

01. ⑤ 02. ① 03. ③ 04. ④ 05. ③
 06. ⑤ 07. ⑤ 08. ② 09. ② 10. ④
 11. ④ 12. ② 13. ① 14. ④ 15. ①
 16. ① 17. ③ 18. ② 19. ⑤ 20. ③
 21. ① 22. 6 23. 4 24. 2 25. 84
 26. 162 27. 32 28. 80 29. 40 30. 15

$$3 \cdot 4 \cdot r^4 = 4 \cdot r^6$$

$$r^2 = 3$$

따라서

$$a_3 = 4 \times r^2$$

$$= 4 \times 3$$

$$= 12$$

정답 ③

1. 출제의도 : 행렬의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} 2A+B &= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & a+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

따라서 $a+2=7$ 에서

$$a=5$$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 여러 가지 함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x e^x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\tan x}{x} \times \frac{1}{e^x} \right) \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

정답 ①

3. 출제의도 : 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열의 공비를 r 이라 하면 첫째항이 4이므로 $3a_5 = a_7$ 에서

4. 출제의도 : 좌표공간에서 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $P(2, 2, 3)$ 을 yz 평면에 대하여 대칭이 동시킨 점 Q 의 좌표는

$$Q(-2, 2, 3)$$

이므로

두 점 $P(2, 2, 3)$, $Q(-2, 2, 3)$ 사이의 거리는

$$\overline{PQ} = \sqrt{(-4)^2 + 0 + 0} = 4$$

정답 ④

5. 출제의도 : 도함수와 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = (2e^x + 1)^3 \text{에서}$$

$$f'(x) = 3(2e^x + 1)^2 \times 2e^x$$

이므로

$$f'(0) = 3 \times 3^2 \times 2$$

$$= 54$$

정답 ③

6. 출제의도 : 성분을 이용하여 평면벡터의 내적을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= (4, 2) \\ \overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ &= (2, 0) - (0, 2) \\ &= (2, -2) \\ \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= (4, 2) \cdot (2, -2) \\ &= 8 + (-4) \\ &= 4\end{aligned}$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 합성변환에 의하여 옮겨진 점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

일차변환 g 는 원점을 중심으로 $\frac{\pi}{4}$ 만큼 회전하는 회전변환이므로 이를 나타내는 행렬은

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$$

그러므로 합성변환 $f \circ g$ 에 의하여 점 $(3, 3)$ 이 옮겨진 점은

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

따라서 $P(0, 6\sqrt{2})$ 이므로

$$\overline{OP} = 6\sqrt{2}$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수조건에 의하여

$$4+x > 0, 4-x > 0$$

$$\therefore -4 < x < 4$$

$$\log_2(4+x) + \log_2(4-x) = 3 \text{에서}$$

$$\log_2(4+x)(4-x) = 3$$

$$(4+x)(4-x) = 2^3 = 8$$

$$16-x^2 = 8, x^2 = 8$$

$$-4 < x < 4 \text{이므로}$$

$$x = 2\sqrt{2} \text{ 또는 } x = -2\sqrt{2}$$

따라서 주어진 방정식의 모든 해의 곱은

$$(2\sqrt{2}) \times (-2\sqrt{2}) = -8$$

정답 ②

9. 출제의도 : 확률의 성질을 이용하여 확률의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A, B 가 서로 독립이므로 두 사건 A, B^c 도 서로 독립이고 두 사건 A^c, B 도 서로 독립이다.

그러므로

$$P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = \frac{1}{3}$$

에서

$$P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) = \frac{1}{3}$$

$$P(A)\{1-P(B)\} + \{1-P(A)\}P(B) = \frac{1}{3}$$

이때, $P(A) = \frac{1}{6}$ 이므로 대입하면

$$\frac{1}{6}\{1-P(B)\} + \frac{5}{6}P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3}P(B) = \frac{1}{6}$$

따라서, $P(B) = \frac{1}{4}$

정답 ②

10. 출제의도 : 미분을 활용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \ln 5x \text{ 에서}$$

$$y' = \frac{5}{5x} = \frac{1}{x} \text{ 이므로}$$

$x = \frac{1}{5}$ 에서의 미분계수는 5이다.

