2016학년도 3월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	①	2	③	3	④	4	③	5	⑤
6	③	7	②	8	⑤	9	①	10	⑤
11	②	12	②	13	⑤	14	④	15	②
16	①	17	④	18	②	19	④	20	③
21	①	22	36	23	5	24	6	25	4
26	16	27	78	28	144	29	252	30	172

해 설

1. **[출제의도] 거듭제곱의 뜻을 알고 식의 값을 계산한다.**

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times(-2)^3=\frac{1}{4}\times(-8)$$
$$=-2$$

2. **[출제의도] 다항식의 덧셈과 뺄셈을 하여 식을 간단히 한다.**

$$2A-B=2(x+y)-(2x-3y)$$
$$=2x+2y-2x+3y$$
$$=(2-2)x+(2+3)y$$
$$=5y$$

3. **[출제의도] 일차방정식의 해를 구한다.**

$3(x-1)=2x-1$
$3x-3=2x-1$
$3x-2x=3-1$
따라서 $x=2$

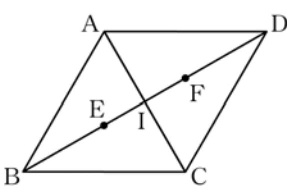
4. **[출제의도] 완전제곱식의 뜻을 이해하여 다항식이 완전제곱식이 되는 상수항을 구한다.**

다항식 x^2-8x+a가 완전제곱식이 되기 위해서는 a의 값이 일차항의 계수의 $\frac{1}{2}$의 제곱이 되어야 하므로

$$a=\left(\frac{-8}{2}\right)^2=(-4)^2=16$$

5. **[출제의도] 삼각형의 무게중심과 평행사변형의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.**

평행사변형 ABCD의 두 대각선 AC, BD의 교점을 I라 하자.

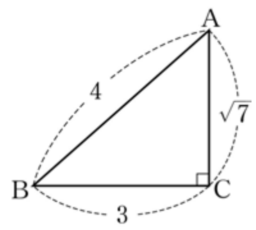


점 E는 삼각형 ABC의 무게중심이므로
$$\overline{EI}=\frac{1}{3}\overline{BI}$$
점 F는 삼각형 CDA의 무게중심이므로
$$\overline{IF}=\frac{1}{3}\overline{ID}$$
따라서 구하는 값은
$$\overline{EF}=\overline{EI}+\overline{IF}$$
$$=\frac{1}{3}\overline{BI}+\frac{1}{3}\overline{ID}$$
$$=\frac{1}{3}(\overline{BI}+\overline{ID})$$
$$=\frac{1}{3}\overline{BD}$$
$$=\frac{1}{3}\times24$$
$$=8$$

[다른풀이]
평행사변형의 두 대각선은 서로 다른 것을 이등분하므로 선분 BD는 두 삼각형의 무게중심을 지난다.
따라서 무게중심을 연결한 선분 EF의 길이는 대각선 BD의 길이의 $\frac{1}{3}$이므로
$$\overline{EF}=\frac{1}{3}\overline{BD}$$
$$=\frac{1}{3}\times24$$
$$=8$$

6. **[출제의도] 직각삼각형에서 삼각비의 뜻을 이해하여 그 값을 구한다.**

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해
$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{AC}^2$이므로
$$\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BC}^2}$$
$$=\sqrt{4^2-3^2}$$
$$=\sqrt{7}$$
따라서 $\tan B=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\sqrt{7}}{3}$



