2015학년도 9월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

나형 정답

1	④	*2*	④	*3*	⑤	*4*	②	*5*	⑤
6	③	*7*	②	*8*	⑤	*9*	⑤	*10*	①
11	④	*12*	①	*13*	①	*14*	③	*15*	①
16	②	*17*	②	*18*	③	*19*	②	*20*	③
21	⑤	*22*	49	*23*	24	*24*	15	*25*	80
26	40	*27*	256	*28*	5	*29*	12	*30*	22

수학 영역

나형 해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$3\times 8^{\frac{2}{3}}=3\times(2^3)^{\frac{2}{3}}=3\times 4=12$

2. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 3+\log_2 6-\log_2 9=\log_2\frac{3\times 6}{9}=\log_2 2=1$

3. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{10n+1}{2n+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{10+\frac{1}{n}}{2+\frac{5}{n}}=\frac{10}{2}=5$$

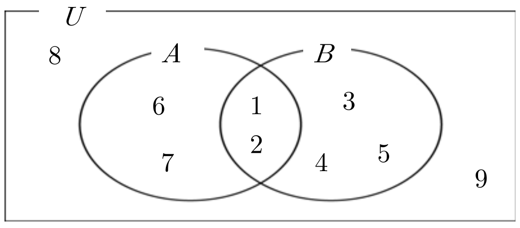
4. [출제의도] 등차수열 계산하기

공차를 d라 하면 $a_7=a_3+4d=20$, $4d=12$

따라서 $a_{11}=a_7+4d=20+12=32$

5. [출제의도] 집합의 연산 이해하기

주어진 집합들을 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



따라서 집합 A의 모든 원소의 합은 16

6. [출제의도] 등비수열의 극한 이해하기

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a\times 4^{n+1}+3^{n+1}}{4^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4a+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

$$=4a=6$$

따라서 $a=\frac{3}{2}$

7. [출제의도] 함수의 극한의 성질 이해하기

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x^2-4}\times(x+2)\right\}$$

$$=3\times 4=12$$

8. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)=1+2=3$

9. [출제의도] 로그의 성질 이해하기

$$\log\frac{12}{5}=\log 12-\log 5$$

$$=(2\log 2+\log 3)-\log\frac{10}{2}$$

$$=(2a+b)-(1-a)=3a+b-1$$

10. [출제의도] 평균변화율 이해하기

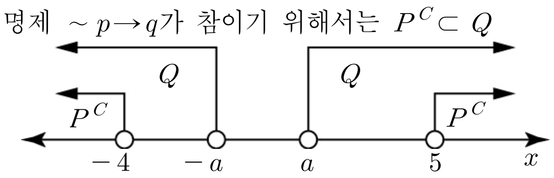
$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{15}{3}=5$이고 $f'(k)=6k^2-1$

$5=6k^2-1$, $k^2=1$

k가 양수이므로 k=1

11. [출제의도] 진리집합의 포함관계 이해하기

명제 $\sim p\to q$가 참이기 위해서는 $P^C\subset Q$



$-4\le -a$이고 $a\le 5$

따라서 $a\le 4$이므로 자연수 a의 개수는 4

12. [출제의도] 지수를 이용하여 수학 외적 문제 해결하기

$$D_A=k\left(\frac{\frac{2}{3}Q_B}{\frac{8}{27}V_B}\right)^{\frac{1}{2}}=k\times\frac{3}{2}\left(\frac{Q_B}{V_B}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}D_B$$

$D_A-D_B=\frac{1}{2}D_B=60$

따라서 $D_B=120$

13. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=4$에 대칭이므로

$f(x)=a(x-4)^2+b$ $(a\neq 0)$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=1$이므로 $f(2)=4a+b=0$, $b=-4a$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-4)^2-4a}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)(x-6)}{x-2}=-4a=1$$