따라서 곡선 $y = \ln 5x$ 위의 점 $(\frac{1}{5}, 0)$ 에

서의 접선의 방정식은

$$y = 5\left(x - \frac{1}{5}\right)$$

$$= 5x - 1$$

이므로 접선의 y 절편은 -1 이다.

정답 ④

11. 출제의도 : 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 두 직선이 이루는 예각의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 직선 $x - y - 1 = 0$, $ax - y + 1 = 0$ 의 x 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 θ_1 , θ_2 라 하면

$$\tan \theta_1 = 1, \tan \theta_2 = a$$

그러므로 두 직선이 이루는 예각의 크

기 θ 에 대하여 $\tan \theta = \frac{1}{6}$ 이므로

$$\tan \theta = |\tan(\theta_2 - \theta_1)|$$

$$= \left| \frac{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}{1 + \tan \theta_2 \tan \theta_1} \right|$$

$$= \left| \frac{a - 1}{1 + a} \right|$$

$$= \frac{1}{6}$$

이때, $a > 1$ 이므로

$$\frac{a - 1}{1 + a} = \frac{1}{6}$$

$$6a - 6 = 1 + a$$

$$a = \frac{7}{5}$$

정답 ④

12. 출제의도 : 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 P의 좌표를 (x_1, y_1) 이라 하자.

점 P(x_1, y_1)에서의 접선의 방정식은

$$y_1 y = 2(x + x_1)$$

접선이 점 $(-2, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 2(-2 + x_1) \text{ 에서}$$

$$x_1 = 2$$

$$y_1^2 = 4x_1 = 8$$

$$y_1 = 2\sqrt{2} \quad (\because y_1 > 0)$$

점 P에서 x 축에 내린 수선의 발을 H라 하면 삼각형 PFH에서

$$\overline{FH} = 2 - 1 = 1,$$

$$\overline{PH} = 2\sqrt{2},$$

$$\overline{PF} = \sqrt{1^2 + (2\sqrt{2})^2} = 3$$

이므로

$$\cos(\angle PFH) = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \cos(\angle PFO) &= \cos(\pi - \angle PFH) \\ &= -\cos(\angle PFH) \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

정답 ②

13. 출제의도 : 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모표준편차가 10인 모집단에서 크기 n 인 표본을 추출하였을 때 그 표본평균을 \bar{x} 라 하면 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은

$$\left[\bar{x} - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}}, \bar{x} + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} \right]$$

이때, 신뢰구간이 $[38.08, 45.92]$ 이므로

$$\bar{x} - 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 38.08 \quad \text{--- ㉠}$$

$$\bar{x} + 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 45.92 \quad \text{--- ㉡}$$

㉡에서 ㉠을 뺀다

$$2 \times 1.96 \times \frac{10}{\sqrt{n}} = 7.84$$

$$\sqrt{n} = 5$$

$$n = 25$$

정답 ①

14. 출제의도 : 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

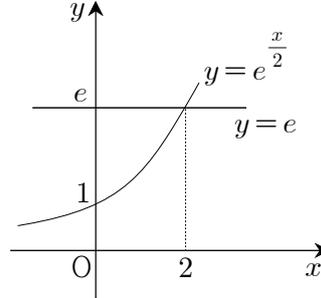
정답풀이 :

곡선 $y = e^{\frac{x}{2}}$ 과 직선 $y = e$ 의 교점의 좌표를 구하면

$$y = e^{\frac{x}{2}} = e \text{에서}$$

$$\frac{x}{2} = 1, \quad x = 2 \text{이므로}$$

교점의 좌표는 $(2, e)$ 이다.



따라서 곡선 $y = e^{\frac{x}{2}}$ 과 y 축 및 직선 $y = e$ 로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는

$$\pi \int_0^2 e^2 dx - \pi \int_0^2 \left(e^{\frac{x}{2}} \right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^2 (e^2 - e^x) dx$$

$$= \pi [e^2 x - e^x]_0^2$$

$$= \pi(2e^2 - e^2 + 1)$$

$$= (e^2 + 1)\pi$$

정답 ④

15. 출제의도 : 경우의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니에서 임의로 4개의 공을 동시에 꺼내어 임의로 일렬로 나열하는 경우는 1의 숫자가 적힌 공의 개수에 따라 각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) 1의 숫자가 적힌 공 1개

