2015학년도 6월 고2 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역[나형] •

정 답

1	②	2	③	3	②	4	⑤	5	④
6	①	7	⑤	8	⑤	9	①	10	④
11	③	12	⑤	13	③	14	①	15	②
16	②	17	④	18	①	19	③	20	①
21	②	22	14	23	18	24	34	25	120
26	10	27	12	28	105	29	193	30	125

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{8}\times 2^2=\sqrt[3]{2^3}\times 4=2\times 4=8$

2. [출제의도] 차집합 계산하기

$A-B=\{6,\ 8\}$이므로 모든 원소의 합은 14이다.

3. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2+5n-1}{2n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{4+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=2$$

4. [출제의도] 여러 가지 수열 성질 이해하기

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k+2b_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k+2\sum_{k=1}^{10}b_k=9+10=19$$

5. [출제의도] 등차수열 계산하기

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 공차를 d라 하면

$d=a_2-a_1=3$이다.

따라서 $a_5=a_1+4d=13$이다.

6. [출제의도] 명제의 대우 이용하여 문제 해결하기

주어진 명제가 참이 되기 위해서 그 명제의 대우 '$x-a=0$이면 $x^2-6x+5=0$이다.'가 참이 되어야 한다. $x=a$일 때 $a^2-6a+5=0$을 만족하는 모든 a의 값의 합은 6이다.

7. [출제의도] 역함수와 합성함수 이해하기

$(f^{-1}\circ g)(1)=f^{-1}(g(1))=f^{-1}(1)$이다.

$f^{-1}(1)=a$라 하면 $f(a)=1$이다. 따라서

$a-10=1$

이다. $\therefore a=11$

따라서 $(f^{-1}\circ g)(1)=11$이다.

8. [출제의도] 유리함수의 평행이동 이해하기

유리함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 5만큼 평행이동한 그래프는 유리함수 $y=\frac{3}{x-4}+5$의 그래프와 같다.

유리함수 $y=\frac{3}{x-4}+5$의 그래프가 점 $(5,\ a)$를 지나므로

$a=\frac{3}{5-4}+5$

이다. $\therefore a=8$

9. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-x-a}{x-2}$의 값이 존재하고

$\lim\limits_{x\to 2}(x-2)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-a)=0$이다. 따라서

$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-x-a)=4-2-a=0$

이므로 $a=2$이다. 따라서

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+1)=3$$

이므로 $b=3$이다.

따라서 $a+b=5$이다.

10. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

부등식 $\frac{2n^2-n}{3n-1}<a_n<\frac{2n^2+n}{3n-1}$에서 각 변을 $(2n+3)$으로 나누면

$$\frac{2n^2-n}{(3n-1)(2n+3)}<\frac{a_n}{2n+3}<\frac{2n^2+n}{(3n-1)(2n+3)}$$

이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{(3n-1)(2n+3)}\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}\le\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{(3n-1)(2n+3)}$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-n}{(3n-1)(2n+3)}=\frac{1}{3},\ \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n}{(3n-1)(2n+3)}=\frac{1}{3}$$

이다. 따라서

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{2n+3}=\frac{1}{3}$이다.

11. [출제의도] 로그 문제 해결하기

$\log_{(x-1)}(-x^2+4x+5)$가 정의되기 위해서는 로그의 밑의 조건과 진수의 조건을 만족해야 한다.

ⅰ) 밑의 조건에 의해

$x-1>0,\ x-1\ne 1$

$x>1,\ x\ne 2$

이다.

ⅱ) 진수의 조건에 의해

$-x^2+4x+5>0$

$x^2-4x-5<0$

$(x+1)(x-5)<0$

$-1<x<5$

이다.

ⅰ), ⅱ)에 의해 $1<x<5,\ x\ne 2$이다.

만족하는 정수 x는 $3,\ 4$이므로 합은 7이다.

12. [출제의도] 급수의 수렴조건 이해하기

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{2\times 3^{n+1}+2^n}{3^n+2^n}\right)$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{2\times 3^{n+1}+2^n}{3^n+2^n}\right)=0$이다.

$b_n=a_n-\frac{2\times 3^{n+1}+2^n}{3^n+2^n}$이라 하자. 따라서

$a_n=b_n+\frac{2\times 3^{n+1}+2^n}{3^n+2^n},\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\times 3^{n+1}+2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\times\frac{3^{n+1}}{3^n}+\frac{2^n}{3^n}}{1+\frac{2^n}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=6$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n+\frac{2\times 3^{n+1}+2^n}{3^n+2^n}\right)=0+6=6$$ 이다.

