2015학년도 11월 고1 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	③	**2**	④	**3**	①	**4**	⑤	**5**	②
6	④	**7**	①	**8**	⑤	**9**	②	**10**	③
11	②	**12**	②	**13**	④	**14**	①	**15**	①
16	③	**17**	③	**18**	④	**19**	⑤	**20**	⑤
21	④	**22**	36	**23**	3	**24**	11	**25**	256
26	6	**27**	10	**28**	7	**29**	615	**30**	22

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(2x^2-3xy)+(x^2+xy)$
$=2x^2+x^2-3xy+xy=3x^2-2xy$

2. [출제의도] 합성함수의 값 계산하기

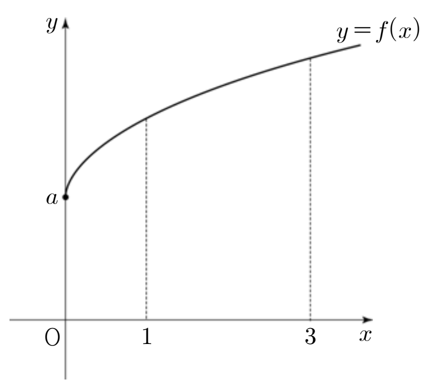
$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=4$

3. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

$x^2+ax+4=x(x+2)+b$
$x^2+ax+4=x^2+2x+b$
위 등식이 x에 대한 항등식이므로
$a=2,\ b=4$
따라서 $a+b=6$

4. [출제의도] 무리함수 그래프의 성질 이해하기

함수 $f(x)=\sqrt{x}+a$의 그래프의 개형은
다음과 같다.



$1\le x\le 3$에서 함수 $y=f(x)$는
$x=1$일 때 최솟값 6을 가지므로
$f(1)=1+a=6$
따라서 $a=5$

5. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

$|x-a|<3$에서
$-3<x-a<3$
$a-3<x<a+3$
이 부등식의 해가 $4<x<10$이므로
$a=7$

6. [출제의도] 등차수열의 합 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
$a_3=1+2d=9$
$\therefore\ d=4$
따라서 $S_{10}=\dfrac{10(2+9\times 4)}{2}=190$

7. [출제의도] 복소수의 성질 이해하기

$z=2-3i$에서 $\overline{z}=2+3i$
$(1+2i)\overline{z}=(1+2i)(2+3i)$
$=2+3i+4i-6$
$=-4+7i$

8. [출제의도] 연립이차방정식의 해 이해하기

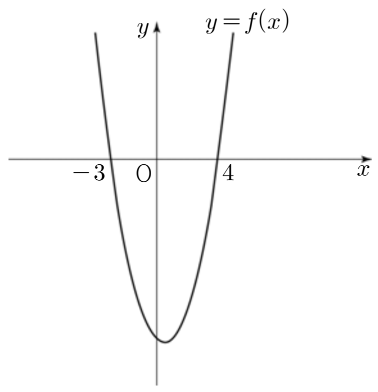
$\begin{cases}2x-y=-3 & \cdots\cdots ㉠\\ 2x^2+y^2=27 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$
㉠에서 $y=2x+3$을 ㉡에 대입하면
$2x^2+(2x+3)^2=27$
$6x^2+12x-18=0$
$(x+3)(x-1)=0$
$\therefore\ x=1,\ y=5$ 또는 $x=-3,\ y=-3$
$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=5$ ($\because\ \alpha>0,\ \beta>0$)
따라서 $\alpha\times\beta=5$

9. [출제의도] 도형의 평행이동 이해하기

직선 $y=kx+1$을 x축의 방향으로 2만큼,
y축의 방향으로 -3만큼 평행이동시킨
직선의 방정식은
$y+3=k(x-2)+1$
$y=kx-2k-2$
이 직선이 원 $(x-3)^2+(y-2)^2=1$의
중심 $(3,2)$를 지나므로
$2=3k-2k-2$
따라서 $k=4$