1, 2, 3, 4의 숫자가 적힌 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는

$$4!$$

(ii) 1의 숫자가 적힌 공이 2개
2, 3, 4의 숫자가 적힌 공 중 2개를 택
하는 경우의 수는

$${}_3C_2$$

이 각각에 대하여 1이 적힌 공 2개와
위의 공 2개를 일렬로 나열하는 경우의
수는

$$\frac{4!}{2!}$$

이때, 경우의 수는

$${}_3C_2 \times \frac{4!}{2!}$$

그러므로 (i), (ii)에서 4개의 공을
나열하는 경우의 수는

$$4! + {}_3C_2 \times \frac{4!}{2!} = 60$$

한편, 나열된 순서대로 공에 적힌 수를
 a, b, c, d 라 할 때, $a \leq b \leq c \leq d$ 인 경우
의 수는 다음 각 경우로 나누며 다음과
같다.

(i) 1이 적힌 공이 1개인 경우

2, 3, 4가 적힌 공을 모두 뽑는 경우의
수이므로

$${}_3C_3$$

(ii) 1이 적힌 공이 2개인 경우

2, 3, 4가 적힌 공을 2개 뽑는 경우의
수이므로

$${}_3C_2$$

그러므로 위의 (i), (ii)에 의하여 경
우의 수는

$${}_3C_3 + {}_3C_2 = 4$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{4}{60} = \frac{1}{15}$$

정답 ①

16. 출제의도 : 수열의 일반항을 구하는
과정을 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$b_n = (a_n)^n$ 이라 하면

$b_1 = 10$ 이고

주어진 식으로부터

$$b_{n+1} = \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \quad (n \geq 1)$$

이다. $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$ 라 하면

$$b_{n+1} = \frac{S_n}{n} \text{에서}$$

$$\begin{aligned} S_n &= nb_{n+1} = n(S_{n+1} - S_n) \\ &= nS_{n+1} - nS_n \end{aligned}$$

$$S_{n+1} = \boxed{\frac{n+1}{n}} \times S_n$$

이다.

$S_1 = 10$ 이고,

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = \frac{n+1}{n} \text{이므로}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$S_n = S_1 \times \frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \dots \times \frac{S_n}{S_{n-1}}$$

$$= 10 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \dots \times \frac{n}{n-1}$$

$$= 10n$$

$S_1 = 10$ 이므로

$$S_n = \boxed{10n} \quad (n \geq 1)$$

이다.

따라서 $f(n) = \frac{n+1}{n}$, $g(n) = 10n$ 이므로

$$f(5) \times g(6) = \frac{6}{5} \times 60 = 72$$

정답 ①

17. 출제의도 : 행렬에 관련된 성질을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $B^2 + AB = E$ 에서

$(B+A)B = E$

이므로

$B(B+A) = E$

그러므로 $B^2 + BA = E$

이 식에서 $B^2 + AB = E$ 를 변끼리 빼면

$BA - AB = O$

그러므로

$AB = BA$ <참>

ㄴ. ㄱ에서 $(B+A)B = E$ 이므로

$B^{-1} = B+A$ ---㉠

또, $B^2 = B - E$ 에서

$B - B^2 = E$

$B(E - B) = E$

$B^{-1} = E - B$ ---㉡

㉠과 ㉡에서

$B+A = E - B$

$A + 2B = E$ <참>

ㄷ. ㄴ에서 $A = E - 2B$ 이므로

$A^2 = (E - 2B)^2$

$= E - 4B + 4B^2$

이때, $B^2 = B - E$ 이므로

$A^2 = E - 4B + 4(B - E)$

$= -3E$

또, $A^3 = A^2 A = (-3E)A = -3A$

그러므로

$A^3 + A^2 + 3A$

$= (-3A) + (-3E) + 3A$

$= -3E$ <거짓>

정답 ③

18. 출제의도 : 확률밀도함수의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

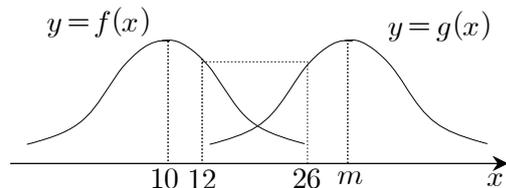
정규분포를 따르는 두 확률변수 X, Y 의 표준편차가 같으므로

확률밀도함수 $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프는 평행이동에 의하여 일치할 수 있다.