7. **[출제의도] 최소공배수의 뜻을 이해하고 소인수분해를 이용하여 최소공배수를 구한다.**

과자의 무게의 합은 75의 배수이고, 음료수의 무게의 합은 120의 배수이다.
두 무게의 합이 같으려면 과자의 무게의 합과 음료수의 무게의 합이 75와 120의 공배수이어야 한다.
두 수 75, 120을 소인수분해하면
$75=3\times5^2$
$120=2^3\times3\times5$
따라서 두 수 75, 120의 최소공배수는
$2^3\times3\times5^2$
과자의 무게의 합과 음료수의 무게의 합이 75와 120의 최소공배수가 될 때 a와 b의 값이 각각 최소이므로 $a+b$의 값도 최소가 된다.
따라서 과자 a개의 무게가 $2^3\times3\times5^2$일 때 a의 값을 구하면
$3\times5^2\times a=2^3\times3\times5^2$
$a=2^3=8$
음료수 b개의 무게가 $2^3\times3\times5^2$일 때 b의 값을 구하면
$2^3\times3\times5\times b=2^3\times3\times5^2$
$b=5$
따라서 구하는 최솟값은
$$a+b=8+5$$
$$=13$$

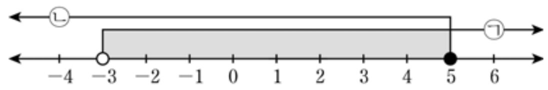
8. **[출제의도] 닮음비와 부피의 비의 관계를 이해하여 식의 값을 구한다.**

두 구슬 A, B의 지름의 길이가 각각 8 cm, 12 cm이므로 닮음비는
$8:12=2:3$
따라서 두 구슬의 부피의 비는
$2^3:3^3=8:27$
주어진 조건에 의해 두 구슬의 가격은 부피에 비례하므로
$a:b=8:27$
$27a=8b$
따라서 $\frac{b}{a}=\frac{27}{8}$

[다른풀이]
구슬 A의 부피는
$\frac{4}{3}\times\pi\times4^3=\frac{256}{3}\pi$
구슬 B의 부피는
$\frac{4}{3}\times\pi\times6^3=288\pi$
두 구슬의 가격은 구슬의 부피에 비례하므로
$a:b=\frac{256}{3}\pi:288\pi=8:27$
$27a=8b$이므로
$\frac{b}{a}=\frac{27}{8}$

9. **[출제의도] 연립일차부등식의 정수인 해의 개수를 구한다.**

연립부등식
$$\begin{cases}4x>x-9\\x+2\geq2x-3\end{cases}$$
에서 부등식 $4x>x-9$를 풀면
$4x-x>-9$
$3x>-9$
$x>-3$ … ㉠
부등식 $x+2\geq2x-3$을 풀면
$x-2x\geq-2-3$
$-x\geq-5$
$x\leq5$ … ㉡
두 부등식 ㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



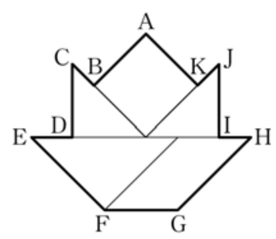
위 그림에서 구하는 x의 값의 범위는
$-3<x\leq5$
따라서 구하는 정수 x는
$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$
이므로 개수는 8이다.

10. **[출제의도] 도수분포표를 이해하고 실생활 문제와 관련된 확률을 구한다.**

주어진 도수분포표에서 도수의 합이 20이므로
$3+2+6+4+a=20$
위 등식으로부터
$a=5$이다.
한편 주어진 도수분포표에서 한 학기 동안 이수한 방과후학교의 이수시간이 30시간 이상인 학생 수는
$4+a=4+5=9$
따라서 구하는 확률은 $\frac{9}{20}$이다.

11. **[출제의도] 무리수의 뜻을 이해하여 도형의 둘레의 길이를 구한다.**

한 변의 길이가 1인 정사각형의 대각선의 길이는 $\sqrt{2}$이다.
다음과 같이  모양의 도형에서 각 꼭짓점을 차례로
A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K
라 하자.



