2014학년도 11월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

[B 형]

1	①	**2**	②	**3**	①	**4**	⑤	**5**	④
6	②	**7**	②	**8**	③	**9**	②	**10**	④
11	⑤	**12**	③	**13**	④	**14**	①	**15**	③
16	⑤	**17**	⑤	**18**	③	**19**	④	**20**	③
21	④	**22**	25	**23**	10	**24**	21	**25**	98
26	9	**27**	12	**28**	40	**29**	38	**30**	200

1. [출제의도] 로그의 성질을 알고 계산하기

$8^{\frac{1}{3}} \times \log_3 27 = 2 \times 3 = 6$

2. [출제의도] 행렬의 덧셈과 곱셈의 뜻을 알고 계산하기

$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$이므로

$A(A+B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은 8

3. [출제의도] 다항함수의 도함수 이해하기

$f'(x)=2x+5$이므로 $f'(3)=11$

4. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 극한 이해하기

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+3x)}{e^{2x}-1}$

$=\lim_{x \to 0} \frac{2x}{e^{2x}-1} \times \frac{\ln(1+3x)}{3x} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

5. [출제의도] 지수방정식 이해하기

$2^x = t\,(t>0)$라 하면

주어진 방정식은 $2t^2-9t+4=0$

$t=\frac{1}{2}$ 또는 $t=4$

$x=-1$ 또는 $x=2$

따라서 모든 실근의 합은 1

6. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$a_1 = S_1 = 4$

$a_n = S_n - S_{n-1} = 2n+2\ \ (n \geq 2)$이므로

$a_n = 2n+2\ \ (n \geq 1)$

따라서 $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{n} = 2$

7. [출제의도] 사차부등식 이해하기

$x(x-n)^2(x-2n) < 0$

$x(x-2n) < 0,\ x \neq n$

$0 < x < n$ 또는 $n < x < 2n$

(정수의 합)$= \sum_{k=1}^{2n-1} k - n = 2n^2 - 2n = 40$

따라서 $n=5$

8. [출제의도] 삼각방정식 이해하기

$\cos 2x + 3\sin x = 2$

$1 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 2$

$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$

$0 \leq x < 2\pi$이므로

$x = \frac{\pi}{6}$ 또는 $x = \frac{\pi}{2}$ 또는 $x = \frac{5}{6}\pi$

따라서 모든 실근의 합은 $\frac{3}{2}\pi$

9. [출제의도] 무한급수의 수렴과 수열의 극한 이해하기

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - \frac{2n}{n+1}\right)$이 수렴하므로

$\lim_{n \to \infty}\left(a_n - \frac{2n}{n+1}\right) = 0$

$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n = 2$

따라서 $\lim_{n \to \infty}\left(2a_n^2 + 3a_n - 1\right) = 13$

10. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

$f(x) = -\log_2(x-2)$이고

점 B의 좌표를 $(k, \log_2 k)$라 하면

점 M의 좌표는 $\left(\frac{k+1}{2}, \frac{\log_2 k}{2}\right)$

점 M이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$\frac{\log_2 k}{2} = -\log_2\left(\frac{k+1}{2} - 2\right)\ \ (k>3)$

$\log_2 k + \log_2\left(\frac{k-3}{2}\right)^2 = 0$

$k\left(\frac{k-3}{2}\right)^2 = 1$

$k^3 - 6k^2 + 9k - 4 = 0$

$(k-1)^2(k-4) = 0$

따라서 점 B의 x좌표는 4

11. [A형 16번과 동일]

12. [A형 19번과 동일]

13. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$k \leq 0$일 때, 교점의 최대 개수는 2

$0 < k \leq \frac{1}{2}$일 때, 교점의 개수는 2

$\frac{1}{2} < k \leq 1$일 때, 교점의 개수는 1

$1 < k < \frac{5}{2}$일 때, 교점의 개수는 2

$\frac{5}{2} \leq k < 3$일 때, 교점의 개수는 3

$k \geq 3$일 때, 교점의 개수는 2

따라서 k의 최솟값은 $\frac{5}{2}$

14. [출제의도] 함수의 극한과 연속 추론하기

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면

$x=1$, $x=3$에서 연속이어야 한다.

