2015학년도 3월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

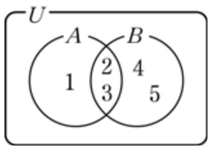
수학 나형 정답

1	②	2	⑤	3	③	4	②	5	③
6	③	7	①	8	①	9	②	10	①
11	②	12	④	13	④	14	④	15	③
16	⑤	17	①	18	②	19	⑤	20	⑤
21	④	22	12	23	17	24	60	25	90
26	15	27	107	28	380	29	46	30	127

해 설

1. [출제의도] 두 집합의 교집합을 구한다.

두 집합 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$를 벤 다이어그램으로 나타내면 아래 그림과 같다.



$\therefore\ A\cap B=\{2,3\}$

2. [출제의도] 복소수의 곱셈을 계산한다.

$i^2=-1$에서

$(1+i)(1-i)=1-i^2=1-(-1)=2$

3. [출제의도] 다항식의 곱셈을 이용하여 주어진 항의 계수를 구한다.

$(x+2y)(x^2+xy)=x^3+x^2y+2x^2y+2xy^2$

$=x^3+3x^2y+2xy^2$

따라서 x^2y의 계수는 3이다.

4. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 계산한다.

$2^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{2}{3}}$

$=2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$=2^1=2$

[다른 풀이]

$2^{\frac{1}{3}}\times4^{\frac{1}{3}}=(2\times4)^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{1}{3}}=(2^3)^{\frac{1}{3}}=2$

5. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 이용하여 조건을 만족시키는 정수의 개수를 구한다.

이차방정식 $x^2-2ax+3=0$의 판별식을 D라 하자.

이차방정식이 서로 다른 두 허근을 가지려면 $D<0$이어야 하므로

$\frac{D}{4}=a^2-3<0$

$(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})<0$

$\therefore\ -\sqrt{3}<a<\sqrt{3}$

따라서 구하는 정수는 -1, 0, 1의 3개이다.

6. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 항의 값을 구한다.

등비수열 3, 12, a에서 공비를 r라 하면

$3r=12$

$\therefore\ r=4$

$a=12r=12\times4=48$

[다른 풀이]

세 수 3, 12, a가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 12는 3과 a의 등비중항이다.

$12^2=3a$

$\therefore\ a=48$

7. [출제의도] 유리함수의 그래프에서 점근선의 방정식을 구한다.

$y=\frac{2x-3}{x-4}=\frac{2(x-4)+5}{x-4}=2+\frac{5}{x-4}$

유리함수 $y=\frac{5}{x-4}+2$의 그래프는 유리함수 $y=\frac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이다.

따라서 유리함수 $y=\frac{5}{x-4}+2$의 그래프의 점근선의 방정식은 $x=4$, $y=2$이므로 $p=4$, $q=2$

$\therefore\ p+q=6$

8. [출제의도] 합성함수의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$g(1)=\sqrt{1+3}+1=3$

$f(3)=3^2-1=8$

이므로

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=8$

9. [출제의도] 충분조건을 만족시키는 실수의 최댓값을 구한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

조건 $p:2x+4>0$에서

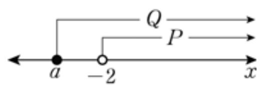
$x>-2$

$P=\{x\mid x>-2\}$

조건 $q:x\geq a$에서

$Q=\{x\mid x\geq a\}$

p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P\subset Q$이어야 한다.



$\therefore\ a\leq-2$

따라서 실수 a의 최댓값은 -2이다.

10. [출제의도] 연립방정식의 해를 구한다.

$\begin{cases}2x-y=5 & \cdots\cdots ㉠\\ x^2-2y=6 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

㉠, ㉡을 연립하면

$x^2-2(2x-5)=6$

$x^2-4x+4=0$

$(x-2)^2=0$

$\therefore\ x=2$

㉠에서

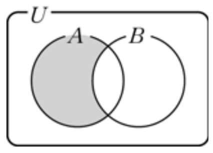
$y=-1$

따라서 $\alpha=2$, $\beta=-1$이므로 $\alpha+\beta=1$

11. [출제의도] 집합의 연산법칙을 이용하여 주어진 집합을 벤 다이어그램으로 나타낸다.