확률변수 Y 가 정규분포 $N(m, 4^2)$ 을 따르고,

$P(Y \geq 26) \geq 0.5$ 이므로

$m \geq 26$ 이다.



따라서 $m = 26 + 2 = 28$ 이므로

확률변수 Y 는 정규분포 $N(28, 4^2)$ 을 따른다.

$$\begin{aligned} \therefore P(Y \leq 20) &= P\left(Z \leq \frac{20-28}{4}\right) \\ &= P(Z \leq -2) \\ &= P(Z \geq 2) \\ &= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 - 0.4772 \\ &= 0.0228 \end{aligned}$$

정답 ②

19. 출제의도 : 쌍곡선의 정의를 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

쌍곡선 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 의 초점을 $F(k, 0)$,

$F'(-k, 0)$ ($k > 0$)라 하면

$$k = \sqrt{1+3} = 2$$

그러므로 $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$ 이고 $\overline{FF'} = 4$ 이 때, 삼각형 $PF'F$ 에서 $\overline{PF'} > \overline{PF}$ 이므로 이 삼각형이 이등변삼각형인 경우는 다음 두 가지이다.

(i) $\overline{PF'} = \overline{FF'}$ 인 경우

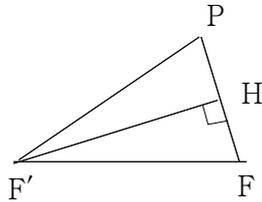
$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \text{이고 } \overline{FF'} = 4 \text{이므로}$$

$$\overline{PF} = \overline{PF'} - 2$$

$$= \overline{FF'} - 2$$

$$= 2$$

이 때, 삼각형 $PF'F$ 의 꼭짓점 F' 에서 변 PF 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$$\overline{F'H} = \sqrt{\overline{F'F}^2 - \overline{FH}^2}$$

$$= \sqrt{4^2 - 1^2}$$

$$= \sqrt{15}$$

그러므로 삼각형 $PF'F$ 의 넓이 a 는

$$a = \frac{1}{2} \times \overline{PF} \times \overline{F'H}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times \sqrt{15}$$

$$= \sqrt{15}$$

(ii) $\overline{PF} = \overline{FF'}$ 인 경우

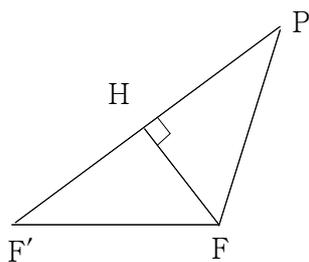
$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2 \text{이고 } \overline{FF'} = 4 \text{이므로}$$

$$\overline{PF'} = \overline{PF} + 2$$

$$= \overline{FF'} + 2$$

$$= 6$$

이 때, 삼각형 $PF'F$ 의 꼭짓점 F 에서 변 PF' 에 내린 수선의 발을 H 라 하면



$$\overline{FH} = \sqrt{\overline{FF'}^2 - \overline{F'H}^2}$$

$$= \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$= \sqrt{7}$$

그러므로 삼각형 $PF'F$ 의 넓이 a 는

$$a = \frac{1}{2} \times \overline{PF'} \times \overline{FH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times \sqrt{7}$$

$$= 3\sqrt{7}$$

따라서 모든 a 값의 곱은

$$\sqrt{15} \times 3\sqrt{7}$$

$$= 3\sqrt{105}$$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 무한등비급수를 활용하여 도형의 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 O 는 정삼각형 ABC 의 무게중심이므로

$$\overline{BO} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{3}$$

따라서

$$\overline{AO} = \overline{AD} = 2\sqrt{3}, \quad \overline{BD} = 6 - 2\sqrt{3}$$

이므로 두 정삼각형 ABC, DBH 의 닮음비는

$$6 : 6 - 2\sqrt{3} = 3 : 3 - \sqrt{3}$$

이고, 넓이의 비는

$$3^2 : (3 - \sqrt{3})^2 = 9 : 12 - 6\sqrt{3}$$

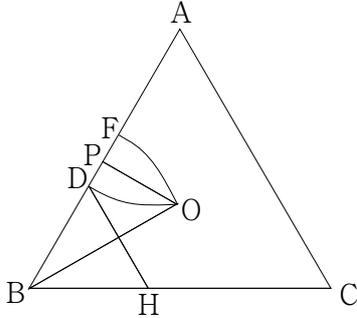
$$= 1 : \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3}$$