13. [출제의도] 무리함수 문제 해결하기

$\mathrm{A}_n(n,\ \sqrt{2n+2}+3)$, $\mathrm{B}_n(n,\ 0)$이므로 $n=7$을 대입하면

$\sqrt{2\times 7+2}+3=7$

이다. 따라서 $\mathrm{A}_7(7,\ 7)$, $\mathrm{B}_7(7,\ 0)$이다.

따라서 삼각형 $\mathrm{OA_7B_7}$의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 7\times 7=\frac{49}{2}$이다.

14. [출제의도] 무리함수와 수열 문제 해결하기

선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 길이가 $\sqrt{2n+2}+3$이므로

a_n은 $\sqrt{2n+2}+3$보다 크지 않은 최대의 정수이다.

ⅰ) $n=1,\ 2,\ 3$인 경우

$5\le\sqrt{2n+2}+3<6$

이므로 $a_n=5$이다.

ⅱ) $n=4,\ 5,\ 6$인 경우

$6<\sqrt{2n+2}+3<7$

이므로 $a_n=6$이다.

ⅲ) $n=7,\ 8,\ 9,\ 10$인 경우

$7\le\sqrt{2n+2}+3<8$

이므로 $a_n=7$이다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해

$\sum\limits_{n=1}^{10}a_n=5\times 3+6\times 3+7\times 4=61$이다.

15. [출제의도] 함수의 연속 이해하기

함수 $f(x)=\begin{cases}x & (x\ge 1)\\ -x & (x<1)\end{cases}$이므로

함수 $f(x)g(x)=\begin{cases}x(2x-a) & (x\ge 1)\\ -x(2x-a) & (x<1)\end{cases}$이다.

따라서 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 1-}f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이 성립해야 한다. 따라서

$1\times(2\times 1-a)=-1\times(2\times 1-a)$이다.

$\therefore a=2$

16. [출제의도] 집합과 명제 추론하기

ㄱ. $a=0$이면

$p:0\times(x-1)(x-2)<0$이 되어 이 부등식을 만족하는 실수 x는 존재하지 않으므로

$P=\varnothing$이다. $\therefore$참

ㄴ. $a>0,\ b=0$이면

조건 p의 진리집합은 $P=\{x|1<x<2\}$이고,

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x|x>0\}$이므로

$P\subset Q$이다. $\therefore$참

ㄷ. $a<0,\ b=3$이면

조건 p의 진리집합은 $P=\{x|x<1$ 또는 $x>2\}$

이므로 조건$\sim p$의 진리집합은

$P^C=\{x|1\le x\le 2\}$이다.

조건 q의 진리집합은 $Q=\{x|x>3\}$이고

$P^C\not\subset Q$이므로 명제 '$\sim p$이면 q이다.'는 거짓이다.

$\therefore$거짓

17. [출제의도] 지수법칙을 이용한 실생활 문제 해결하기

두 물체 A, B의 질량을 각각 m_A, m_B라 하고

단면적을 각각 S_A, S_B라 하자.

$m_A:m_B=1:2\sqrt{2}$, $S_A:S_B=1:8$이므로

$m_B=2\sqrt{2}m_A$, $S_B=8S_A$이다.

$$\frac{v_A^2}{v_B^2}=\frac{\frac{2m_Ag}{D\rho S_A}}{\frac{4\sqrt{2}m_Ag}{D\rho(8S_A)}}=2\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2=2^{\frac{3}{2}}$$

$$\left\{\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore\left(\frac{v_A}{v_B}\right)^3=2^{\frac{9}{4}}$$

18. [출제의도] 함수의 극한 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{OP}}=t$, $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{t^2+4}-2$, $\overline{\mathrm{PR}}=\sqrt{t^2+4}+2$이므로

$$\lim_{t\to 0+}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{PR}}}{\overline{\mathrm{OP}}^2-\overline{\mathrm{PQ}}^2}$$

$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(\sqrt{t^2+4}-2)(\sqrt{t^2+4}+2)}{t^2-(\sqrt{t^2+4}-2)^2}$$

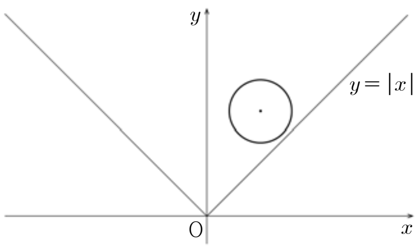
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(\sqrt{t^2+4}-2)(\sqrt{t^2+4}+2)}{4(\sqrt{t^2+4}-2)}$$

$= \lim_{t \to 0+} \frac{\sqrt{t^2+4}+2}{4} = 1$ 이다.