10. [출제의도] 이차함수와 이차부등식의 관계 추론하기

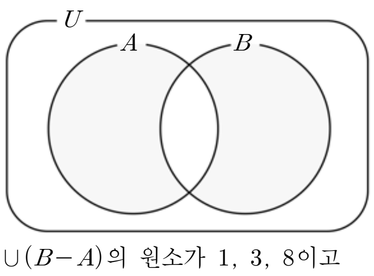
$x^2-x-12=(x+3)(x-4)$이므로
이차함수 $f(x)=x^2-x-12$의 그래프는



$f(x)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$-3<x<4$
함수 $y=f(x-1)$의 그래프는
함수 $y=f(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 1만큼 평행이동시킨 그래프이다.
$f(x-1)<0$을 만족시키는 x의 값의 범위는
$-2<x<5$이므로
정수 x는 $-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$
따라서 모든 정수 x의 값의 합은 9

11. [출제의도] 집합의 연산 추론하기

$(A\cap B^C)\cup(A^C\cap B)=(A-B)\cup(B-A)$이고
벤 다이어그램으로 나타내면 그림과 같다.



$(A-B)\cup(B-A)$의 원소가 1, 3, 8이고
$n(A)=3,\ n(B)=2$이므로 $n(A\cap B)=1$이어야 한다.
$\therefore\ a-1\in A\cap B$
$a-1$은 B의 원소 중 어느 하나와 같아야 한다.
(ⅰ) $a-1\ne a+2$
(ⅱ) $a-1=a^2-4a-7$이고 $a+2=8$일 때,
$a=6$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $a=6$

12. [출제의도] 유리함수의 그래프의 점근선 이해하기

유리함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-a}$의 그래프와 그 역함수의
그래프가 일치하려면 두 점근선의 교점이
직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.
$y=\dfrac{2x-1}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a-1}{x-a}=\dfrac{2a-1}{x-a}+2$
이므로 점근선은 두 직선 $x=a,\ y=2$
따라서 $a=2$
[다른풀이]
함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-a}$ $(x\ne a,\ y\ne 2)$의 역함수를 구하면
$x=\dfrac{2y-1}{y-a}$ $(x\ne 2,\ y\ne a)$
$x(y-a)=2y-1$
$(x-2)y=ax-1$
$y=\dfrac{ax-1}{x-2}$
$y=\dfrac{2x-1}{x-a}$과 $y=\dfrac{ax-1}{x-2}$의 그래프가 일치하므로
$a=2$

13. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치관계 이해하기

$a=2$일 때, $g(x)=\dfrac{1}{2}x,\ f(x)=x^2-4x$
직선 l의 방정식을 $y=mx+k$라 하자.
$\dfrac{1}{2}\times m=-1$
$m=-2$
$\therefore\ y=-2x+k$
직선 l이 이차함수 $f(x)=x^2-4x$의 그래프와
접하기 위해서는 방정식 $x^2-4x=-2x+k$가
중근을 가져야 하므로
$x^2-2x-k=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-2)^2-4\times 1\times(-k)=4+4k=0$
따라서 직선 l의 y절편 $k=-1$

14. [출제의도] 절대부등식을 활용하여 문제해결하기

이차함수 $f(x)=x^2-2ax$의 그래프와
직선 $g(x)=\dfrac{1}{a}x$가 만나는 점 A는
$x^2-2ax=\dfrac{1}{a}x$
$x-2a=\dfrac{1}{a}$ ($\because\ x>0$)
$x=2a+\dfrac{1}{a},\ y=2+\dfrac{1}{a^2}$
$\therefore\ \mathrm{A}\left(2a+\dfrac{1}{a},\ 2+\dfrac{1}{a^2}\right)$
이차함수 $f(x)=x^2-2ax=(x-a)^2-a^2$의 그래프의
꼭짓점은 $\mathrm{B}(a,\ -a^2)$
선분 AB의 중점은 $\mathrm{C}\left(\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2a},\ 1+\dfrac{1}{2a^2}-\dfrac{a^2}{2}\right)$
선분 CH의 길이는
점 C의 x좌표와 같으므로 ($\because\ a>0$)
선분 CH의 길이의 최솟값은
$\dfrac{3}{2}a+\dfrac{1}{2a}\ge 2\sqrt{\dfrac{3}{2}a\times\dfrac{1}{2a}}=\sqrt{3}$