각 집합을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

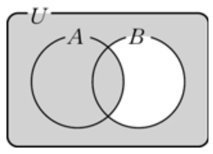
① $A\cap B^C=A-B$



② $(A\cap B)\cup B^C=(A\cup B^C)\cap(B\cup B^C)$

$=(A\cup B^C)\cap U$

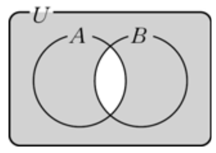
$=A\cup B^C$



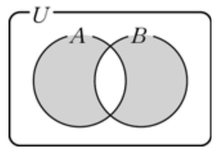
③ $(A\cap B^C)\cup A^C=(A\cup A^C)\cap(B^C\cup A^C)$

$=U\cap(A\cap B)^C$

$=(A\cap B)^C$



④ $(A\cup B)\cap(A\cap B)^C=(A\cup B)-(A\cap B)$

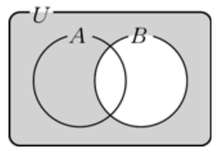


⑤ $(A-B)\cup(A^C\cap B^C)=(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B^C)$

$=(A\cup A^C)\cap B^C$

$=U\cap B^C$

$=B^C$



12. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 상수의 값을 구한다.

$P(x)=(kx^3+3)(kx^2-4)-kx$라 할 때, 다항식 $P(x)$가 $x+1$로 나누어떨어지려면 $P(-1)=0$이어야 한다.

$P(-1)=(-k+3)(k-4)+k$

$=-k^2+7k-12+k$

$=-(k^2-8k+12)$

$=-(k-2)(k-6)=0$

$\therefore\ k=2$ 또는 $k=6$

따라서 모든 실수 k의 값의 합은 8이다.

13. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선이 만나는 두 점 사이의 거리를 구한다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=4x-2$의 두 교점을 각각 $\mathrm{A}(\alpha,4\alpha-2)$, $\mathrm{B}(\beta,4\beta-2)$라 하자.

$y=x^2$, $y=4x-2$를 연립하면

$x^2=4x-2$

$x^2-4x+2=0$

이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+\{(4\beta-2)-(4\alpha-2)\}^2}$

$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+16(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{17(\beta-\alpha)^2}$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=16-8=8$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{17\times8}$

$=2\sqrt{34}$

[다른 풀이]

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=4x-2$의 두 교점을 각각 $\mathrm{A}(\alpha,\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\beta^2)$이라 하자.

$y=x^2$, $y=4x-2$를 연립하면

$x^2=4x-2$

$x^2-4x+2=0$

이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=2$

$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=16-8=8$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2}$

$=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta+\alpha)^2(\beta-\alpha)^2}$

$=\sqrt{8+16\times8}=2\sqrt{34}$

14. [출제의도] 직선의 기울기와 근과 계수의 관계를 이용하여 $\sum$의 값을 구한다.

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=nx-2$의 두 교점을 각각 $\mathrm{A}(\alpha,\alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\beta^2)$이라 하면

$a_n = \dfrac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$

$b_n = \dfrac{\beta^2}{\beta} = \beta$

$a_n + b_n = \alpha + \beta$

한편 $y=x^2$과 $y=nx-2$를 연립하면

$x^2 = nx-2$

$x^2 - nx + 2 = 0$

이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = n$

$\therefore\ a_n + b_n = n$

$$\therefore\ \sum_{n=3}^{20}(a_n+b_n) = \sum_{n=3}^{20} n = \sum_{n=1}^{20} n - (1+2) = \frac{20\times 21}{2} - (1+2) = 207$$

[다른 풀이]

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=nx-2$의 두 교점을 각각 $\mathrm{A}(\alpha,\ n\alpha-2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ n\beta-2)$라 하면

$a_n = \dfrac{n\alpha-2}{\alpha} = n - \dfrac{2}{\alpha}$

$b_n = \dfrac{n\beta-2}{\beta} = n - \dfrac{2}{\beta}$

$a_n + b_n = 2n - \left(\dfrac{2}{\alpha} + \dfrac{2}{\beta}\right) = 2n - \dfrac{2(\alpha+\beta)}{\alpha\beta}$

