2014학년도 9월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

B형 정답

1	③	2	⑤	3	③	4	②	5	②
6	①	7	③	8	②	9	①	10	④
11	④	12	③	13	⑤	14	①	15	④
16	②	17	①	18	④	19	⑤	20	②
21	③	22	42	23	26	24	510	25	20
26	12	27	143	28	8	29	30	30	192

수학 영역

B형 해설

1. [출제의도] 지수법칙 이해하기

$\sqrt[3]{(-8)^2}\times 9^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{64}\times(3^2)^{\frac{1}{2}}=4\times 3=12$

2. [출제의도] 행렬 계산하기

$AB-A=A(B-E)=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&2\\-1&-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-1&3\\-1&1\end{pmatrix}$

그러므로 행렬 $AB-A$의 모든 성분의 합은 2

3. [출제의도] 수열의 극한값 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-n}+2n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{n}}+2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=3$$

4. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차중항의 성질에 의하여

$a_1+2a_3+a_5=4a_3=32$

그러므로 $a_3=8$

5. [출제의도] 그래프와 행렬의 관계 이해하기

주어진 그래프의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 행렬로 나타내면 5×5행렬이므로 행렬의 모든 성분의 개수는 25

그래프의 변의 개수가 8이므로 행렬의 성분 중 1의 개수 16

그러므로 행렬의 성분 중 0의 개수는 9

6. [출제의도] 역행렬 이해하기

$(A^2-E)(A+E)=(A-E)(A+E)^2=O$에서

$(A-E)^{-1}$이 존재하므로 $(A+E)^2=O$

$A^2+2A+E=O$

$-A(A+2E)=E$

그러므로 $A+2E$의 역행렬은 $-A$

7. [출제의도] 등비수열의 성질 이해하기

공비를 $r(r>0)$이라 하면

$S_{10}-S_8=a_{10}+a_9=a_8(r^2+r)$

따라서 $\dfrac{a_8}{S_{10}-S_8}=\dfrac{1}{r^2+r}=\dfrac{4}{3}$

$4r^2+4r=3$에서 $r=\dfrac{1}{2}$

그러므로 $a_2=5$

8. [출제의도] 로그함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$y=\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+3)=\log_{\frac{1}{2}}((x-1)^2+2)$

밑이 1보다 작은 양수이므로

정의역 $\{x\mid -1\le x\le 2\}$에서

$x=-1$일 때 최솟값은 $-\log_2 6$

9. [출제의도] 여러 가지 수열의 성질 이해하기

$a_n=3n-2$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n+1}}$

$\displaystyle=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_{2n+1}-a_{2n-1}}\left(\frac{1}{a_{2n-1}}-\frac{1}{a_{2n+1}}\right)$

$=\dfrac{1}{6}\left\{\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_3}\right)+\left(\dfrac{1}{a_3}-\dfrac{1}{a_5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{a_{19}}-\dfrac{1}{a_{21}}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{6}\times\left(1-\dfrac{1}{61}\right)=\dfrac{10}{61}$

10. [출제의도] 로그부등식 이해하기

$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}|x-5|>-3 & \cdots\cdots ㉠\\ \log_3 x+\log_3(x+2)\ge 1 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠에서 $-3<x<13,\ x\ne 5$

㉡에서 $x\ge 1$

따라서 연립부등식의 해는 $1\le x<13,\ x\ne 5$

그러므로 만족하는 모든 정수 x의 개수는 11

11. [출제의도] 로그를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$\dfrac{V_A}{V_B}=\dfrac{4.86(1010-900)^{0.5}}{4.86(1010-960)^{0.5}}=\left(\dfrac{110}{50}\right)^{0.5}=\sqrt{2.2}$