$\left(\text{단, 등호는 } a=\frac{\sqrt{3}}{3}\text{일 때 성립한다.}\right)$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 추론하기

(가)에서

$a_2=a_1+3=4$

$a_3=a_2+3=7$

$a_4=a_3+3=10$

$a_5=a_4+3=13$

$a_6=a_5+3=16$

(나)에서

$a_{50}=a_{44}=a_{38}=\cdots=a_2=4$

16. [출제의도] 무리식을 활용하여 문제해결하기

별 A, B의 표면 온도를 각각 T_A, T_B,
반지름의 길이를 각각 R_A, R_B,
광도를 각각 L_A, L_B라 하면

$T_A=\frac{1}{2}T_B$이고 $R_A=36R_B$이다.

$L_A=kL_B$라 하면 $T_A{}^2=\frac{1}{R_A}\sqrt{\frac{L_A}{4\pi\sigma}}$ 에서

$\left(\frac{1}{2}T_B\right)^2=\frac{1}{36R_B}\sqrt{\frac{kL_B}{4\pi\sigma}}$

$\frac{1}{4}T_B{}^2=\frac{1}{36R_B}\sqrt{\frac{kL_B}{4\pi\sigma}}$

$T_B{}^2=\frac{\sqrt{k}}{9}\times\frac{1}{R_B}\sqrt{\frac{L_B}{4\pi\sigma}}=\frac{\sqrt{k}}{9}\times T_B{}^2$

$\therefore\ \frac{\sqrt{k}}{9}=1$

따라서 $k=81$

17. [출제의도] 명제와 진리집합의 관계를 활용하여 추론하기

ㄱ. $\sim p\Rightarrow r$이므로 $P^C\subset R$ (참)

ㄴ. (반례) $U=\{1,2,3\}$, $P=\{1,2\}$, $Q=\{2\}$,
$R=\{1,3\}$일 때, $P\not\subset Q$ (거짓)

ㄷ. $r\Rightarrow\sim q$에서 $q\Rightarrow\sim r$이므로

$Q\subset R^C$ ……㉠

$\sim p\Rightarrow r$에서 $\sim r\Rightarrow p$이므로

$R^C\subset P$ ……㉡

$\sim r\Rightarrow q$이므로

$R^C\subset Q$ ……㉢

㉠, ㉡에 의하여 $Q\subset R^C\subset P$이므로 $Q\subset P$

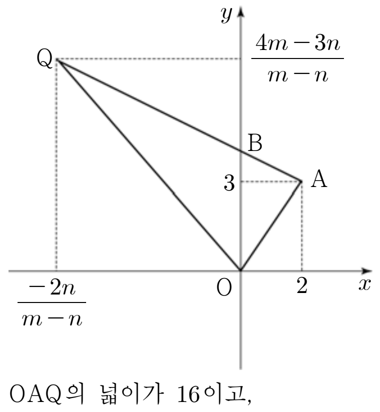
$\therefore\ P\cap Q=Q$

㉠, ㉢에 의하여 $Q=R^C$

$\therefore\ P\cap Q=Q=R^C$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ

18. [출제의도] 외분을 활용하여 문제해결하기



삼각형 OAQ의 넓이가 16이고,

삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{1}{2}\times4\times2=4$이므로

삼각형 OBQ의 넓이는 12이다.