(i) $\lim_{x \to 1+0} f(x)g(x) = 1 \times g(1)$

$\lim_{x \to 1-0} f(x)g(x) = 2 \times g(1)$

$f(1)g(1) = 2 \times g(1)$이므로

$g(1) = 0$

(ii) $\lim_{x \to 3+0} f(x)g(x) = 2 \times g(3)$

$\lim_{x \to 3-0} f(x)g(x) = 1 \times g(3)$

$f(3)g(3) = 2 \times g(3)$이므로

$g(3) = 0$

$\therefore g(x) = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

따라서 $g(2) = -1$

15. [출제의도] 분수방정식을 활용하여 문제해결하기

$\frac{8}{4x-2} = \frac{4}{4x-2} + \frac{0.7}{x} + \frac{8}{60}$

$\frac{2}{2x-1} = \frac{7}{10x} + \frac{2}{15}$

양변에 $30x(2x-1)$을 곱하여 정리하면

$8x^2 - 22x - 21 = 0$

$(2x-7)(4x+3) = 0$

따라서 $x = \frac{7}{2}\ \left(\because x > \frac{1}{2}\right)$

16. [출제의도] 여러 가지 수열을 이용하여 문제해결하기

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = a_1 - 2a_1 + 4a_1 - 8a_1 = -5a_1$

$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = -5a_1 + 8$

$a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = -5a_1 + 16$

$a_{13} + a_{14} + a_{15} + a_{16} = -5a_1 + 24$

$a_{17} + a_{18} + a_{19} + a_{20} = -5a_1 + 32$

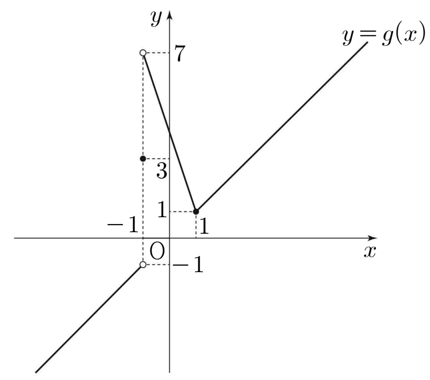
$\sum_{n=1}^{20} a_n = -25a_1 + 80 = 130$

따라서 $a_1 = -2$

17. [A형 20번과 동일]

18. [출제의도] 함수의 극한을 이용하여 추론하기

$g(x) = \begin{cases} x & (|x| > 1) \\ 3 & (x = -1) \\ -3x+4 & (|x| < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$ 이므로



(i) $f(x) = -2x+1$은 $y=g(x)$와

한 점 $(-1, 3)$에서 만나므로 $h(-2) = 1$

(ii) 함수 $h(m)$에서

$0 < m < 1$일 때, $h(m) = 2$

$\lim_{m \to 1-0} h(m) = 2$

$1 < m < 2$일 때, $h(m) = 2$

$\lim_{m \to 1+0} h(m) = 2$

$\therefore \lim_{m \to 1} h(m) = 2$

따라서 $h(-2) + \lim_{m \to 1} h(m) = 3$

19. **[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기**

선분 OP가 x축의 양의 방향과 이루는

각을 θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$라 하면

$\angle \mathrm{POR}=2\theta$, $\angle \mathrm{QOS}=\dfrac{5}{6}\pi-2\theta$이므로

(삼각형 ORP의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\sin 2\theta$,

(삼각형 OQS의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\sin\left(\dfrac{5}{6}\pi-2\theta\right)$

(넓이의 합)

$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta$$
$$=\frac{2+\sqrt{3}}{4}\sin 2\theta+\frac{1}{4}\cos 2\theta$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\sin(2\theta+\alpha)$$

(단, $\cos\alpha=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$)

$0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$이므로 $\alpha<2\theta+\alpha<\dfrac{2}{3}\pi+\alpha$이고

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$이므로 $2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$일 때,

최댓값 $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$를 갖는다.