이 도형의 각 변의 길이를 구하면 다음과 같다.
$\overline{AB}=\sqrt{2}$
$\overline{BC}=2-\sqrt{2}$
$\overline{CD}=\sqrt{2}$

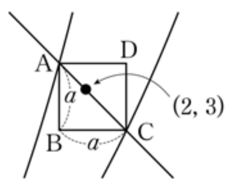
$\overline{DE}+\overline{IH}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$
$\overline{EF}=2$
$\overline{FG}=\sqrt{2}$
$\overline{GH}=2$
$\overline{IJ}=\sqrt{2}$
$\overline{JK}=2-\sqrt{2}$
$\overline{KA}=\sqrt{2}$
따라서  모양의 도형의 둘레의 길이는
$\sqrt{2}+2(2-\sqrt{2})+\sqrt{2}+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+\sqrt{2}$
$=8+4\sqrt{2}$

12. [출제의도] 줄기와 잎 그림을 이해하여 자료의 평균을 구한다.

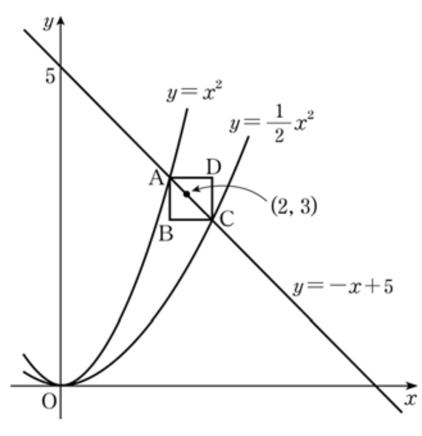
줄기가 0일 때의 자료의 합은
$1+1+2+2+3+4+5+9=27$
줄기가 1일 때의 자료의 합은
$10\times6+(0+1+1+a+7+8)=a+77$
줄기가 2일 때의 자료의 합은
$20\times5+(a+6+8+8+8)=a+130$
줄기가 3일 때의 자료의 합은
$a+30$
주어진 조건에서 20개의 자료의 평균이 13.5이다.
이때
$(\text{평균})=\dfrac{(\text{변량의 총합})}{(\text{변량의 개수})}$
이므로 평균을 구하면
$(\text{평균})=\dfrac{27+(a+77)+(a+130)+(a+30)}{20}$
$=\dfrac{3a+264}{20}$
$=13.5$
$3a+264=270$에서 $3a=6$
따라서 $a=2$

13. [출제의도] 일차함수의 그래프를 이해하여 직선의 기울기와 y절편을 구한다.

정사각형 ABCD의 각 변의 길이가 모두 같으므로
$\overline{AB}=\overline{BC}=a$라 하자.

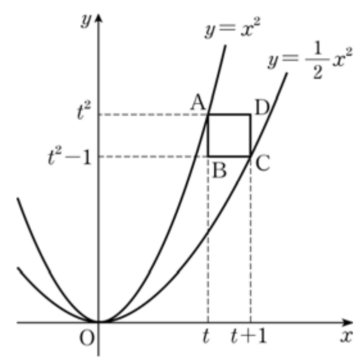


그러면 직선 AC의 기울기는
$\dfrac{-a}{a}=-1$이다.
직선 AC의 y절편을 b라 하면 이 직선의 방정식은
$y=-x+b$
이 직선이 점 $(2,3)$을 지나므로 $x=2$, $y=3$을 대입하면
$3=-2+b$에서 $b=5$
따라서 직선 AC의 y절편은 5이다.



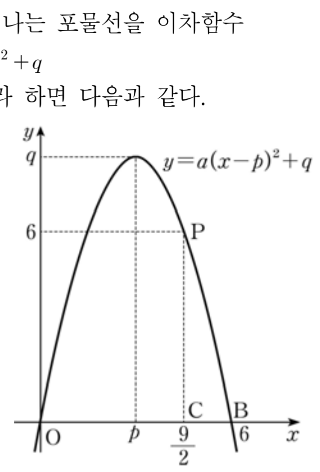
14. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