이다.

$$r = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{3} \text{ 이라 하면}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\begin{aligned}
&= S_1 + S_1 \times r \times 3 + S_1 \times r^2 \times 3^2 + \dots \\
&= S_1 + (3r)S_1 + (3r)^2 S_1 + \dots \\
&= \frac{S_1}{1-3r} \quad (\because 0 < 3r < 1) \quad \dots \textcircled{1}
\end{aligned}$$



선분 DF의 중점을 P라고 하면

$\overline{OP} \perp \overline{AB}$ 이고,

$\overline{BP} = 3$, $\overline{OP} = \sqrt{3}$ 이다.

두 선분 OP, PF와 호 OF로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \times (2\sqrt{3})^2 \times \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{3} \\
&= \pi - \frac{3}{2} \sqrt{3}
\end{aligned}$$

이므로

$$S_1 = 6S = 6\pi - 9\sqrt{3}$$

따라서 ㉠에서

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\
&= \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{1 - (4 - 2\sqrt{3})} \\
&= \frac{3(2\pi - 3\sqrt{3})}{2\sqrt{3} - 3} \\
&= \frac{3(2\pi - 3\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 3)}{(2\sqrt{3} - 3)(2\sqrt{3} + 3)} \\
&= (2\pi - 3\sqrt{3})(2\sqrt{3} + 3)
\end{aligned}$$

정답 ㉢

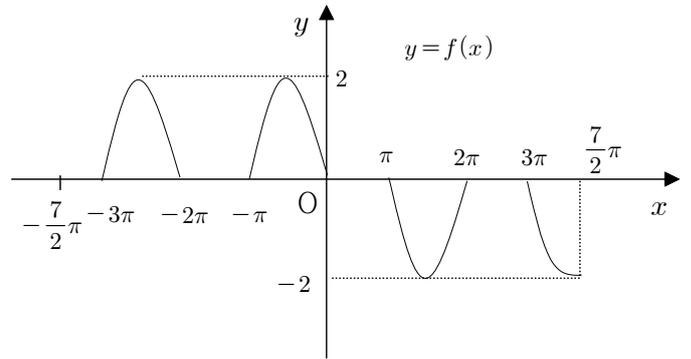
21. 출제의도 : 정적분의 정의를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$ 를 구간으로 나누어 절댓값을 풀면

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \left(-\frac{7}{2}\pi \leq x < -3\pi\right) \\ -2\sin x & \left(-3\pi \leq x < -2\pi\right) \\ 0 & \left(-2\pi \leq x < -\pi\right) \\ -2\sin x & \left(-\pi \leq x < 0\right) \\ 0 & \left(0 \leq x < \pi\right) \\ 2\sin x & \left(\pi \leq x < 2\pi\right) \\ 0 & \left(2\pi \leq x < 3\pi\right) \\ 2\sin x & \left(3\pi \leq x \leq \frac{7}{2}\pi\right) \end{cases}$$

이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 구간 $\left[-\frac{7}{2}\pi, \frac{7}{2}\pi\right]$ 에 속하는

모든 x 에 대하여 $\int_a^x f(t)dt \geq 0$ 이 되도록

하기 위해서는 a 의 값의 범위가

$$-\frac{7}{2}\pi \leq a \leq -3\pi$$

따라서

$$\begin{aligned}
\beta - \alpha &= (-3\pi) - \left(-\frac{7}{2}\pi\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

정답 ㉠

22. 출제의도 : 분수함수에 대한 정적분을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

$$= \int_1^{16} x^{-\frac{1}{2}} dx$$

$$= [2\sqrt{x}]_1^{16}$$

$$= 8 - 2$$

$$= 6$$

정답 6

23. 출제의도 : 무리방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 방정식에서 $\sqrt{-x^2+7x}=t$ 로 놓으면 $t \geq 0$ 이고

$$t = t^2 - 2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$(t+1)(t-2) = 0$$

$$\therefore t = 2$$

이때, $t = \sqrt{-x^2+7x}$ 이므로

$$\sqrt{-x^2+7x} = 2$$

양변을 제곱하여 정리하면

$$-x^2 + 7x = 4$$

$$x^2 - 7x + 4 = 0$$

이때, 이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 가지므로 모든 실근의 곱은 근과 계수의 관계로부터 4이다.