$a=-\frac{1}{4}$, $b=1$

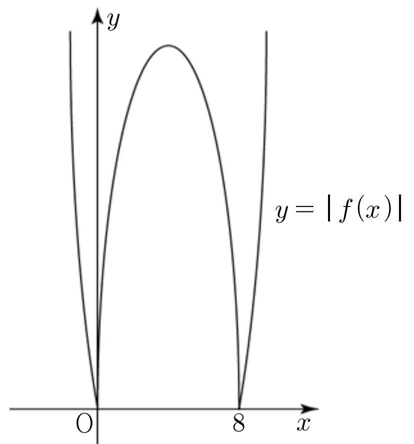
따라서 $f(0)=-3$

14. [출제의도] 등차수열의 합을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n\{2a_1+3(n-1)\}}{2}=a(n-4)^2+b$$

$f(n)=\frac{3}{2}n(n-8)$

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는



(i) $k\le 3$ 또는 $k\ge 8$일 때,

$|f(k)|<|f(k+1)|$

(ii) $4\le k\le 7$일 때,

$|f(k)|>|f(k+1)|$

따라서 자연수 k의 최댓값은 7

15. [출제의도] 유리함수의 그래프 추론하기

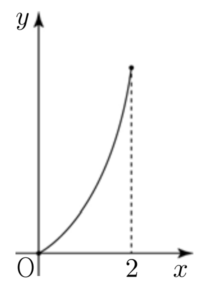
삼각형 AFD와 삼각형 EFC는 닮음이므로

$\overline{AD}:\overline{EC}=\overline{DF}:\overline{CF}$

$3:x=\{f(x)+2\}:f(x)$

$f(x)=\frac{-6}{x-3}-2$ $(0\le x\le 2)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프의 모양은



16. [출제의도] 절대부등식의 성질 이해하기

$xy>0$이므로 절대부등식의 성질을 이용하면

$$\left(4x+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+16y\right)=4+16+64xy+\frac{1}{xy}$$

$$\ge 20+2\sqrt{64xy\times\frac{1}{xy}}=20+16=36$$

(단, 등호는 $xy=\frac{1}{8}$일 때 성립)

17. [출제의도] 급수의 성질 이해하기

$a_1=4$, $\frac{a_n}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{k}=2n+2$ $(n\ge 2)$

그러므로 $a_n=2n^2+2n$ $(n\ge 1)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\frac{1}{2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{2}$

18. [출제의도] 수학적 귀납법을 이용하여 증명하기

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=2+a_1=3$,

(우변)$=2a_2=2\left(1+\boxed{\frac{1}{2}}\right)=3$

이므로 (★)이 성립한다.

(ii) $n=m$ $(m\ge 2)$일 때

(★)이 성립한다고 가정하면

$m+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}=ma_m$ 이므로

$(m+1)+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{m-1}+a_m$

$=ma_m+\boxed{a_m+1}$

$=(m+1)\left(a_{m+1}-\boxed{\dfrac{1}{m+1}}\right)+1$

$=(m+1)a_{m+1}$

이다. 따라서 $n=m+1$ 일 때도 (★)이 성립한다.

그러므로 (i), (ii)에 의하여

$n\ge 2$ 인 모든 자연수 n 에 대하여

$n+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=na_n$ 이 성립한다.

$p=\dfrac{1}{2}$, $f(m)=a_m+1$, $g(m)=\dfrac{1}{m+1}$

따라서 $\dfrac{p\times f(3)}{g(11)}=17$

19. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

함수 $f(x)=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k\ (x\ge 0)$의 역함수는

$g(x)=\sqrt{5x-k}$ 이고 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

$\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k=x$

$x^2-5x+k=0$은 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$k\ge 0$, $D=(-5)^2-4k>0$

$0\le k<\dfrac{25}{4}$ 이므로 정수 k의 개수는 7

20. [출제의도] 부분집합의 개수 추론하기

$f(n)$은 원소 n을 최소의 원소로 갖는 집합 X의 부분집합의 개수이므로 $f(n)=2^{10-n}$

ㄱ. $f(8)=4$ (참)

ㄴ. $f(9)=2$, $f(10)=1$이므로 $f(9)>f(10)$ (거짓)

ㄷ. $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)+f(9)=682$ (참)