$\log\dfrac{V_A}{V_B}=\log\sqrt{2.2}=\dfrac{1}{2}(\log 1.1+\log 2)$

$=0.1712=\log 1.483$

그러므로 $\dfrac{V_A}{V_B}=1.483$

12. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 이해하기

$(a_n+a_{n+1})^2=4a_na_{n+1}+4^n$에서

$(a_{n+1}-a_n)^2=4^n$

$a_{n+1}>a_n$이므로 $a_{n+1}-a_n=2^n$

그러므로 $a_{10}=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{9}2^k=1023$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$k=\log_2 3$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=4^{\log_2 3}-2^{\log_2 3}=6$

$\overline{\mathrm{CD}}=\log_4 m-\log_2 m=-\dfrac{1}{2}\log_2 m$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CD}}$이므로 $-\dfrac{1}{2}\log_2 m=6$

그러므로 $m=\dfrac{1}{2^{12}}$

14. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$l_k=4^k-2^k$이므로

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4^k-2^k)=\frac{4^{n+1}}{3}-2^{n+1}+\frac{2}{3}$

그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{4^{n+1}}=\frac{1}{3}$

15. [출제의도] 로그함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AB}}=\log_2 k-\log_{\frac{1}{4}}k=\dfrac{3}{2}\log_2 k=n$($n$은 자연수)

따라서 $\log_2 k=\dfrac{2}{3}n$

한편, $\log_2 1<\log_2 k<\log_2 128$

즉, $0<\dfrac{2}{3}n<7$에서 $n=1,\ 2,\ \cdots,\ 10$

모든 k값의 곱을 M이라 하면

$\log_2 M=\dfrac{2}{3}(1+2+3+\cdots+10)=\dfrac{110}{3}$

그러므로 $3\log_2 M=110$

16. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 명제 추론하기

<증명>

(i) $n=1$일 때,

(좌변)= $\boxed{1}$ 이고 (우변)= 1이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, (★)이 성립한다고 가정하면

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{3^{k-1}+1}{2\cdot k!}\le\frac{3^m-1}{2^m}$이다.

$n=m+1$일 때,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{3^{k-1}+1}{2\cdot k!}=\sum_{k=1}^{m}\frac{3^{k-1}+1}{2\cdot k!}+\boxed{\frac{3^m+1}{2(m+1)!}}$

$\displaystyle\le\frac{3^m-1}{2^m}+\boxed{\frac{3^m+1}{2(m+1)!}}$

한편, 모든 자연수 n에 대하여 $2^{n-1}\le n!$이 성립하므로

$\displaystyle\sum_{k=1}^{m+1}\frac{3^{k-1}+1}{2\cdot k!}\le\frac{3^m-1}{2^m}+\boxed{\frac{3^m+1}{2(m+1)!}}$

$\displaystyle\le\frac{3^m-1}{2^m}+\frac{3^m+1}{\boxed{2^{m+1}}}=\frac{3^{m+1}-1}{\boxed{2^{m+1}}}$

이 성립한다.

따라서 $n=m+1$일 때도 (★)이 성립한다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 (★)이 성립한다.

$p=1,\ f(m)=\dfrac{3^m+1}{2(m+1)!},\ g(m)=2^{m+1}$

그러므로 $f(p)\times g(p)=f(1)\times g(1)=4$

17. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

직선 $y=nx$는 원점 O를 지나므로 정삼각형 OAB와 항상 1개 이상의 점에서 만난다.

$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=1$

$n\ge 4$일 때, $a_n=\begin{cases}1 & (n\ne 3k+1)\\ 2 & (n=3k+1)\end{cases}$($k$는 자연수)

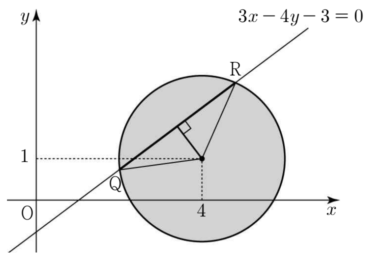
그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}a_n=1+33\times 4=133$

18. [출제의도] 역행렬을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

행렬 $\begin{pmatrix}3&y\\4&x-1\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$3x-4y-3=0$

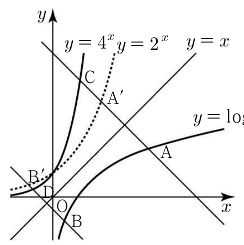
따라서 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 나타내는 도형은 그림과 같이 선분 QR이다.