정답 4

24. 출제의도 : 수열의 극한값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$x^2 + 2nx - 4n = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

에서 $x = -n \pm \sqrt{n^2 + 4n}$

방정식 $\textcircled{1}$ 의 양의 실근이 a_n 이므로

$$a_n = -n + \sqrt{n^2 + 4n}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 4n} - n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 4n} - n)(\sqrt{n^2 + 4n} + n)}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{\sqrt{n^2 + 4n} + n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{4}{n}} + 1}$$

$$= \frac{4}{1+1}$$

$$= 2$$

정답 2

25. 출제의도 : 실생활에 활용된 상용로그의 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

중앙지점 P까지의 거리가 75m이고 열차 A의 속력이 열차 B의 속력의 0.9배 이므로 열차 B의 속력을 v_0 라 하면 열차 A의 속력은 $0.9v_0$ 이다.

열차 A의 예측최고소음도가 L_A 이므로

$$L_A = 80 + 28 \log \frac{0.9v_0}{100} - 14 \log \frac{75}{25} \quad \dots \textcircled{1}$$

또, 열차 B의 예측최고소음도가 L_B 이므로

$$L_B = 80 + 28 \log \frac{v_0}{100} - 14 \log \frac{75}{25} \quad \dots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 과 $\textcircled{2}$ 에서

$$L_B - L_A = 28 \left(\log \frac{v_0}{100} - \log \frac{0.9v_0}{100} \right)$$

$$= 28(-\log 0.9)$$

$$= 28(1 - 2\log 3)$$

$$= 28 - 56\log 3$$

따라서

$$a - b = 28 - (-56) = 84$$

정답 84

26. 출제의도 : 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin(\angle ABC) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \sin(\angle ABC)$$

$$= \frac{1}{2} \times 9 \times 12 \times \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$= 18\sqrt{6}$$

$\overline{AP} \perp$ (평면 BCD)이고,

$\overline{AQ} \perp \overline{BC}$ 이므로

삼수선의 정리에 의하여

$\overline{PQ} \perp \overline{BC}$ 이다.

따라서 두 평면 ABC, BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\theta = \angle AQP \text{ 이므로}$$

삼각형 BCP는 삼각형 ABC의 평면 BCD 위로의 정사영이므로 삼각형 BCP의 넓이 k 는

$$k = 18\sqrt{6} \times \cos\theta$$

$$= 18\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= 9\sqrt{2}$$

$$\therefore k^2 = (9\sqrt{2})^2 = 162$$

정답 162

27. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$20 = 2^2 \times 5$ 이므로 d 가 될 수 있는 값은 2, 4, 5이다.

각 경우로 나누면 다음과 같다.

(i) $d = 2$ 일 때,

$$a = 2a', b = 2b', c = 2c'$$

(단, a', b', c' 은 자연수)

라 하면 주어진 방정식은

$$2a' + 2b' + 2c' + 2 = 20$$

$$a' + b' + c' = 9$$

이때, a', b', c' 은 자연수이므로 구하는 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 6개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_6 = {}_8C_6$$

$$= {}_8C_2$$

$$= \frac{8 \times 7}{2 \times 1}$$

$$= 28$$

(ii) $d = 4$ 일 때,

$$a = 4a', b = 4b', c = 4c'$$

(단, a', b', c' 은 자연수)

라 하면 주어진 방정식은

$$4a' + 4b' + 4c' + 4 = 20$$

$$a' + b' + c' = 4$$

이때, a', b', c' 은 자연수이므로 순서쌍의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 1개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_1 = {}_3C_1 = 3$$

(iii) $d = 5$ 일 때,

$$a = 5a', b = 5b', c = 5c'$$

(단, a', b', c' 은 자연수)

라 하면 주어진 방정식은

$$5a' + 5b' + 5c' + 5 = 20$$

$$a' + b' + c' = 3$$

이때, a', b', c' 은 자연수이므로 순서쌍의 개수는 1이다.