한편 $y=x^2$과 $y=nx-2$를 연립하면

$x^2 = nx-2$

$x^2 - nx + 2 = 0$

이차방정식의 두 근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta = n,\ \alpha\beta = 2$

$\therefore\ a_n + b_n = 2n - \dfrac{2n}{2} = n$

$$\therefore\ \sum_{n=3}^{20}(a_n+b_n) = \sum_{n=3}^{20} n = \sum_{n=1}^{20} n - (1+2) = \frac{20\times 21}{2} - (1+2) = 207$$

[참고]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점의 좌표는 $(\alpha,\ f(\alpha))$ 또는 $(\alpha,\ g(\alpha))$로 놓을 수 있다.

이때 구하고자 하는 값에 따라 적절히 점의 좌표를 선택하면 계산 과정이 간단해진다.

15. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 현의 개수를 구한다.

$x^2+y^2-10x=0$에서

$(x-5)^2+y^2=5^2$

그림과 같이 원의 중심을 C라 하고 점 A(1, 0)을 지나는 직선이 이 원과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자.

현 PQ의 길이가 최소일 때는 $\overline{\mathrm{CA}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$일 때이고 이때 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$이다.

직각삼각형 ACP에서 $\overline{\mathrm{CA}}=4$, $\overline{\mathrm{CP}}=5$이므로

$\overline{\mathrm{AP}}=3$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}} = 2\times\overline{\mathrm{AP}} = 6$

따라서 현 PQ의 길이의 최솟값은 6이다.

현 PQ의 길이가 최대일 때는 현 PQ가 지름일 때이므로 현 PQ의 길이의 최댓값은 10이다.

따라서 현의 길이가 자연수인 경우는

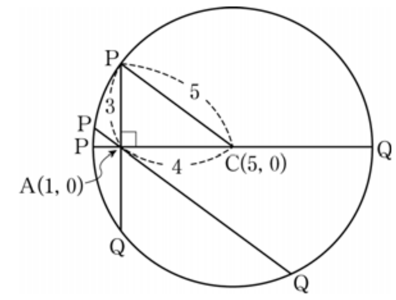
6, 7, 8, 9, 10

이다.

이때 길이가 7, 8, 9인 현은 각각 2개씩 존재하고, 길이가 6, 10인 현은 각각 1개씩 존재한다.

따라서 구하는 현의 개수는

$3\times2+2\times1=8$



16. [출제의도] 원의 방정식과 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 상수의 값의 합을 구한다.

원의 중심을 C라 하고, 두 점 A, B에서 각각 이 원에 접하는 두 직선의 교점을 D라 하자.

원의 중심과 접점을 연결한 선분은 접선에 수직이다.

또, 원 밖의 점 D와 두 접점 A, B 사이의 거리는 서로 같다.

따라서 사각형 ADBC는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.

대각선 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{\mathrm{CM}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

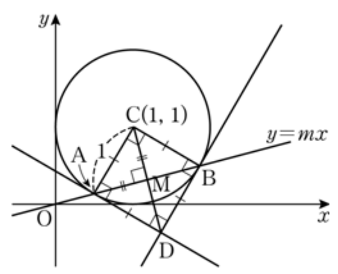
점 C와 직선 $y=mx$ 사이의 거리가 선분 CM의 길이와 같으므로

$\dfrac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$m^2-4m+1=0$

이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의해 모든 실수 m의 값의 합은 4이다.



[다른 풀이]

중심이 (1, 1)이고 반지름의 길이가 1인 원의 방정식은

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

두 점 A, B의 좌표를 각각 $(\alpha,\ m\alpha)$, $(\beta,\ m\beta)$라 하자.

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$과 $y=mx$를 연립하면

$(x-1)^2+(mx-1)^2=1$

$(1+m^2)x^2-2(1+m)x+1=0$

이차방정식의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta = \dfrac{2(1+m)}{1+m^2}$, $\alpha\beta = \dfrac{1}{1+m^2}$ …… ㉠

이 원의 중심을 C라 하고, 두 점 A, B에서 각각 이 원에 접하는 두 직선의 교점을 D라 하자.

원의 중심과 접점을 연결한 선분은 접선에 수직이다.