이차함수 $y=x^2$의 그래프 위의 점 A의 x좌표를 t라 하면 점 A의 좌표는 다음과 같다.
$A(t,\ t^2)$
점 A의 x좌표가 t이고 정사각형 ABCD의 한 변의 길이가 1이므로 점 C의 x좌표는 $t+1$이고 점 C의 y좌표는 t^2-1이다.
따라서 점 C의 좌표는 다음과 같다.
$C(t+1,\ t^2-1)$ ⋯ ㉠
한편 조건에 의해 점 C는 이차함수 $y=\dfrac{1}{2}x^2$의 그래프 위의 점이므로 점 C의 x좌표 $t+1$을 $y=\dfrac{1}{2}x^2$에 대입하면 점 C의 y좌표는
$\dfrac{1}{2}(t+1)^2$
따라서 점 C의 좌표는
$C\left(t+1,\ \dfrac{1}{2}(t+1)^2\right)$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서
$t^2-1=\dfrac{1}{2}(t+1)^2$
위 등식을 정리하면
$2t^2-2=t^2+2t+1$
$t^2-2t-3=0$
인수분해하면
$(t+1)(t-3)=0$
따라서 $t=-1$ 또는 $t=3$
점 A는 제1사분면의 점이므로
$t>0$에서 $t=3$
따라서 점 A의 x좌표는 3이므로 y좌표는
$3^2=9$이다.
그러므로 점 A의 x좌표와 y좌표의 합은
$3+9=12$이다.



15. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

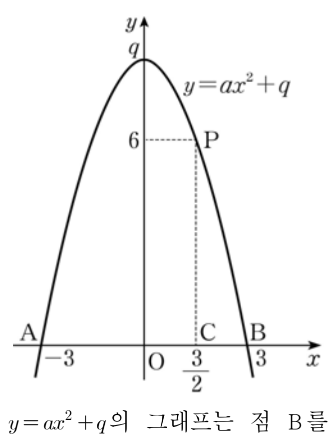
A지점을 원점 O, 지면을 x축, 원점 O를 지나고 지면과 수직인 직선을 y축으로 하는 좌표평면을 생각하자.
지점 B의 좌표는 다음과 같다.
$B(6,\ 0)$
지점 C의 좌표는 다음과 같다.
$C\left(\dfrac{9}{2},\ 0\right)$
지점 P의 좌표는 다음과 같다.
$P\left(\dfrac{9}{2},\ 6\right)$
세 점을 지나는 포물선을 이차함수
$y=a(x-p)^2+q$
의 그래프라 하면 다음과 같다.



이 그래프의 축의 방정식은
$x=3$이므로 $p=3$
따라서 이차함수는
$y=a(x-3)^2+q$
이다. 이차함수 $y=a(x-3)^2+q$의 그래프는 원점을 지나므로
$0=a(0-3)^2+q$
위 식을 정리하면
$0=9a+q$ ⋯ ㉠
이차함수 $y=a(x-3)^2+q$의 그래프는 점 B를 지나고 점 B의 좌표는 $(6,\ 0)$이므로
$0=a(6-3)^2+q$
위 식을 정리하면
$0=9a+q$
이차함수 $y=a(x-3)^2+q$의 그래프는 점 P를 지나고 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{9}{2},\ 6\right)$이므로
$6=a\left(\dfrac{9}{2}-3\right)^2+q$
위 식을 정리하면
$6=\dfrac{9}{4}a+q$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서
$6=\dfrac{9}{4}a-9a$
$a=-\dfrac{8}{9}$
$q=-9\times\left(-\dfrac{8}{9}\right)=8$
$y=-\dfrac{8}{9}(x-3)^2+8$
따라서 이차함수
$y=-\dfrac{8}{9}(x-3)^2+8$
은 $x=3$일 때 최댓값이 8이므로 공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 8m이다.