따라서, (i), (ii), (iii)에서 구하는 순서쌍의 개수는

$$28 + 3 + 1 = 32$$

정답 32

28. 출제의도 : 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\angle BPC = \angle BAC = \frac{\pi}{3} \text{ 이고,}$$

$$\overline{BC} = 2\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

삼각형 PBC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{PC}}{\sin\theta} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}$$

$$\therefore \overline{PC} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \times \sin\theta = 4\sin\theta$$

선분 PC를 한 변으로 하는 정삼각형의 내접원의 반지름의 길이를 r 라 하면

$$r = 4\sin\theta \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\theta$$

따라서 내접원의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \pi \times \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin\theta \right)^2 \\ &= \pi \times \frac{4}{3} \sin^2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{\theta^2} &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\pi \times \frac{4}{3} \sin^2\theta}{\theta^2} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow +0} \left(\frac{4}{3} \pi \times \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} \pi \times 1^2$$

$$= \frac{4}{3} \pi$$

따라서 $a = \frac{4}{3}$ 이므로

$$60a = 60 \times \frac{4}{3} = 80$$

정답 80

29. 출제의도 : 공간도형에 관련된 내적 문제를 해결할 수 있는가?

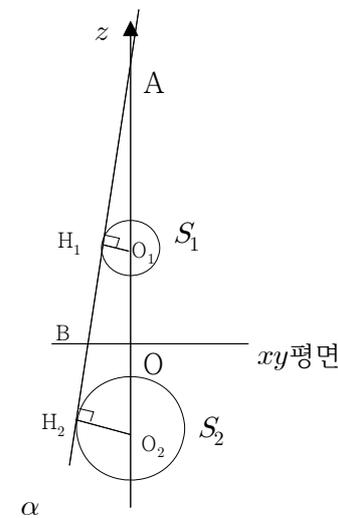
정답풀이 :

두 구 S_1, S_2 의 중심을 각각 O_1, O_2 라 하고 평면 α 와 구 S_1, S_2 가 접하는 점을 각각 H_1, H_2 라 하고 평면 α 가 z 축과 만나는 점을 A라 하자.

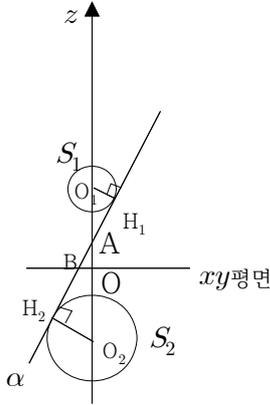
또, 평면 α 와 xy 평면이 만나서 생기는 직선에 원점에서 내린 수선의 발을 B라 하자.

이때, 평면 α 가 두 구와 접하는 경우는 다음 두 가지 경우이다.

(i)



(ii)



xy평면 위의 점 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ 에 대하여

$$\overline{OP} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{36}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{--- ㉞}$$

이때, (i)의 경우 $\overline{O_1H_1} = 1$, $\overline{O_2H_2} = 2$ 이고 $\overline{O_1O_2} = 6$ 이므로

$$\overline{AO_1} = 6$$

이때,

$$\begin{aligned} \overline{AH_1} &= \sqrt{\overline{AO_1}^2 - \overline{O_1H_1}^2} \\ &= \sqrt{6^2 - 1^2} \\ &= \sqrt{35} \end{aligned}$$

$$\text{이므로 } \frac{\overline{O_1H_1}}{\overline{AH_1}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{AO}} \text{에서}$$

$$\frac{1}{\sqrt{35}} = \frac{\overline{OB}}{9}$$

$$\overline{OB} = \frac{9}{\sqrt{35}} \quad \text{---- ㉟}$$

그러므로 ㉞과 ㉟에서

$$\overline{OB} > \overline{OP}$$

이므로 (i)의 경우는 없다.

(ii)의 경우 $\overline{O_1A} = x$ 라 하면 $\overline{AO_2} = 6 - x$

이므로

$$\frac{\overline{O_1H_1}}{\overline{AO_1}} = \frac{\overline{O_2H_2}}{\overline{AO_2}}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{6-x}$$

$$x = 2$$

그러므로 점 A의 좌표는 (0, 0, 1)이다.

