최솟값을 구하시오. [4점]

29. 첫째항과 공비가 모두 0이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1+m\sum_{n=2}^{\infty}a_n=0$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값을 N이라 할 때, $10N$의 값을 구하시오. [4점]

30. 1보다 큰 실수 x에 대하여 $\log x$의 지표와 가수를 각각 $f(x)$, $g(x)$라 하자. 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$f\left(\frac{10^n}{x}\right)=g\left(\frac{10^n}{x}\right)(n-1)$$

을 만족시키는 모든 x의 값의 곱을 a_n이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10}\log a_n$의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항
답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.