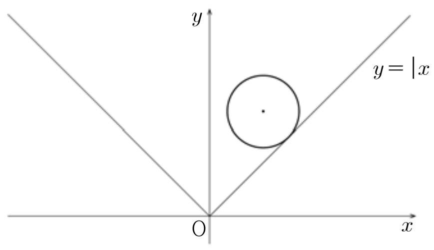
19. [출제의도] 함수의 연속 문제 해결하기

원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $x-y=0$ 사이의 거리는 $\frac{|1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 이고 원의 중심 $(1, 2)$와 직선 $x+y=0$ 사이의 거리는 $\frac{|1+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 이다. 원의 중심 $(1, 2)$와 원점 사이의 거리는 $\sqrt{5}$ 이다.

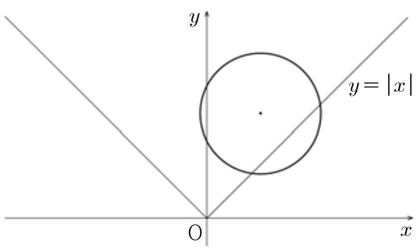
ⅰ) $0 < r < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $f(r)=0$ (그림 참고)



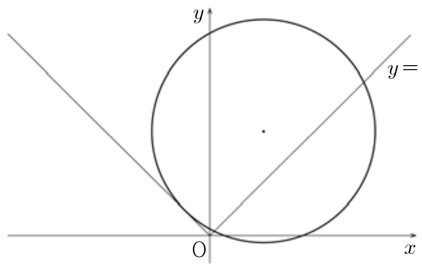
ⅱ) $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $f(r)=1$ (그림 참고)



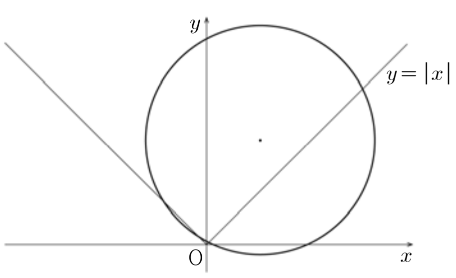
ⅲ) $\frac{\sqrt{2}}{2} < r < \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $f(r)=2$ (그림 참고)



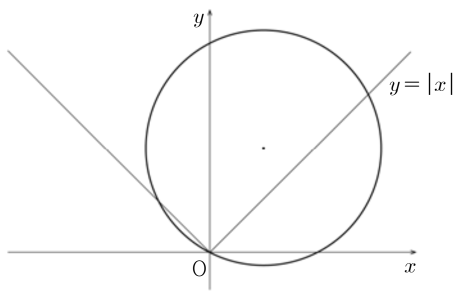
ⅳ) $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ 일 때, $f(r)=3$ (그림 참고)



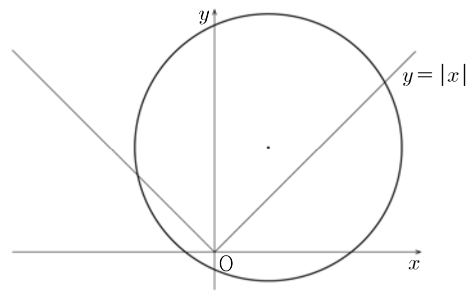
ⅴ) $\frac{3\sqrt{2}}{2} < r < \sqrt{5}$ 일 때, $f(r)=4$ (그림 참고)



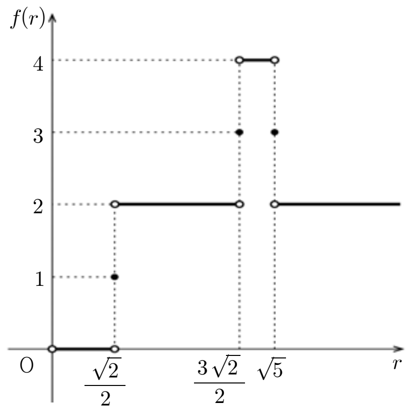
ⅵ) $r = \sqrt{5}$ 일 때, $f(r)=3$ (그림 참고)



ⅶ) $r > \sqrt{5}$ 일 때, $f(r)=2$ (그림 참고)



ⅰ)~ⅶ)에 의해 함수 $f(r)$의 그래프는



이다. 따라서 함수 $f(r)$가 $r = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{5}$ 에서 불연속이므로 불연속인 점의 개수는 3이다.