[다른풀이]

지면을 x축, 포물선의 축을 y축, A지점을
점 $(-3,\ 0)$으로 하는 좌표평면을 생각하자.
그러면 지점 B의 좌표는 다음과 같다.
$B(3,\ 0)$
지점 C의 좌표는 다음과 같다.
$C\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$
지점 P의 좌표는 다음과 같다.
$P\left(\dfrac{3}{2},\ 6\right)$
세 점을 지나는 포물선을 이차함수
$y=ax^2+q$
의 그래프라 하면 다음과 같다.



이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 점 B를 지나고 점 B의 좌표는 $(3,\ 0)$이므로
$0=a\times3^2+q$
위 식을 정리하면
$0=9a+q$ ⋯ ㉠
이차함수 $y=ax^2+q$의 그래프는 점 P를 지나고 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{3}{2},\ 6\right)$이므로
$6=a\times\left(\dfrac{3}{2}\right)^2+q$

위 식을 정리하면

$6=\frac{9}{4}a+q$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$6=\frac{9}{4}a-9a$

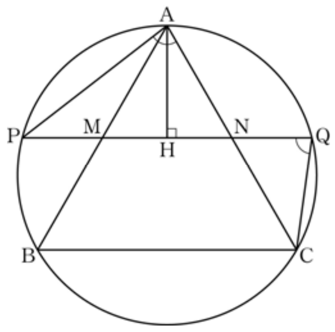
$a=-\frac{8}{9}$

$q=-9\times\left(-\frac{8}{9}\right)=8$

$y=-\frac{8}{9}x^2+8$

따라서 이차함수 $y=-\frac{8}{9}x^2+8$은 $x=0$일 때 최댓값이 8이므로 공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 8m이다.

16. [출제의도] 원주각의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



두 점 M, N이 각각 두 선분 AB, AC의 중점이므로

$\overline{MN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\boxed{3}$

$\overline{PM}=x$라 하자.

점 A에서 선분 MN에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC가 정삼각형이므로 직선 AH는 원의 중심을 지나고 원의 성질에 의해

$\overline{PH}=\overline{HQ}$

한편 $\overline{MH}=\overline{HN}$이므로

$\overline{NQ}=\overline{PM}=x$

호 PC에 대한 원주각의 크기는 일정하므로

$\angle PAC=\angle PQC$이고

맞꼭지각의 크기가 같으므로

$\angle ANP=\angle QNC$이다.

따라서 $\triangle APN \backsim \triangle QCN$이므로

$\overline{AN}:\overline{PN}=\overline{QN}:\overline{CN}$

이때 $\overline{AN}=\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{AC}=3$이므로

$3:\boxed{x+3}=x:3$

이다.

$x(x+3)=9$

$x^2+3x-9=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$

$x>0$이므로

$x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

그러므로

$\overline{PQ}=2\overline{PM}+\overline{MN}$

$=2x+3$

$=2\times\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}+3$

$=-3+3\sqrt{5}+3$

$=\boxed{3\sqrt{5}}$

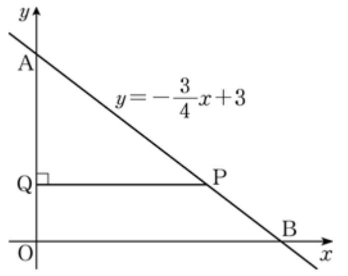
따라서 $a=3$, $b=3\sqrt{5}$이므로

$\frac{b}{a}=\frac{3\sqrt{5}}{3}$

$=\sqrt{5}$

17. [출제의도] 일차함수의 그래프와 삼각형의 닮음의 성질을 이용하여 점의 좌표를 구한다.

일차함수 $y=-\frac{3}{4}x+3$의 그래프가 x축과 만나는 점을 B라 하고 원점을 O라 하자.