또, 원 밖의 점 D와 두 접점 A, B 사이의 거리는 서로 같다.

따라서 사각형 ADBC는 한 변의 길이가 1인 정사각형이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$

$\dfrac{m\alpha-1}{\alpha-1}\times\dfrac{m\beta-1}{\beta-1} = -1$

$(1+m^2)\alpha\beta-(1+m)(\alpha+\beta)+2=0$

㉠을 이 식에 대입하면

$1-\dfrac{2(1+m)^2}{1+m^2}+2=0$

$m^2-4m+1=0$

이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 근과 계수의 관계에 의해 모든 실수 m의 값의 합은 4이다.

17. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 일반항을 추론한다.

(ⅰ) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1=1$, (우변)$=1\times1=1$

따라서 ㉡이 성립한다.

(ⅱ) $n=k$일 때, ㉡이 성립한다고 가정하면

$a_k = (1+2+3+\cdots+k)\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{k}\right)$

이다.

㉠에서 $\dfrac{a_{k+1}}{k+2} = \dfrac{a_k}{k} + \dfrac{1}{2}$이므로

이 등식의 양변에 $k+2$를 곱하면

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= \boxed{\frac{k+2}{k}}\,a_k + \frac{k+2}{2}\\
&= \boxed{\frac{k+2}{k}}(1+2+3+\cdots+k)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{k+2}{2}\\
&= \frac{k+2}{k}\times\frac{k(k+1)}{2}\times\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{k+2}{2}\\
&= \boxed{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{k+2}{2}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{(k+1)(k+2)}{2(k+1)}\\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}\left\{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{k+1}\right\}\\
&= \{1+2+3+\cdots+(k+1)\}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{k+1}\right)
\end{aligned}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 ㉡이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉡이 성립한다.

$f(k)=\dfrac{k+2}{k}$, $g(k)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$이므로

$f(10)\times g(9) = \dfrac{12}{10}\times\dfrac{10\times11}{2} = 66$

18. [출제의도] 점의 대칭이동과 삼각형의 닮음을 이용하여 상수의 값을 구한다.

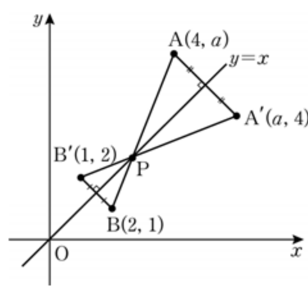
두 점 $\mathrm{A}(4,\ a)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $\mathrm{A'}(a,\ 4)$, $\mathrm{B'}(1,\ 2)$이다.

두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.

따라서 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮은 삼각형이다.

두 삼각형 APA′, BPB′의 넓이의 비가 9 : 4이므로 두 삼각형 APA′, BPB′의 닮음비는 3 : 2이다.

$\therefore\ \overline{\mathrm{AA'}} : \overline{\mathrm{BB'}} = 3:2$



$\overline{\mathrm{AA'}} = \sqrt{(a-4)^2+(4-a)^2} = \sqrt{2}(a-4)$ ($\because\ a>4$)

$\overline{\mathrm{BB'}} = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AA'}} : \overline{\mathrm{BB'}} = 3:2$에서

$\sqrt{2}(a-4) : \sqrt{2} = 3:2$

$2(a-4)=3$에서 $a=\dfrac{11}{2}$

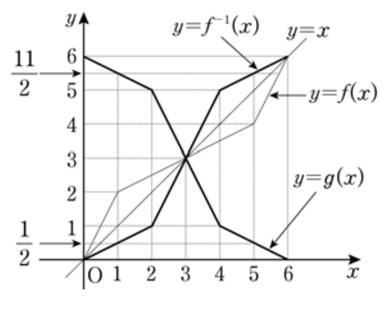
[다른 풀이1]

두 점 $\mathrm{A}(4,\ a)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $\mathrm{A'}(a,\ 4)$, $\mathrm{B'}(1,\ 2)$이다.