20. [출제의도] 수학적 귀납법 추론하기

(1) $n=1$ 일 때, (좌변) $=6 \times 1 \times 1^2 = 6$ 이고,
(우변) $=5 \times 1^4 + 1^2 = 6$ 이므로 $(*)$이 성립한다.

(2) $n=m$ 일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$6\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) = 5\sum_{k=1}^{m} k^4 + \sum_{k=1}^{m} k^2$$

이다.

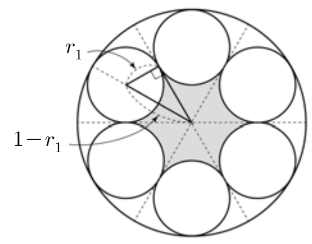
$n=m+1$ 일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$6\left(\sum_{k=1}^{m+1} k\right)\left(\sum_{k=1}^{m+1} k^2\right)$$
$$= 6\left\{\sum_{k=1}^{m} k + \left(\boxed{(m+1)}\right)\right\}\left\{\sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2\right\}$$
$$= 6\left\{\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) + (m+1)\sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2 \sum_{k=1}^{m} k + (m+1)^3\right\}$$
$$= 6\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) + \left(\boxed{(m+1)}\right) \times \left\{6\sum_{k=1}^{m} k^2 + 6(m+1)\sum_{k=1}^{m} k + 6(m+1)^2\right\}$$
$$= 6\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) + (m+1) \times \{m(m+1)(2m+1) + 3m(m+1)^2 + 6(m+1)^2\}$$
$$= 6\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) + (m+1)^2 \times \{m(2m+1) + 3m(m+1) + 6(m+1)\}$$
$$= 6\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) + (m+1)^2 \times \left(\boxed{5m^2+10m+6}\right)$$
$$= 6\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) + (m+1)^2 \times \{5(m+1)^2 + 1\}$$
$$= 6\left(\sum_{k=1}^{m} k\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k^2\right) + 5(m+1)^4 + (m+1)^2$$
$$= 5\sum_{k=1}^{m} k^4 + \sum_{k=1}^{m} k^2 + 5(m+1)^4 + (m+1)^2$$
$$= 5\sum_{k=1}^{m} k^4 + 5(m+1)^4 + \sum_{k=1}^{m} k^2 + (m+1)^2$$
$$= 5\sum_{k=1}^{m+1} k^4 + \sum_{k=1}^{m+1} k^2$$

그러므로 $n=m+1$ 일 때도 $(*)$이 성립한다.
따라서 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.
$f(m) = m+1$, $g(m) = 5m^2 + 10m + 6$ 이므로
$\frac{g(10)}{f(5)} = \frac{606}{6} = 101$ 이다.

21. [출제의도] 등비급수를 이용하여 도형 문제 추론하기

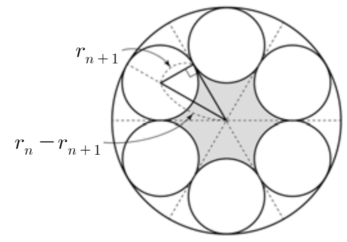
그림 R_n에서 가장 작은 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 그림 R_n을 얻는 과정에서 그린 모든 모양들의 넓이의 합을 a_n이라 하자.



위의 그림에서 $(1-r_1) : r_1 = 2 : 1$ 이므로 $r_1 = \frac{1}{3}$ 이다. S_1은 직각삼각형의 넓이에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$ 이고 중심각의 크기가 60° 인 부채꼴의 넓이를 뺀 값의 12배와 같으므로

$$S_1 = \left\{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{3} - \pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ}\right\} \times 12 = \frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}$$

이다.



$(r_n - r_{n+1}) : r_{n+1} = 2 : 1$ 이므로 $r_{n+1} = \frac{1}{3} r_n$ 이다.