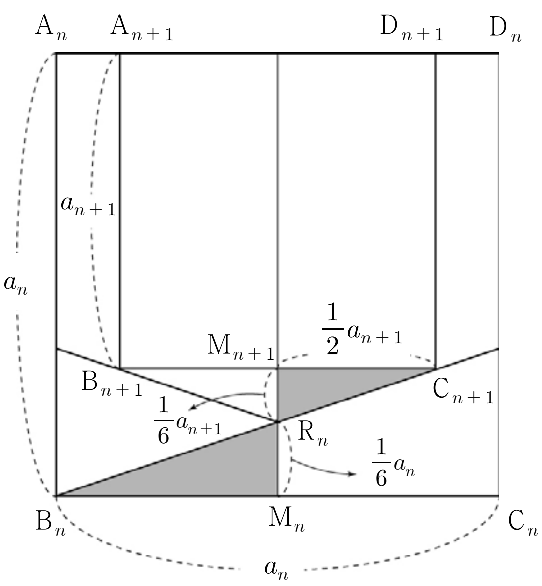
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

21. [출제의도] 등비급수를 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

S_1은 삼각형 $\mathrm{P_1B_1R_1}$의 넓이와 삼각형 $\mathrm{B_1C_1Q_1}$의 넓이의 합이므로 $S_1=\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$

선분 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$의 중점을 M_n이라 하고

정사각형 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$의 한 변의 길이를 a_n이라 하자.



삼각형 $\mathrm{R}_n\mathrm{B}_n\mathrm{M}_n$과 삼각형 $\mathrm{R}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}$은 닮음이므로

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{M}_n}:\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_n}=\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}}:\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_{n+1}}$

$=3:1$

$\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{M}_n}=\dfrac{1}{2}a_n$, $\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_n}=\dfrac{1}{6}a_n$

$\overline{\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{M}_{n+1}}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}$, $\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_{n+1}}=\dfrac{1}{6}a_{n+1}$

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\overline{\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}}+\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_{n+1}}+\overline{\mathrm{R}_n\mathrm{M}_n}$

$a_n=a_{n+1}+\dfrac{1}{6}a_{n+1}+\dfrac{1}{6}a_n$

그러므로 $a_{n+1}=\dfrac{5}{7}a_n$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\dfrac{\dfrac{9}{4}}{1-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2}=\dfrac{147}{32}$

22. [출제의도] 합성함수 계산하기

$(g\circ f)(4)=g(7)=49$

23. [출제의도] 도함수 계산하기

$f'(x)=6x^2+a$이므로 $f'(1)=6+a=30$

따라서 $a=24$

24. [출제의도] 급수와 일반항의 관계 이해하기

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\dfrac{3n+1}{n+1}\right)=0$이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$

따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_n^2+2a_n)=9+6=15$

25. [출제의도] 연속함수의 성질 이해하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)=f(1)$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\dfrac{6x^2+ax+2}{x-1}=b$이므로

$\displaystyle\lim_{x\to1}(6x^2+ax+2)=6+a+2=0$, $a=-8$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\dfrac{(6x-2)(x-1)}{x-1}=4$

$a=-8$, $b=4$

따라서 $a^2+b^2=80$

26. [출제의도] 함수의 극한의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

(가)에서 함수 $f(x)-2x^2$은 이차항의 계수가 2인 이차함수이고

(나)에서 $\displaystyle\lim_{x\to1}\{f(x)-2x^2\}=0$이므로

$f(x)-2x^2=2(x-1)(x-\alpha)$

$\displaystyle\lim_{x\to1}\dfrac{2(x-1)(x-\alpha)}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\dfrac{2(x-\alpha)}{x+1}=1-\alpha=2$

$f(x)=2x^2+2(x-1)(x+1)=4x^2-2$

따라서 $f'(x)=8x$이므로 $f'(5)=40$

27. [출제의도] 등차수열과 등비수열 이해하기

집합 A의 원소 중에서 3으로 나눈 나머지가 1인 항을 작은 수부터 차례로 나열하면

$4, 16, 64, 256, \cdots$

따라서 $a_4=256$

(별해)

$2^n=3m-2$, $2(2^{n-1}+1)=3m$

$(2^{n-1}+1)$이 3의 배수가 되어야 하므로

$n-1=2k-1\ (k=1,2,3,\cdots)$, $n=2k$

$\{a_n\}$: $2^2, 2^4, 2^6, 2^8, \cdots$

따라서 $a_4=256$

28. [출제의도] 수열의 극한을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

점 $\mathrm{A}_n(n, \sqrt{3n})$, $\mathrm{B}_n(n, \sqrt{n})$ 이므로

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{3n}-\sqrt{n}=\sqrt{n}(\sqrt{3}-1)$