20. **[출제의도] 함수의 미분가능성 추론하기**

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x)f(-x)=0\times(-1)=0$

$\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)f(-x)=0\times(-1)=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x)f(-x)=0$ (참)

ㄴ. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)f(-x)=0$이고 $f(-1)f(1)=0$

이므로 $x=-1$에서 연속이다. (참)

ㄷ. $f(x)=\begin{cases} x & (-1<x\le 0) \\ -x+1 & (0<x<1)\end{cases}$

$f(-x)=\begin{cases} x+1 & (-1<x<0) \\ -x & (0\le x<1)\end{cases}$이므로

$f(x)f(-x)=\begin{cases} x^2+x & (-1<x<0) \\ 0 & (x=0) \\ x^2-x & (0<x<1)\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to -0}\dfrac{f(x)f(-x)-f(0)f(0)}{x}=1$,

$\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{f(x)f(-x)-f(0)f(0)}{x}=-1$이므로

$x=0$에서 미분가능하지 않다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ

21. **[출제의도] 무한등비급수를 활용하여 문제해결하기**

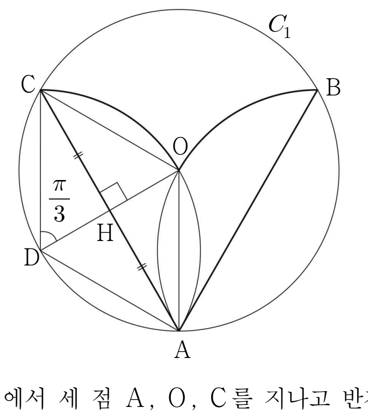


그림 R_1에서 세 점 A, O, C를 지나고 반지름의 길이가 1인 원의 중심을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{DO}}=1$이므로 점 D는 원 C_1 위에 있다. 점 D는 선분 AC의 수직이등분선과 원 C_1의 교점이므로 삼각형 OAD, OCD는 정삼각형이고, 선분 OD와 선분 AC의 교점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{HD}}=\dfrac{1}{2}$,

$\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

(모양의 도형 OHC의 넓이)

=(부채꼴 DOC의 넓이)−(삼각형 DHC의 넓이)

$=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

(삼각형 OHA의 넓이)$=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

모양의 도형 ABOC의 넓이 S_1은

$S_1=2$(모양의 도형 OHC의 넓이

+삼각형 OHA의 넓이)

$=2\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}+\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)=\dfrac{\pi}{3}$

그림 R_n에서 원 C_n의 중심을 O_n, 반지름의 길이를 r_n, 원 C_n위의 한 점을 A_n이라 하자.

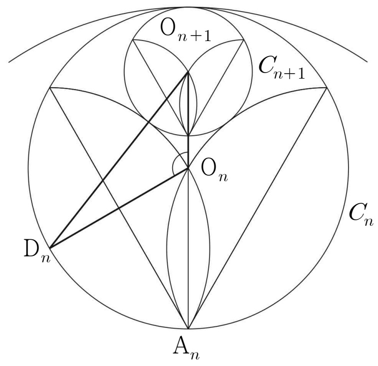


그림 R_{n+1}의 일부인 위 그림에서

두 점 O_n, A_n을 지나고 반지름의 길이가 r_n인 원의 중심을 D_n이라 하자.