삼각형 OBQ의 밑변을 선분 OB로 하면

$\overline{OB}=4$이므로 높이는 6

점 Q의 x좌표는 $\frac{-2n}{m-n}$이므로 $\left|\frac{-2n}{m-n}\right|=6$

$\therefore\ \frac{-2n}{m-n}=-6$ ($\because\ m>n>0$)

따라서 $4n=3m$이므로 $\frac{n}{m}=\frac{3}{4}$

[다른풀이]

삼각형 OAQ의 넓이가 16, 삼각형 OAB의 넓이는 4이므로 삼각형 OBQ의 넓이는 12이다.
삼각형 OAB와 삼각형 OBQ는 각각 선분 AB와 선분 BQ를 밑변으로 할 때 높이가 같으므로
두 삼각형의 밑변의 길이의 비는 두 삼각형의 넓이의 비와 같다.

$\therefore\ \overline{AB}:\overline{BQ}=4:12=1:3$

$\therefore\ \overline{AQ}:\overline{BQ}=4:3=m:n$

따라서 $\frac{n}{m}=\frac{3}{4}$

19. [출제의도] 수학적 귀납법을 활용하여 추론하기

모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$ ……㉠

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

(i) $n=1$일 때

(좌변)$=1\times2\times3=6$

(우변)$=\frac{1\times2\times3\times4}{4}=6$

이므로 ㉠이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 ㉠이 성립한다고 가정하면

$\sum_{k=1}^{m}k(k+1)(k+2)=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$ ……㉡

㉡의 양변에 $\boxed{(m+1)(m+2)(m+3)}$을 더하면

$\sum_{k=1}^{m+1}k(k+1)(k+2)$

$=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{4}+\boxed{(m+1)(m+2)(m+3)}$

$=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)+4(m+1)(m+2)(m+3)}{4}$

$=\frac{(m+1)(m+2)\times\boxed{(m+3)(m+4)}}{4}$

따라서 $n=m+1$일 때에도 ㉠이 성립한다.

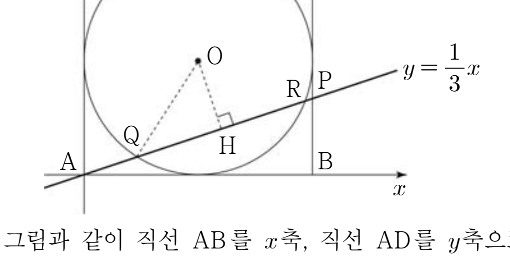
(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ㉠이 성립한다.

$\therefore\ f(m)=(m+1)(m+2)(m+3)$

$g(m)=(m+3)(m+4)$

따라서 $f(2)+g(3)=60+42=102$

20. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제해결하기



그림과 같이 직선 AB를 x축, 직선 AD를 y축으로 하는 좌표평면을 잡는다.

$\overline{AB}:\overline{BP}=3:1$

직선 AP는 기울기가 $\frac{1}{3}$이고 원점을 지나므로

직선 AP의 방정식은 $y=\frac{1}{3}x$이다.

원의 중심을 O라 하면 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 10이므로 $O(5,5)$이고, $\overline{OQ}=5$

점 $O(5,5)$에서 직선 $x-3y=0$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=\frac{|5-15|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$

$\therefore\ \overline{QH}=\sqrt{15}$

따라서 $\overline{QR}=2\sqrt{15}$

21. [출제의도] 이차함수와 이차방정식의 관계를 활용하여 문제해결하기

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표를 (a,ka)라 하면 $f(x)=(x-a)^2+ka$

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=kx+5$가 만나는 두 점의 x좌표 α, β는

방정식 $(x-a)^2+ka=kx+5$의 근이므로

$x^2-(2a+k)x+a^2+ka-5=0$에서

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2a+k$ ……㉠

$\alpha\beta=a^2+ka-5$ ……㉡

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이

직선 $x=\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4}$이므로 $\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{4}=a$

$\therefore\ \alpha+\beta=2a+\frac{1}{2}$

㉠에서 $2a+\frac{1}{2}=2a+k$이므로 $k=\frac{1}{2}$

㉡에서 $\alpha\beta=a^2+ka-5=a^2+\frac{1}{2}a-5$

따라서 $|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$=\sqrt{\left(2a+\frac{1}{2}\right)^2-4\left(a^2+\frac{1}{2}a-5\right)}$

$=\sqrt{\frac{81}{4}}=\frac{9}{2}$

22. [출제의도] 등비중항의 뜻 이해하기

세 수 3, a, 12가 이 순서대로 등비수열을 이루므로 a는 3과 12의 등비중항이다.