원의 중심과 직선 $3x-4y-3=0$ 사이의 거리가 1이고 원의 반지름의 길이가 2이므로
$\overline{\mathrm{QR}}=2\sqrt{2^2-1}=2\sqrt{3}$

19. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 관계 추론하기

그림과 같이 두 점 A, B를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 $\mathrm{A}'(2,\ 4)$, $\mathrm{B}'\left(-1,\ \dfrac{1}{2}\right)$ 이라 하면
$1<x_1<2$, $-1<x_2<0$,
$y_1>4$, $\dfrac{1}{4}<y_2<\dfrac{1}{2}$



ㄱ. $x_1>1$이고 $x_2>-1$이므로 $x_1+x_2>0$ (참)
ㄴ. $y_1>4$이고 $y_2>\dfrac{1}{4}$ 이므로 $y_1y_2>1$ (참)
ㄷ. 두 점 C, D를 지나는 직선의 기울기가 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$이고 두 점 A′, B′을 지나는 직선의 기울기는 $\dfrac{7}{6}$이므로 $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}>\dfrac{7}{6}$ (참)

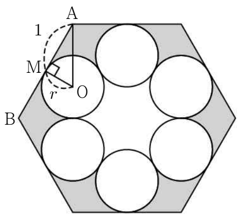
20. [출제의도] 무한급수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

A_n의 한 변의 길이를 a_n이라 할 때, A_{n+1}의 한 변의 길이 a_{n+1}은

$a_{n+1}=a_n\times\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}a_n$

따라서 $S_2-S_1=\dfrac{1}{3}S_1$,

$S_{n+2}-S_{n+1}=\dfrac{1}{3}(S_{n+1}-S_n)\ (n\geq 1)$



정육각형 A_1의 한 변 AB의 중점을 M, 점 M을 접점으로 하는 원의 중심을 O라 하자. 그림 R_1에서 각 원의 반지름을 r라 하면 $\angle\mathrm{OAM}=\dfrac{\pi}{6}$ 이므로 $r=\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$S_1=\left\{\sqrt{3}-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\pi\right\}\times\dfrac{2}{3}\times 6=4\sqrt{3}-\dfrac{4\pi}{3}$

$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$

그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{4\sqrt{3}-\dfrac{4\pi}{3}}{1-\dfrac{1}{3}}=6\sqrt{3}-2\pi$

21. [출제의도] 여러 가지 수열의 성질 추론하기

ㄱ. $b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로 $b_8=36$ (참)
ㄴ. $c_{4n}=(1+2)+(5+6)+(9+10)+\cdots+\{(4n-3)+(4n-2)\}$
$=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(8k-5)$ (참)
ㄷ. $b_{4n}=a_{4n}+c_{4n}$이 성립하므로
$a_{4n}=b_{4n}-c_{4n}=4n^2+3n$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_{4n}=\sum_{n=1}^{10}(4n^2+3n)=1705$ (거짓)

22. [출제의도] 역행렬 계산하기

주어진 행렬의 역행렬은
$\dfrac{1}{6-7}\begin{pmatrix}3&-1\\-7&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&1\\7&-2\end{pmatrix}$
그러므로 모든 성분의 곱은 42

23. [출제의도] 무한급수의 성질 이해하기

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=4$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=-3$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(5a_n-2b_n)=5\sum_{n=1}^{\infty}a_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$
$=20+6=26$

24. [출제의도] 행렬의 연산을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$A^9=\begin{pmatrix}1&2+2^2+\cdots+2^9\\0&2^9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&a\\0&b\end{pmatrix}$이므로
$a-b=2+2^2+\cdots+2^8=2^9-2=510$
그러므로 $a-b=510$