삼각형 $\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}\mathrm{D}_n$에서

$\angle \mathrm{D}_n\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}=\dfrac{2}{3}\pi$, $\overline{\mathrm{O}_n\mathrm{O}_{n+1}}=r_n-r_{n+1}$,

$\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{O}_n}=r_n$, $\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{O}_{n+1}}=r_n+r_{n+1}$이므로

코사인법칙에 의해

$(r_n+r_{n+1})^2$

$=(r_n-r_{n+1})^2+r_n^{\,2}-2r_n(r_n-r_{n+1})\cos\dfrac{2}{3}\pi$

$r_{n+1}=\dfrac{2}{5}r_n$

모양의 도형의 닮음비는 원의 반지름 길이의 비와 같으므로, 수열 $\{S_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{\pi}{3}$, 공비가 $\dfrac{4}{25}$인 등비수열의 합이다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{\dfrac{\pi}{3}}{1-\dfrac{4}{25}}=\dfrac{25}{63}\pi$

22. **[출제의도] 등차수열 이해하기**

공차를 d라 하면 $a_3=a_2+d$, $a_7=a_6+d$

$2d=20-14=6$이므로 $d=3$

$a_1+d+a_1+5d=14$이므로 $a_1=-2$

따라서 $a_{10}=a_1+9d=-2+27=25$

23. **[출제의도] 무리방정식 이해하기**

$x^2+12x+13=t$라 하면 $\sqrt{t+6}=t$ $(t\ge 0)$

$t=3$ 또는 $t=-2$

$t=-2$는 무연근이므로 $x^2+12x+13=3$

$x^2+12x+10=0$

따라서 모든 실근의 곱은 10

24. **[출제의도] 미분계수의 정의 이해하기**

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+2)f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+2)\{f(x)-f(1)\}}{x-1}$$
$$=3\times f'(1)=21$$

25. **[출제의도] 연립일차방정식과 행렬 이해하기**

$\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x\\ 2y\end{pmatrix}$

$\begin{cases} x+ay=3x \\ bx-y=2y\end{cases}$

$\begin{cases} -2x+ay=0 \\ bx-3y=0\end{cases}$

$\begin{pmatrix}-2 & a\\ b & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$에서

행렬 $\begin{pmatrix}-2 & a\\ b & -3\end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않으므로

$6-ab=0$

$A^2=\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & a\\ b & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ab & 0\\ 0 & 1+ab\end{pmatrix}=7E$

$A^4=49E$

따라서 모든 성분의 합은 98

26. **[출제의도] 수열의 극한 이해하기**

점 $\mathrm{A}_n(0,\ n+1)$, 점 $\mathrm{B}_n(n+1,\ 0)$

점 $\mathrm{C}_n(3^{n+1}+n,\ n+1)$,

점 $\mathrm{D}_n(n+1,\ 3^{n+1}+n)$이므로

선분 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$을 대각선으로 하는 정사각형의 넓이 S_n은

$S_n=(3^{n+1}-1)^2$

$=3^{2n+2}-2\times 3^{n+1}+1$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{3^{2n}}=9$

27. **[출제의도] 분수부등식 이해하기**

$\dfrac{\{f(x)\}^2+2f(x)+1}{f(x)+4}\le 0$

$\{f(x)+1\}^2\{f(x)+4\}\le 0$, $f(x)\ne -4$

$f(x)=-1$ 또는 $f(x)<-4$

$f(x)=(x-4)^2-5=x^2-8x+11$

(i) $f(x)=-1$일 때, $x=2$ 또는 $x=6$

(ii) $f(x)<-4$일 때, $3<x<5$

$\therefore x=2$ 또는 $x=4$ 또는 $x=6$

따라서 모든 정수 x의 값의 합은 12

28. **[출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제 해결하기**

선분 AC의 길이를 a라 하자.

점 A가 원점, $\overline{\mathrm{AB}}$를 x축 위에 오도록 직각삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면 $\mathrm{B}(2,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ a)$이다.