따라서 $a^2=3\times12=36$

23. [출제의도] 직선의 방정식 이해하기

두 점 $(-2,-3)$, $(2,5)$를 지나는 직선의 방정식은

기울기가 $\frac{5-(-3)}{2-(-2)}=2$이므로

$y-5=2(x-2)$

$y=2x+1$

이 직선이 점 $(a,7)$을 지나므로 $7=2a+1$

따라서 $a=3$

24. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식 $f(x)$를 x^2-7x로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하면

나머지가 $x+4$이므로

$f(x)=(x^2-7x)Q(x)+x+4$

$=x(x-7)Q(x)+x+4$

나머지정리에 의하여 다항식 $f(x)$를 $x-7$로 나눈 나머지는 $f(7)$과 같다.

따라서 $f(x)$를 $x-7$로 나눈 나머지는 $f(7)=11$

25. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계 이해하기

$a_n = S_n - S_{n-1}$ $(n \geq 2)$이므로

$a_n = 2^{n+2} - 4 - (2^{n+1} - 4)$

$= 2^{n+1}(2-1)$

$= 2^{n+1}$ $(n \geq 2)$

$a_1 = S_1 = 4$

$\therefore$ $a_n = 2^{n+1}$ $(n \geq 1)$

따라서 $a_7 = 2^8 = 256$

26. [출제의도] 사차방정식의 해 이해하기

$(x^2-5x)(x^2-5x+13)+42=0$

$x^2-5x=t$라 하면

$t(t+13)+42=0$

$t^2+13t+42=0$

$(t+6)(t+7)=0$

$t=x^2-5x$이므로

$(x^2-5x+6)(x^2-5x+7)=0$

$(x-3)(x-2)(x^2-5x+7)=0$

$\therefore$ $x=2$ 또는 $x=3$ 또는 $x^2-5x+7=0$

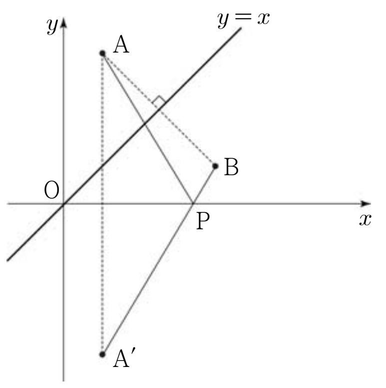
$x^2-5x+7=0$의 판별식을 D라 하면

$D=25-28=-3<0$이므로

$x^2-5x+7=0$은 허근을 갖는다.

따라서 모든 실근의 곱은 $2 \times 3 = 6$

27. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제해결하기



점 A의 좌표를 (a, b)라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점 B의 좌표는 (b, a)이고,

점 A를 x축에 대하여 대칭이동시킨 점을 A′이라 하면 $\mathrm{A}'(a, -b)$이다. $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{A'P}}$이므로

$\overline{\mathrm{AP}} + \overline{\mathrm{PB}} = \overline{\mathrm{A'P}} + \overline{\mathrm{PB}}$이고

x축 위의 점 P가 선분 A′B 위에 있을 때

최솟값 $\overline{\mathrm{A'B}} = 10\sqrt{2}$를 갖는다.