일차함수 $y=-\frac{3}{4}x+3$의 그래프의 y절편은

$x=0$을 대입하면 $y=3$

일차함수 $y=-\frac{3}{4}x+3$의 그래프의 x절편은

$y=0$을 대입하면 $0=-\frac{3}{4}x+3$

$\frac{3}{4}x=3$이므로 $x=4$

따라서 삼각형 AOB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times4\times3=6$

한편 두 직각삼각형 AQP, AOB에서

$\angle QAP=\angle OAB$이므로

$\triangle AQP \backsim \triangle AOB$ (AA 닮음)

따라서 $\triangle AQP=\frac{8}{3}$, $\triangle AOB=6$에서

$\triangle AQP:\triangle AOB=\frac{8}{3}:6=4:9$

삼각형 AQP와 삼각형 AOB의 넓이의 비가 $4:9$이므로 두 삼각형 AQP, AOB의 닮음비는 $2:3$이다.

$\overline{AO}=3$, $\overline{AQ}=2$이므로 점 Q의 y좌표는 1이고 점 P의 y좌표는 점 Q의 y좌표와 같으므로 1이다.

[다른풀이]

일차함수 $y=-\frac{3}{4}x+3$의 그래프의 y절편이 3이므로 점 A$(0, 3)$이다.

점 P의 y좌표를 k라 하고 x좌표를 구하면

$k=-\frac{3}{4}x+3$

에서

$x=\frac{4}{3}(3-k)$

따라서 삼각형 AQP의 넓이는

$\triangle AQP=\frac{1}{2}\times\overline{AQ}\times\overline{QP}$

$=\frac{1}{2}\times(3-k)\times\frac{4}{3}(3-k)$

$=\frac{2}{3}(3-k)^2$

주어진 조건에서

$\frac{2}{3}(3-k)^2=\frac{8}{3}$

$(3-k)^2=4$

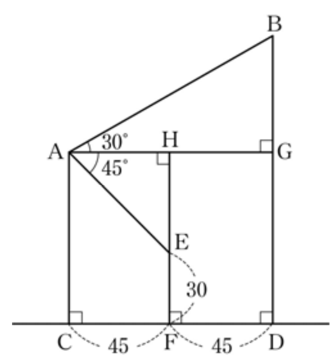
$k^2-6k+5=0$

따라서 $k=1$ 또는 $k=5$

$0<k<3$이므로 $k=1$

따라서 점 P의 y좌표는 1이다.

18. [출제의도] 삼각비의 값을 활용하여 높이를 구하는 실생활 문제를 해결한다.



선분 EF의 연장선이 선분 AG와 만나는 점을 H라 하자.

직각삼각형 AEH에서

$\tan45°=\frac{\overline{HE}}{\overline{AH}}$

따라서

$\overline{HE}=\overline{AH}\tan45°$

$=45\tan45°$

$=45$

직각삼각형 AGB에서

$\tan30°=\frac{\overline{BG}}{\overline{AG}}$

따라서

$\overline{BG}=\overline{AG}\tan30°$

$=90\tan30°$

$=90\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=30\sqrt{3}$

그러므로 구하는 값은

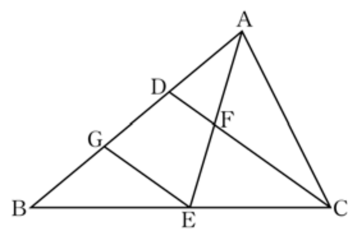
$\overline{BD}=\overline{BG}+\overline{GD}$

$=\overline{BG}+\overline{HE}+\overline{EF}$

$=30\sqrt{3}+45+30$

$=75+30\sqrt{3}$

19. [출제의도] 닮은 삼각형의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.