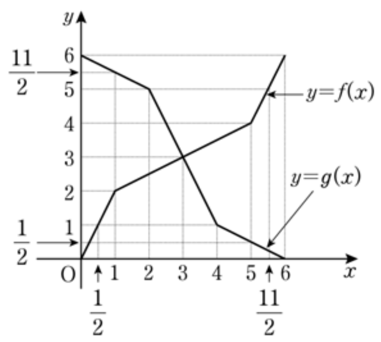
두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.
따라서 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮은 삼각형이다.
두 삼각형 APA′, BPB′의 넓이의 비가 9 : 4이므로 두 삼각형의 닮음비는 3 : 2이다.
$\therefore\ \overline{AP} : \overline{BP} = 3 : 2$
점 P는 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이므로 점 P의 좌표는
$\left(\dfrac{3\times2+2\times4}{3+2},\ \dfrac{3\times1+2\times a}{3+2}\right)$
즉 $\left(\dfrac{14}{5},\ \dfrac{2a+3}{5}\right)$
두 직선 AB, A′B′은 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 두 직선 AB, A′B′의 교점 P는 직선 $y=x$ 위의 점이다.
$\dfrac{14}{5}=\dfrac{2a+3}{5}$
$\therefore\ a=\dfrac{11}{2}$

[다른 풀이2]
두 점 $A(4, a)$, $B(2, 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 각각 $A'(a, 4)$, $B'(1, 2)$이다.
두 직선 AA′, BB′은 각각 직선 $y=x$와 서로 수직이므로 두 직선 AA′, BB′은 서로 평행하다.
따라서 두 삼각형 APA′, BPB′은 서로 닮은 삼각형이다.
점 A와 직선 $y=x$ 사이의 거리와 점 B와 직선 $y=x$ 사이의 거리의 비가 닮음비 3 : 2와 같다.
$\dfrac{|4-a|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} : \dfrac{1}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 3 : 2$
$2(a-4)=3\ (\because\ a>4)$
$\therefore\ a=\dfrac{11}{2}$

19. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 자연수의 순서쌍의 개수를 구한다.
함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 아래 그림과 같다.
$f^{-1}(1)=g(5)=\dfrac{1}{2}$
$f^{-1}(2)=g(4)=1$
$f^{-1}(3)=g(3)=3$
$f^{-1}(4)=g(2)=5$
$f^{-1}(5)=g(1)=\dfrac{11}{2}$
이므로 등식 $f^{-1}(a)=g(b)$를 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍은
$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$
의 5개다.



[다른 풀이]
등식 $f^{-1}(a)=g(b)$에서 $f(g(b))=a$이고 a가 자연수이므로 가능한 $g(b)$의 값은 $\dfrac{1}{2}$, 1, 3, 5, $\dfrac{11}{2}$, 6이다.
$g(b)=\dfrac{1}{2}$에서 $b=5$이고 $f(g(b))=1$
$g(b)=1$에서 $b=4$이고 $f(g(b))=2$
$g(b)=3$에서 $b=3$이고 $f(g(b))=3$
$g(b)=5$에서 $b=2$이고 $f(g(b))=4$
$g(b)=\dfrac{11}{2}$에서 $b=1$이고 $f(g(b))=5$
$g(b)=6$에서 $b=0$이고 $f(g(b))=6$
이므로 등식 $f(g(b))=a$를 만족시키는 두 자연수 a, b의 순서쌍은
$(1, 5)$, $(2, 4)$, $(3, 3)$, $(4, 2)$, $(5, 1)$
의 5개다.



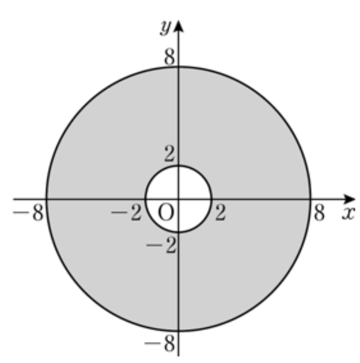
20. [출제의도] 이차함수와 항등식의 성질을 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단한다.
ㄱ. (참) $k=1$일 때
$f(x)=(x-1)^2-2$이므로 $A(1, -2)$
$\therefore\ \overline{OA}=\sqrt{1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$
ㄴ. (참) $y=k(x-1)^2-4k+2$를 k에 대하여 정리하면
$k\{(x-1)^2-4\}+2-y=0$
이 등식이 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 성립하려면
$(x-1)^2=4$, $2-y=0$
이어야 하므로
$x=3$, $y=2$ 또는 $x=-1$, $y=2$
따라서 곡선 $y=f(x)$는 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 항상 두 점 $(3, 2)$, $(-1, 2)$를 지난다.
ㄷ. (참) $A(1, -4k+2)$, $B(0, -3k+2)$이고
직선 AB의 기울기는
$\dfrac{(-4k+2)-(-3k+2)}{1-0}=-k$
따라서 직선 AB의 방정식은
$y=-kx-3k+2$
이 등식을 k에 대하여 정리하면
$k(x+3)+y-2=0$
이 등식이 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 성립하려면
$x+3=0$, $y-2=0$
이어야 하므로
$x=-3$, $y=2$
따라서 직선 AB는 0이 아닌 실수 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-3, 2)$를 지난다.
그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