$\therefore$ $\overline{\mathrm{A'B}} = \sqrt{(a-b)^2+(a+b)^2}$

$= \sqrt{2(a^2+b^2)}$

$= 10\sqrt{2}$

따라서 $\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{a^2+b^2} = 10$

28. [출제의도] 일대일대응을 활용하여 추론하기

함수 $f(x)=a|x+2|-4x$는

(ⅰ) $x<-2$일 때, $f(x)=a(-x-2)-4x$

$=-(a+4)x-2a$

(ⅱ) $x \geq -2$일 때, $f(x)=a(x+2)-4x$

$=(a-4)x+2a$

이므로

$$f(x)=\begin{cases} -(a+4)x-2a & (x<-2) \\ (a-4)x+2a & (x \geq -2) \end{cases}$$

함수 f가 일대일대응이므로

두 직선 $y=-(a+4)x-2a$와 $y=(a-4)x+2a$의 기울기의 부호가 서로 같다.

$-(a+4)(a-4)>0$

$(a+4)(a-4)<0$

$\therefore$ $-4<a<4$

$-4<a<4$를 만족시키는 정수 a는

$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

따라서 정수 a의 개수는 7

29. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제해결하기

$x=n$일 때의 y좌표가 양수인 점 P_n의 y좌표를 y_n이라 하면 점 $\mathrm{P}_n(n, y_n)$은

원 $x^2+y^2=10^2$ 위에 있으므로

$n^2+{y_n}^2=10^2$

${y_n}^2=10^2-n^2$

점 $\mathrm{P}_n(n, y_n)$에서 원 $x^2+y^2=10^2$에 접하는

직선의 방정식은 $nx+y_ny=10^2$

$y=-\dfrac{n}{y_n}x+\dfrac{10^2}{y_n}$

y절편 $a_n=\dfrac{10^2}{y_n}=\dfrac{10^2}{\sqrt{10^2-n^2}}$

$\dfrac{100}{a_n}=\sqrt{10^2-n^2}$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{9}\left(\frac{100}{a_n}\right)^2=\sum_{n=1}^{9}(100-n^2)$

$=900-\dfrac{9\times10\times19}{6}$

$=615$

30. [출제의도] 부등식의 영역을 활용하여 문제해결하기

원 C_1의 중심은 (a, b)이고, 원 C_1을 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 원 C_2의 중심은 (b, a)이다.

두 원 C_1, C_2가 직선 $y=2x-2$와 모두 만나기 위해서는 두 원의 중심 (a, b), (b, a)와

직선 $y=2x-2$ 사이의 거리가 모두

원의 반지름의 길이 $\sqrt{5}$보다 작거나 같아야 한다.

즉, $\dfrac{|2a-b-2|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5}$, $\dfrac{|2b-a-2|}{\sqrt{5}} \leq \sqrt{5}$

$\therefore$ $-3 \leq 2a-b \leq 7$, $-3 \leq 2b-a \leq 7$

따라서 점 (a, b)는

부등식 $-3 \leq 2x-y \leq 7$과

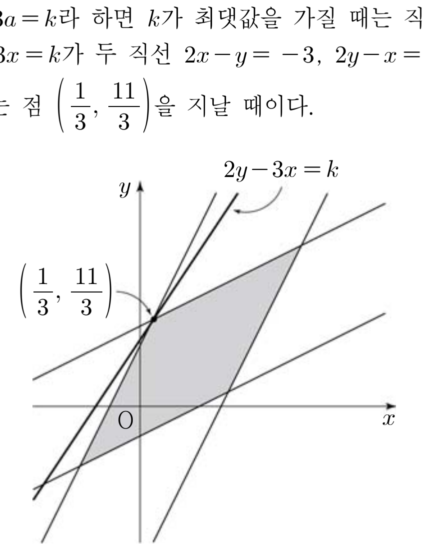
부등식 $-3 \leq 2y-x \leq 7$을

동시에 만족시키는 영역에 속하는 점이므로

$2b-3a=k$라 하면 k가 최댓값을 가질 때는 직선

$2y-3x=k$가 두 직선 $2x-y=-3$, $2y-x=7$이

만나는 점 $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{11}{3}\right)$을 지날 때이다.



그러므로 k의 최댓값은 $2\times\dfrac{11}{3}-3\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{3}$

$\therefore$ $p=3$, $q=19$

따라서 $p+q=22$