이때, 평면 α 의 법선벡터를 $(a, b, 1)$ 로 놓고 평면의 방정식을 $ax + by + z + d = 0$ 라 하면 이 평면이 점 A(0, 0, 1)를 지나므로 대입하면

$$1 + d = 0$$

$$\therefore d = -1$$

이때, 평면의 방정식은

$$ax + by + z - 1 = 0$$

구 S_1 의 중심 $O_1(0, 0, 3)$ 과 이 평면사이의 거리가 1이므로

$$\frac{|3-1|}{\sqrt{a^2+b^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2+1}} = 1$$

$$a^2 + b^2 = 3 \quad \text{---- ㊸}$$

또, 평면 α 가 점 $P\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ 를 지나므로 대입하면

$$\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{6}b - 1 = 0$$

$$3a + \sqrt{3}b = 6 \quad \text{--- ㊹}$$

㊸에서

$$b = -\sqrt{3}a + 2\sqrt{3} \quad \text{-- ㊺}$$

을 ㊹에 대입하면

$$a^2 + (-\sqrt{3}a + 2\sqrt{3})^2 = 3$$

$$4a^2 - 12a + 12 = 3$$

$$4a^2 - 12a + 9 = 0$$

$$(2a - 3)^2 = 0$$

$$a = \frac{3}{2}$$

이때, ㊹에 대입하면

$$b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

또, 평면 α 가 점 $Q(k, -\sqrt{3}, 2)$ 를 지나

므로 대입하면

$$ka - \sqrt{3}b + 1 = 0$$

$$\frac{3}{2}k = \frac{3}{2} - 1$$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

따라서, $120k = 40$

정답 40

30. 출제의도 : 미분을 활용하여 부등식이 항상 성립할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x \text{ 에서}$$

$$f'(x) = (2ax + b)e^x + (ax^2 + bx + c)e^x$$

$$= \{ax^2 + (2a+b)x + b+c\}e^x$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서}$$

$$ax^2 + (2a+b)x + b+c = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

조건(가)에서 방정식 $\textcircled{1}$ 의 두 근이

$-\sqrt{3}, \sqrt{3}$ 이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$$2a + b = 0, \quad \frac{b+c}{a} = -3$$

$$\therefore b = -2a, \quad c = -a$$

조건(나)에서

$0 \leq x_1 < x_2$ 일 때,

$$f(x_2) - f(x_1) + x_2 - x_1 \geq 0 \text{ 이므로}$$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} + 1 \geq 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

함수 $f(x)$ 는 닫힌 구간 $[x_1, x_2]$ 에서 연속이고, 열린구간 (x_1, x_2) 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$$

인 c 가 x_1 과 x_2 사이에 존재한다.

$0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 부등식 $\textcircled{2}$ 이 성립하므로

임의의 양수 c 에 대하여

$$f'(c) + 1 \geq 0$$

이 성립한다.

$$f'(x) = (ax^2 - 3a)e^x \text{ 이므로}$$

$x > 0$ 일 때, 부등식

$$(ax^2 - 3a)e^x + 1 \geq 0$$

이 항상 성립한다.

$a > 0$ 이므로

$$(x^2 - 3)e^x \geq -\frac{1}{a} \quad \dots \textcircled{3}$$

이고,

$$g(x) = (x^2 - 3)e^x \text{ 이라 하면}$$

$$g'(x) = 2xe^x + (x^2 - 3)e^x$$

$$= (x^2 + 2x - 3)e^x$$

$$= (x+3)(x-1)e^x$$

$$g'(x) = 0 \text{ 에서 } x = -3 \text{ 또는 } x = 1 \text{ 이므로}$$

$x > 0$ 일 때, $g(x)$ 는 $x = 1$ 에서 최솟값을 갖는다.

$g(1) = -2e$ 이므로 부등식 $\textcircled{3}$ 이 $x > 0$ 에서 항상 성립하려면

$$-2e \geq -\frac{1}{a} \text{ 이다.}$$

$$\text{즉, } a \leq \frac{1}{2e} \text{ 이므로}$$

$$abc = a \times (-2a) \times (-a) = 2a^3$$

$$\leq 2 \times \left(\frac{1}{2e}\right)^3 = \frac{1}{4e^3}$$

따라서 abc 의 최댓값은 $\frac{1}{4e^3}$ 이므로

$$k = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 60k = 60 \times \frac{1}{4} = 15$$

정답 15