21. [출제의도] 점의 대칭이동과 점과 직선 사이의 거리를 이용하여 점의 좌표를 구한다.
점 B가 곡선 $y=\dfrac{2}{x}$ 위의 점이므로
$\beta=\dfrac{2}{\alpha}$, 즉 $\alpha\beta=2$ …… ㉠
$\alpha>\sqrt{2}$이므로 $0<\beta<\sqrt{2}$, 즉 $0<\beta<\alpha$
두 점 B, C가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 $C(\beta, \alpha)$
$\therefore\ \overline{BC}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}(\alpha-\beta)\ (\because\ \alpha>\beta)$
직선 BC와 직선 $y=x$가 서로 수직이므로 직선 BC의 기울기는 -1이다. 또한 이 직선이 점 B를 지나므로 직선 BC의 방정식은
$y-\beta=-(x-\alpha)$, 즉 $x+y-(\alpha+\beta)=0$
점 A와 직선 BC 사이의 거리를 h라 하면
$h=\dfrac{|-2+2-(\alpha+\beta)|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)\ (\because\ \alpha>0,\ \beta>0)$
삼각형 ABC의 넓이가 $2\sqrt{3}$이므로
$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\times\overline{BC}\times h$
$=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{2}(\alpha-\beta)\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)$
$=\dfrac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)=2\sqrt{3}$
$\alpha^2-\beta^2=4\sqrt{3}$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$(\alpha^2+\beta^2)^2=(\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2$
$=(4\sqrt{3})^2+4\times2^2$
$=64$
$\alpha^2+\beta^2>0$이므로
$\alpha^2+\beta^2=8$

22. [출제의도] 로그의 값을 계산한다.
$\log_2 16\times\log_3 27=\log_2 2^4\times\log_3 3^3$
$=4\log_2 2\times3\log_3 3$
$=4\times3$
$=12$

23. [출제의도] 외분점의 좌표를 구한다.
두 점 $A(3, 4)$, $B(5, 7)$에 대하여 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{2\times5-1\times3}{2-1},\ \dfrac{2\times7-1\times4}{2-1}\right)$, 즉 $(7, 10)$
$\therefore\ a=7$, $b=10$
$\therefore\ a+b=17$

24. [출제의도] 부등식이 나타내는 영역의 넓이를 구한다.
부등식 $(x^2+y^2-4)(x^2+y^2-64)\le0$에서
$x^2+y^2=X(X\ge0)$로 놓으면
$(X-4)(X-64)\le0$
$4\le X\le64$
$4\le x^2+y^2\le64$ …… ㉠
좌표평면에서 부등식 ㉠이 나타내는 영역은 그림과 같이 어두운 부분이다.
따라서 구하는 넓이는
$\pi\times8^2-\pi\times2^2=60\pi$
$\therefore\ a=60$



25. [출제의도] 등차수열의 성질을 이용하여 수열의 합을 구한다.
$a_1+2a_{10}=34$ …… ㉠
$a_1-a_{10}=-14$ …… ㉡
㉠-㉡에서
$3a_{10}=48$이므로
$a_{10}=16$
$a_1=2$
따라서 구하는 수열의 합은
$\dfrac{10(a_1+a_{10})}{2}=\dfrac{10\times18}{2}$
$=90$

[다른 풀이]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
$a_1-a_{10}=-14$에서
$-9d=-14$
$\therefore\ d=\dfrac{14}{9}$

$a_1+2a_{10}=34$에서

$a+2(a+9d)=3a+18d$

$=3a+28$

$=34$

$\therefore\ a=2$

따라서 구하는 수열의 합은

$\dfrac{10\left(2\times2+9\times\frac{14}{9}\right)}{2}=\dfrac{10\times18}{2}$

$=90$

26. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 거리의 최솟값을 구한다.