세 점 $\mathrm{P}_1\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{a}{6}\right)$, $\mathrm{P}_2\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{a}{3}\right)$, $\mathrm{P}_5\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{5a}{6}\right)$

$\angle \mathrm{BAP}_1=\theta_1$, $\angle \mathrm{BAP}_2=\theta_2$라 하면

$\tan\theta_1=\dfrac{a}{10}$, $\tan\theta_2=\dfrac{a}{4}$이므로

$\tan\alpha = \tan(\theta_2 - \theta_1) = \dfrac{6a}{40+a^2}$

$\tan\beta = \dfrac{2}{5a}$

$2\tan\alpha = 3\tan\beta$에서

$\dfrac{12a}{40+a^2} = \dfrac{6}{5a}$이므로 $a^2 = \dfrac{40}{9}$, $a = \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

삼각형 ABC의 넓이 $S = \dfrac{1}{2} \times 2 \times \dfrac{2\sqrt{10}}{3}$

따라서 $9S^2 = 40$

29. [출제의도] 지표와 가수의 성질을 활용하여 추론하기

$\log a = f(a) + g(a)$ ($f(a)$는 정수, $0 \le g(a) < 1$)
$\log b = f(b) + g(b)$ ($f(b)$는 정수, $0 \le g(b) < 1$)
(가)에 의하여
$\log a - \log b = 1$이므로 $g(a) = g(b)$이다.
$\therefore f(a) - f(b) = 1$, $g(a) = g(b)$ ……㉠
(나)에서

(i) $g(a) = 0$일 때, $g\left(\dfrac{1}{a}\right) = 0$이므로

(나)를 만족한다.

(ii) $0 < g(a) < 1$일 때, $g\left(\dfrac{1}{a}\right) = 1 - g(a)$이므로

$g(a) = 4\{1 - g(a)\}$, $g(a) = \dfrac{4}{5}$

$\therefore g(a) = 0$ 또는 $g(a) = \dfrac{4}{5}$ ……㉡

(다)에 의하여 $f(a) = 3$이고 $g(b^2) = \dfrac{3}{5}$

(i) $0 \le g(b) < \dfrac{1}{2}$일 때,

$g(b^2) = 2g(b)$이므로 $g(b) = \dfrac{3}{10}$

(ii) $\dfrac{1}{2} \le g(b) < 1$일 때,

$g(b^2) = 2g(b) - 1$이므로 $g(b) = \dfrac{4}{5}$

$\therefore g(b) = \dfrac{3}{10}$ 또는 $g(b) = \dfrac{4}{5}$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢ 에서

$f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $g(a) = g(b) = \dfrac{4}{5}$

$\therefore a = 10^{\frac{19}{5}}$, $b = 10^{\frac{14}{5}}$

따라서 $ab = 10^{\frac{33}{5}}$이므로 $m + n = 38$

30. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$\angle \mathrm{CBD} = \alpha$라 하면

$\cos\alpha = \dfrac{3}{5} = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$이므로

$\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\overline{\mathrm{BP}} = a$라 하면 $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{r(\theta)}{a - r(\theta)} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$이므로

$r(\theta) = \dfrac{a}{1+\sqrt{5}}$

삼각형 PAB에서 사인법칙에 의해

$\dfrac{a}{\sin\theta} = \dfrac{4}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta + \alpha\right)}$이므로

$a = \dfrac{4\sin\theta}{\cos(\theta - \alpha)}$

$\therefore r(\theta) = \dfrac{4\sin\theta}{(1+\sqrt{5})\cos(\theta-\alpha)}$

$\lim\limits_{\theta \to +0} \dfrac{r(\theta)}{\theta}$

$= \lim\limits_{\theta \to +0} \dfrac{4}{1+\sqrt{5}} \times \dfrac{\sin\theta}{\theta} \times \dfrac{1}{\cos(\theta-\alpha)}$

$= \dfrac{5}{3}(\sqrt{5} - 1)$ $\left(\because \cos\alpha = \dfrac{3}{5}\right)$

$\therefore p = -\dfrac{5}{3}$, $q = \dfrac{5}{3}$

따라서 $36(p^2 + q^2) = 200$