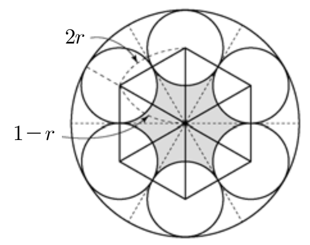
$a_{n+1} : a_n = 6(r_{n+1})^2 : (r_n)^2$ 이므로

$a_{n+1} = 6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 a_n = \frac{2}{3} a_n$, $a_1 = S_1$ 이다.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{S_1}{1-\frac{2}{3}} = 2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi$$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{2}{3}$ 이므로 $a+b = \frac{4}{3}$ 이다.

[다른 풀이]



반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 작은 원의 반지름의 길이를 r라 하면 $1-r = 2r$ 이므로 $r = \frac{1}{3}$ 이다.

S_1은 한 변의 길이가 $\frac{2}{3}$ 인 정삼각형 6개의 넓이의 합에서 반지름의 길이가 $\frac{1}{3}$ 이고 중심각의 크기가 120° 인 부채꼴 6개의 넓이의 합을 뺀 것과 같으므로

$$S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 6 - \pi \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 6 = \frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}$$

이다.

$S_2=S_1+\left(\frac{S_1}{9}\right)\times 6=S_1+\frac{2}{3}S_1$

$S_3=S_1+\left(\frac{S_1}{9}\right)\times 6+\left(\frac{S_1}{9}\right)^2\times 6^2=S_1+\frac{2}{3}S_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2S_1$

$\vdots$

$S_n=S_1+\left(\frac{S_1}{9}\right)\times 6+\left(\frac{S_1}{9}\right)^2\times 6^2+\cdots+\left(\frac{S_1}{9}\right)^{n-1}\times 6^{n-1}$

$=S_1+\frac{2}{3}S_1+\left(\frac{2}{3}\right)^2S_1+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}S_1$

$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\frac{2}{3}}$

$=\frac{\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{9}}{\frac{1}{3}}$

$=\frac{6\sqrt{3}-2\pi}{3}$

$=2\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$

따라서 $a=2$, $b=-\frac{2}{3}$ 이므로 $a+b=\frac{4}{3}$ 이다.

22. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$\lim_{x\to 5}(3x-1)=3\times 5-1=14$

23. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$\log_2 4=2$이고

$(\log_2 16)^2=4^2=16$이다.

$\therefore \log_2 4+(\log_2 16)^2=2+16=18$

24. [출제의도] 집합의 원소의 개수 이해하기

$n(A^C\cup B^C)=n((A\cap B)^C)$

$=n(U)-n(A\cap B)=40-6=34$

25. [출제의도] 등비수열을 이용한 실생활 문제 해결하기

1월부터 5월까지 감소하는 일정한 비율을 r라 하자. A노래의 'n월 다운로드 건수'를 $a_n\ (n=1,2,\cdots,5)$라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 480이고 공비가 r인 등비수열이므로

$a_5=480\times r^4=30$

$r=\frac{1}{2}$

이다. 따라서 $a_3=480\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=120$이다.

[다른풀이]

A노래의 '3월 다운로드 건수'를 x라 하면

480, x, 30

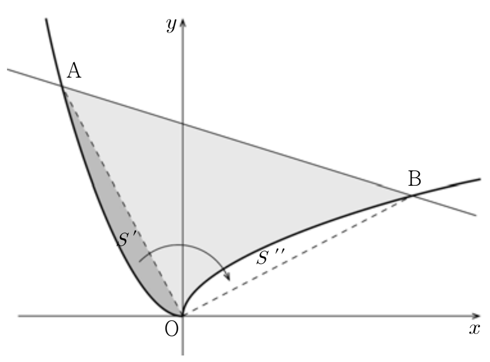
은 이 순서대로 등비수열을 이루므로

$x^2=480\times 30=14400$

이다. $\therefore x=120$

26. [출제의도] 무리함수와 역함수 문제 해결하기

구하고자 하는 넓이를 S라 하자. 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프는 함수 $y=x^2\ (x\le 0)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프와 일치하고 점 A는 같은 방법의 대칭이동으로 점 B로 이동한다. 따라서 그림과 같이 S'의 영역과 S''의 영역의 넓이는 서로 같다.



따라서 S의 값은 삼각형 OAB의 넓이와 같다.

삼각형 OAB에서 밑변을 $\overline{\mathrm{AB}}$라 하면, 높이는 원점과 직선 $x+3y-10=0$ 사이의 거리이다.