$S_n=\dfrac{\sqrt{n}(\sqrt{3}-1)}{2}$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(S_{n+1}-S_n)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

이므로 $a=-\dfrac{1}{4}$, $b=\dfrac{1}{4}$

따라서 $40(a^2+b^2)=5$

29. [출제의도] 역함수의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

역함수가 존재하려면 함수 $f(x)$가 일대일 대응이어야 하므로

(i) $x\ge 1$일 때, 함수 $f(x)$가 증가하여야 하므로

$y=x^2-ax+3=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+3$

$\dfrac{a}{2}\le 1$, $a\le 2$

(ii) $x<1$일 때, 함수 $f(x)$가 증가하여야 하므로

$y=-x^2+2bx-3=-(x-b)^2+b^2-3$

$b\ge 1$

(iii) $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로

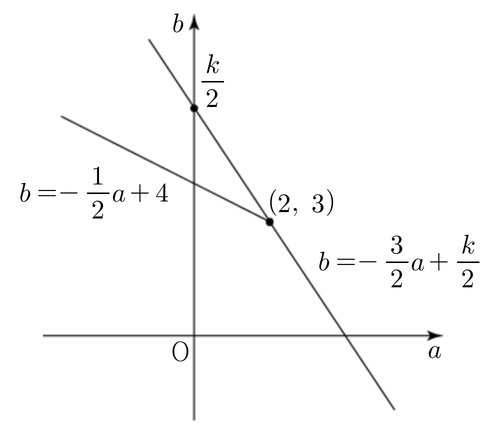
$\displaystyle\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1-}f(x)$

$1-a+3=-1+2b-3$

$a+2b=8$

(i), (ii), (iii)에 의하여

$a\le 2$, $b\ge 1$, $a+2b=8$을 만족시키는 순서쌍 (a, b)를 좌표평면 위에 나타내면 $3a+2b=k$의 그래프가 $(2, 3)$을 지날 때 k의 값이 최대가 된다.



따라서 $3a+2b$의 최댓값은 $a=2$, $b=3$일 때 12

30. [출제의도] 등비수열의 성질을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기

$\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=a_n$, $\overline{\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n}=b_n$, $\overline{\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n}=c_n$,

$\overline{\mathrm{D}_n\mathrm{E}_n}=d_n$, $\overline{\mathrm{E}_n\mathrm{F}_n}=e_n$ 이라 하면,

$b_n=\dfrac{5}{6}a_n$, $c_n=\dfrac{5}{6}b_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^2a_n$,

$d_n=\dfrac{5}{6}c_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^3a_n$, $e_n=\dfrac{5}{6}d_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^4a_n$

한편, $a_{n+1}=\dfrac{5}{6}a_n$, $a_1=\overline{\mathrm{A_1B_1}}=66\times\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^2$

$\overline{\mathrm{A_1B_1}}+\overline{\mathrm{B_2C_2}}+\overline{\mathrm{C_3D_3}}+\overline{\mathrm{D_4E_4}}+\overline{\mathrm{E_5F_5}}$

$=a_1+b_2+c_3+d_4+e_5$

$=a_1+\dfrac{5}{6}a_2+\left(\dfrac{5}{6}\right)^2a_3+\left(\dfrac{5}{6}\right)^3a_4+\left(\dfrac{5}{6}\right)^4a_5$

$=a_1+\left(\dfrac{5}{6}\right)^2a_1+\left(\dfrac{5}{6}\right)^4a_1+\left(\dfrac{5}{6}\right)^6a_1+\left(\dfrac{5}{6}\right)^8a_1$

$=\dfrac{a_1\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{10}\right\}}{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2}=25\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{10}\right\}=25-\dfrac{5^{12}}{6^{10}}$

$a=10$, $b=12$

따라서 $a+b=22$오존은 광화학 반응에 의한 2차

오염 물질로, 여름철 햇빛이 강할 때 오존 분압이 높다.