25. [출제의도] 수열의 극한값 계산하기

$a_1=S_1=4$, $a_n=S_n-S_{n-1}=2n+1\,(n\geq 2)$

그러므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{10a_n}{n}=20$

26. [출제의도] 지수방정식의 해 구하기

$2^x-\dfrac{4}{2^x}=2\sqrt{5}$ 에서 $2^x=t\ (t>0)$라 하자.
$t^2-2\sqrt{5}\,t-4=0$ 에서 $t=3+\sqrt{5}$ 이므로
$(\sqrt{2})^x=\sqrt{2^x}=\sqrt{3+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$
그러므로 $a+b=12$

27. [출제의도] 순서도에서 인쇄되는 값 추론하기

$N=0$일 때, $A=3$
$N=1$일 때, $A=3+5$
$N=2$일 때, $A=3+5+7$
⋮ ⋮
$N=n$일 때, $A=3+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2k+3)=n^2+4n+3$
그러므로 $N=10$일 때 인쇄되는 A값은 143

28. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$a=\log_2 65-6=\log_2\dfrac{65}{64}$

$b=\log_5 72-2=\log_5\dfrac{72}{25}$

따라서 $2^{p+a}\times 5^{q+b}=2^p\times\dfrac{65}{64}\times 5^q\times\dfrac{72}{25}$
$=13\times 3^2\times 2^{p-3}\times 5^{q-1}$
$100=2^2\times 5^2$이므로 $2^{p+a}\times 5^{q+b}$의 값이 100의 배수가 되기 위해서 $p-3\geq 2$, $q-1\geq 2$
따라서 $p+q\geq 8$
그러므로 최솟값은 8

29. [출제의도] 무한등비급수의 성질 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r\neq 0)$이라 하자.
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n=-\frac{a_1}{m}$이므로 $|r|<1$ ⋯㉠
$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}a_n=\frac{a_2}{1-r}=-\frac{a_1}{m}$
$\dfrac{a_2}{a_1}=r$이므로 $m=1-\dfrac{1}{r}$
㉠에서 $\dfrac{1}{|r|}>1$이므로 $|1-m|>1$
$m<0$ 또는 $m>2$
따라서 자연수 m의 최솟값 N은 3
그러므로 $10N=30$

30. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 수학내적 문제 해결하기

2 이상의 자연수 n에 대하여
$\log\dfrac{10^n}{x}=n-\log x=n-(f(x)+g(x))$
i) $g(x)=0$일 때
$f\left(\dfrac{10^n}{x}\right)=n-f(x)$, $g\left(\dfrac{10^n}{x}\right)=0$이므로
$n-f(x)=0$
따라서 $f(x)=n$이므로 $\log x=n$
ii) $0<g(x)<1$일 때
$f\left(\dfrac{10^n}{x}\right)=n-f(x)-1$, $g\left(\dfrac{10^n}{x}\right)=1-g(x)$이므로
$n-f(x)-1=(1-g(x))(n-1)$
따라서 $f(x)=g(x)(n-1)$이므로 $\log x=ng(x)$
$0<(n-1)g(x)<n-1$
$(n-1)g(x)=1,\ 2,\ \cdots,\ n-2$
$g(x)=\dfrac{1}{n-1},\ \dfrac{2}{n-1},\ \cdots,\ \dfrac{n-2}{n-1}$
$\log x=\dfrac{n}{n-1},\ \dfrac{2n}{n-1},\ \cdots,\ \dfrac{(n-2)n}{n-1}$
i), ii)에서
$\log a_n=\dfrac{n}{n-1}+\dfrac{2n}{n-1}+\cdots+\dfrac{(n-2)n}{n-1}+n$
$=\dfrac{n}{n-1}\{1+2+\cdots+(n-1)\}$
$=\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{(n-1)n}{2}=\dfrac{n^2}{2}$
그러므로 $\displaystyle\sum_{n=2}^{10}\log a_n=\sum_{n=2}^{10}\frac{n^2}{2}=192$