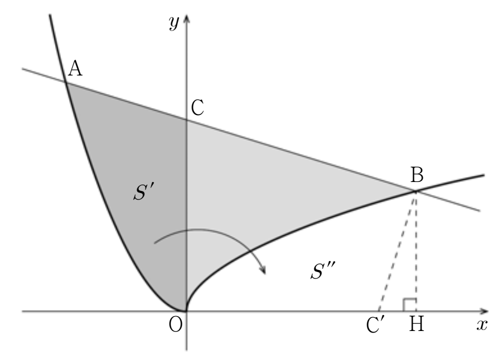
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(4+2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{10}$이고 높이는

$\frac{|0+3\times 0-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\sqrt{10}$

이다.

따라서 $S=\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times 2\sqrt{10}=10$이다.

[다른 풀이]



직선 $x+3y-10=0$이 y축과 만나는 점은 $\mathrm{C}\left(0,\frac{10}{3}\right)$이다. 점 C를 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{C}'\left(\frac{10}{3},0\right)$이라 하고 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자. 그림과 같이 S'의 영역과 S''의 영역의 넓이는 서로 같기 때문에 S의 값은 사다리꼴 COHB의 넓이에서 삼각형 BC′H의 넓이를 뺀 것과 같다.

(사다리꼴 COHB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\left(2+\frac{10}{3}\right)\times 4=\frac{32}{3}$

(삼각형 BC′H의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\left(4-\frac{10}{3}\right)\times 2=\frac{2}{3}$

따라서 $S=\frac{32}{3}-\frac{2}{3}=10$이다.

27. [출제의도] 집합의 성질 이해하기

집합 $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$라 하면

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28$이다.

집합 $B=\left\{\frac{x_1+a}{2},\frac{x_2+a}{2},\frac{x_3+a}{2},\frac{x_4+a}{2},\frac{x_5+a}{2}\right\}$

이므로 집합 B의 모든 원소의 합은

$\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+\frac{5}{2}a$

$=\frac{1}{2}\times 28+\frac{5}{2}a$

$=14+\frac{5}{2}a$

이다. 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 집합 A의 모든 원소의 합과 집합 B의 모든 원소의 합에서 집합 $A\cap B$의 모든 원소의 합을 뺀 것과 같다.

따라서

$49=28+\left(14+\frac{5}{2}a\right)-(10+13)$

$\frac{5}{2}a=30$이다.

$\therefore a=12$

28. [출제의도] 여러 가지 수열 이해하기

$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n}{2}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{n}b_k=2\sum_{k=1}^{n}k=\sum_{k=1}^{n}2k$이다. 그러므로 $b_k=2k$이다.

$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ 이므로

$\sum_{k=1}^{n}(a_k-5)b_k=2\sum_{k=1}^{n}k^3=\sum_{k=1}^{n}2k^3$ 이다.

그러므로 $(a_k-5)b_k=2k^3$ 이다.

따라서 $b_k=2k$ 이므로 $a_k-5=k^2$ 이다.

$a_k=k^2+5$ 이므로 $a_{10}=105$ 이다.

[다른 풀이]

수열의 합과 일반항 사이의 관계에 의해서

$b_n=(n^2+n)-\{(n-1)^2+(n-1)\}=2n\ (n\ge 2)$

$b_1=1^2+1=2$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=2n$이다.

$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-5\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=1}^{n}(a_k-5)b_k$ 이므로

$(a_n-5)b_n=\frac{n^2(n+1)^2}{2}-\frac{(n-1)^2n^2}{2}=2n^3\ (n\ge 2)$

$(a_1-5)b_1=\frac{1^2\times 2^2}{2}=2$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $(a_n-5)b_n=2n^3$이다.

$b_n=2n$이므로 $a_n=n^2+5$이다.

따라서 $a_{10}=105$이다.