직선 $y=2x+k$와 평행하고 곡선 $y=-x^2+4$에 접하는 직선의 방정식을 $y=2x+k'$이라 하자.

곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=2x+k'$의 방정식을 연립하면

$-x^2+4=2x+k'$

$x^2+2x+k'-4=0$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(k'-4)=0$

$\therefore\ k'=5$

따라서 직선 $y=2x+k$와 평행하고 곡선 $y=-x^2+4$에 접하는 직선의 방정식은 $y=2x+5$이다.

이 직선 위의 한 점 $(0,5)$와 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리가 곡선 $y=-x^2+4$ 위의 점과 직선 $y=2x+k$ 사이의 거리의 최솟값과 같으므로

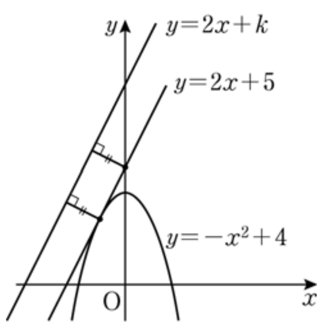
$\dfrac{|-5+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2\sqrt{5}$

$|k-5|=10$

$\therefore\ k=15$ 또는 $k=-5$

$k=-5$이면 곡선 $y=-x^2+4$와 직선 $y=2x-5$가 만나므로 조건을 만족하지 않는다.

$\therefore\ k=15$



[참고]

(1) 직선과 곡선이 만나는 경우

곡선 위의 점과 직선 사이의 거리의 최솟값은 0이다.

(2) 직선과 곡선이 만나지 않는 경우

직선 l에 평행하고 곡선 위의 한 점 P에서 접하는 직선을 m이라 하자. 곡선 위의 점과 직선 l 사이의 거리의 최솟값은 점 P와 직선 l 사이의 거리와 같다.

한편, 두 직선 l, m이 평행하면 직선 m 위의 임의의 점과 직선 l 사이의 거리는 항상 같다.

27. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

가용 대역폭이 B(Hz)로 일정하고, 수신 신호 전력이 1.2W일 때, 잡음 전력이 0.4W인 채널 용량을 C_1(bps)이라 하면

$C_1=B\log_2\left(1+\frac{1.2}{0.4}\right)=B\log_2 4=2B$

가용 대역폭이 B(Hz)로 일정하고, 수신 신호 전력이 1.2W일 때, 잡음 전력이 a(W)인 채널 용량을 C_2(bps)라 하면

$C_2=B\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)$

$C_2=3C_1$이므로

$B\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)=3\times2B$

$\log_2\left(1+\frac{1.2}{a}\right)=6$

로그의 정의에 의하여

$1+\frac{1.2}{a}=2^6$

$\frac{1.2}{a}=63$

$\therefore\ a=\frac{1.2}{63}=\frac{2}{105}$

$p=105,\ q=2$이므로

$p+q=107$

28. [출제의도] 부등식의 영역을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

이 학생이 자전거를 탄 전체 시간과 줄넘기를 한 전체 시간을 각각 x분, y분이라 하자.

(가)에서 자전거를 탄 전체 시간과 줄넘기를 한 전체 시간의 차가 10분 이하이므로

$|x-y|\le10$

$-10\le y-x\le10$

$x-10\le y\le x+10$

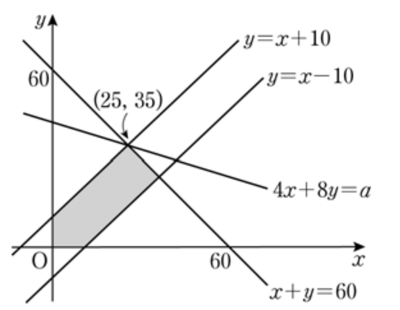
(나)에서 자전거를 탄 전체 시간과 줄넘기를 한 전체 시간의 합이 1시간 이하이므로