29. [출제의도] 지수와 로그 이해하기

$\log_n k$가 유리수라 하면

$\log_n k=\frac{q}{p}$ (p, q는 정수, $p\ne 0$)

이고

$\log_n k=\frac{q}{p}\times 1=\frac{q}{p}\log_m m=\log_{m^p}m^q$ (m은 2이상의 자연수)

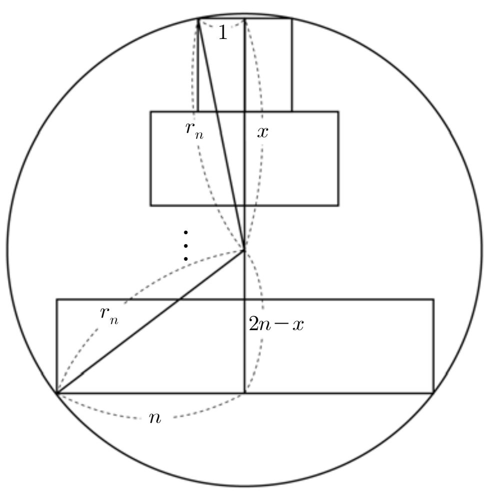
이므로 $n=m^p$일 때 $k=m^q$이다.

즉, $n=2^p$일 때 $\log_n k$가 유리수가 되기 위해서는 $k=1,2,2^2,\cdots,2^{p-1},2^p$이므로 $f(2^p)=p+1$이다. 그러므로 $f(n)\ge 5$를 만족하는 자연수 n은 2^4, 2^5, 2^6이다.

$n=3^p$일 때 $\log_n k$가 유리수가 되기 위해서는 $k=1,3,3^2,\cdots,3^{p-1},3^p$이므로 $f(3^p)=p+1$이다. 그러므로 $f(n)\ge 5$를 만족하는 자연수 n은 3^4이다.

$m\ge 4$일 때 $f(n)\ge 5$가 되는 100이하의 자연수 n은 존재하지 않는다. 따라서 $f(n)\ge 5$가 되는 모든 자연수 n의 값의 합은 $2^4+3^4+2^5+2^6=193$이다.

30. [출제의도] 수열의 극한 추론하기



[도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원은 위의 그림과 같이 네 꼭짓점을 지나게 된다. 이 원의 반지름의 길이를 r_n이라 하고, 원의 중심에서 도형의 윗변까지의 길이를 x라 하면

$(r_n)^2=x^2+1$, $(r_n)^2=(2n-x)^2+n^2$

이다. 따라서 $x^2+1=(2n-x)^2+n^2$이므로

$x=\frac{5n^2-1}{4n}$ 이다. 따라서

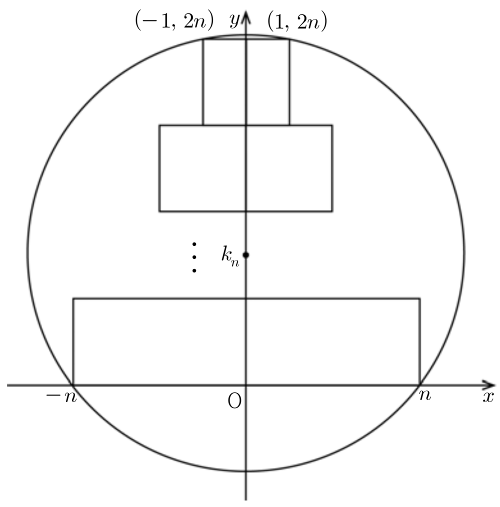
$(r_n)^2=\left(\frac{5n^2-1}{4n}\right)^2+1=\frac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}$ 이다.

그러므로

$a_n=\pi(r_n)^2=\frac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}\pi$ 이다.

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{80a_n}{\pi n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{125n^4+30n^2+5}{n^4}=125$

[다른 풀이]



[도형 n]을 포함하는 원들 중 가장 작은 원은 위의 그림처럼 네 점을 지나게 된다. 이 원의 방정식을 $x^2+(y-k_n)^2=r_n^2$ 이라 하자. 이 원은 $(n, 0)$ 과 $(1, 2n)$ 을 지나므로

$$\begin{cases} n^2+(k_n)^2=(r_n)^2 \\ 1+(2n-k_n)^2=(r_n)^2 \end{cases}$$

이다. 따라서

$$n^2+(k_n)^2=1+(2n-k_n)^2$$

이므로 $k_n=\dfrac{3n^2+1}{4n}$ 이다. 따라서

$$(r_n)^2=n^2+\left(\frac{3n^2+1}{4n}\right)^2=\frac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}$$ 이다.

그러므로 $a_n=\pi(r_n)^2=\dfrac{25n^4+6n^2+1}{16n^2}\pi$ 이다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{80a_n}{\pi n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{125n^4+30n^2+5}{n^4}=125$$