$x+y\le60$

따라서 연립부등식

$\begin{cases}x\ge0,\ y\ge0\\ x-10\le y\le x+10\\ x+y\le60\end{cases}$

이 나타내는 영역은 그림과 같다. (단, 경계선 포함)



이 학생이 자전거를 탄 전체 시간과 줄넘기를 한 전체 시간이 각각 x분, y분일 때의 칼로리 소모량의 합은 $4x+8y$이므로

$4x+8y=a$

직선 $4x+8y=a$가 두 직선 $x+y=60$, $y=x+10$의 교점을 지날 때, a의 값이 최대이다.

$x+y=60$, $y=x+10$을 연립하면

$x+(x+10)=60$

$\therefore\ x=25,\ y=35$

직선 $4x+8y=a$가 점 $(25,35)$를 지날 때

$a=4\times25+8\times35=380$

이므로 칼로리 소모량의 합 a의 최댓값은 380이다.

29. [출제의도] 수열의 규칙을 발견하여 조건을 만족시키는 자연수를 구한다.

집합 $A_n=\{x\,|\,(x-n)(x-2n+1)\le0\}$에서

$(x-n)(x-2n+1)\le0$

$n\le x\le2n-1$

$\therefore\ A_n=\{x\,|\,n\le x\le2n-1\}$

$25\in A_n$인 n의 값의 범위를 구하면

$n\le25\le2n-1$

$n\le25$이고 $n\ge13$에서 $13\le n\le25$

$\therefore\ a_n=\begin{cases}-1 & (1\le n\le12 \text{ 또는 } n\ge26)\\ 1 & (13\le n\le25)\end{cases}$

$\sum_{k=1}^{m}a_k=-20$에서 $m\ge26$이므로

$\sum_{k=1}^{m}a_k=\sum_{k=1}^{12}a_k+\sum_{k=13}^{25}a_k+\sum_{k=26}^{m}a_k$

$=(-1)\times12+1\times13+(-1)\times(m-25)$

$=-m+26=-20$

$\therefore\ m=46$

30. [출제의도] 집합의 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 집합의 개수를 구한다.

$50=2\times5^2$이므로 집합 B의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 5의 배수도 아니다.

(나)에서 $X\cap B=\varnothing$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수이거나 5의 배수이어야 한다.

(다)에서 $12=2^2\times3$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.

따라서 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95

이다. (가)에서 집합 X는 집합

$\{5, 25, 35, 55, 65, 85, 95\}$

의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로

집합 X의 개수는

$2^7-1=128-1$

$=127$

[다른 풀이]

집합 A를 전체집합으로 생각하자.

(가)에서 $X\subset A$이므로 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 자연수이다.

집합 A의 부분집합 중에서 2의 배수의 집합을 A_2, 3의 배수의 집합을 A_3, 5의 배수의 집합을 A_5라 하자.

(나)에서 $X\cap B=\varnothing$이고, $50=2\times5^2$이므로 집합 X의 모든 원소는 2의 배수이거나 5의 배수이다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 $A_2\cup A_5$에 속한다.

(다)에서 집합 X의 모든 원소는 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아니다.

따라서 집합 X의 모든 원소는

$A_2^C\cap A_3^C=(A_2\cup A_3)^C$

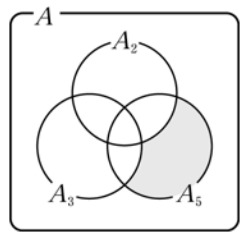
에 속한다.

(가), (나), (다)에서 집합 X의 모든 원소는

$(A_2\cup A_5)\cap(A_2\cup A_3)^C=A_5-(A_2\cup A_3)$

에 속한다.

따라서 집합 X의 모든 원소는 100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수이다.



그러므로 집합 X의 원소가 될 수 있는 수는

5, 25, 35, 55, 65, 85, 95

이다.

(가)에서 집합 X는 집합

$\{5, 25, 35, 55, 65, 85, 95\}$

의 공집합이 아닌 부분집합이어야 하므로 집합 X의 개수는

$2^7-1=128-1$

$=127$