선분 BD의 중점을 G라 하고 두 점 G, E를 선분으로 연결하면

$\triangle BCD \backsim \triangle BEG$이므로

$\overline{EG}=\frac{1}{2}\overline{CD}$

선분 BD의 중점이 G이므로

$\overline{GE}\,/\!/\,\overline{DC}$

또, $\triangle AGE$에서

$\overline{DF}\,/\!/\,\overline{GE}$, $\overline{AD}=\overline{DG}$이므로

$\overline{AF}=\overline{FE}$

두 점 D, F는 각각 선분 AG와 선분 AE의 중점이므로

$\overline{FD}=\frac{1}{2}\overline{EG}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overline{CD}\right)$

$=\frac{1}{4}\overline{CD}$

에서

$\overline{FC}=\overline{CD}-\overline{FD}$

$=\overline{CD}-\frac{1}{4}\overline{CD}$

$=\frac{3}{4}\overline{CD}$

따라서 $\overline{DF}:\overline{CF}=1:3$

$\overline{CF}=3\overline{DF}$

따라서 두 삼각형 ADF, FEC의 넓이를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\triangle ADF=\frac{1}{2}\times\overline{DF}\times\overline{AF}\times\sin(\angle AFD)$

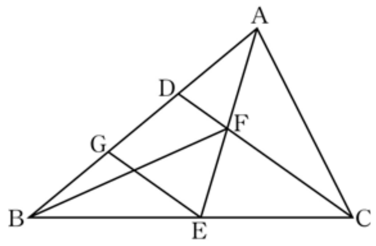
$\triangle FEC=\frac{1}{2}\times\overline{CF}\times\overline{FE}\times\sin(\angle CFE)$

$=\frac{1}{2}\times(3\overline{DF})\times\overline{AF}\times\sin(\angle AFD)$

$=3\times\triangle ADF$

따라서 $\frac{\triangle ADF}{\triangle FEC}=\frac{1}{3}$

[다른풀이]



선분 BD 의 중점을 G 라 하면

$\overline{\mathrm{GE}} /\!/ \overline{\mathrm{DC}}$

또, $\triangle\mathrm{AGE}$ 에서

$\overline{\mathrm{DF}} /\!/ \overline{\mathrm{GE}}$, $\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{DG}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AF}} = \overline{\mathrm{FE}}$

$\triangle\mathrm{ABF} = \triangle\mathrm{FBE} = \triangle\mathrm{FEC} = \triangle\mathrm{FCA}$

$\overline{\mathrm{AD}} : \overline{\mathrm{DB}} = 1:2$ 이므로

$\triangle\mathrm{ADF} = \frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABF}$

$= \frac{1}{3}\triangle\mathrm{FEC}$

따라서 $\frac{\triangle\mathrm{ADF}}{\triangle\mathrm{FEC}} = \frac{1}{3}$

20. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이용하여 성립하는 내용을 추측한다.

ㄱ. $x=1$, $y=1$ 을 $y=x^2-ax+a$ 에 대입하면

$1=1^2-a+a$

이므로 이차함수 $y=x^2-ax+a$ 의 그래프는 점 $(1, 1)$ 을 지난다. (참)

ㄴ. $y=x^2-ax+a=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+a$

에서 이차함수 $y=x^2-ax+a$ 의 그래프의 꼭짓점의 x 좌표는 $\frac{a}{2}$ 이다.

이차함수 $y=x^2-ax+a$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{a}{2}$ 만큼 평행이동하면 꼭짓점의 x 좌표는

$\frac{a}{2}+\left(-\frac{a}{2}\right)=0$

이 되므로

$y=x^2-\frac{a^2}{4}+a$

이다. 따라서 이차함수 $y=x^2-\frac{a^2}{4}+a$ 의 그래프는 y 축에 대칭이다. (참)

ㄷ. ㄴ에서 이차함수 $y=x^2-ax+a$ 의 그래프의 꼭짓점의 좌표는

$\left(\frac{a}{2},\ -\frac{a^2}{4}+a\right)$

이므로 꼭짓점이 x 축 위에 있으려면

$-\frac{a^2}{4}+a=0$

이어야 한다.

$-\frac{a^2}{4}+a=0$

$a^2-4a=0$

인수분해하면

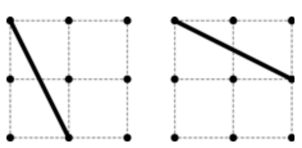
$a(a-4)=0$

$a=0$ 또는 $a=4$

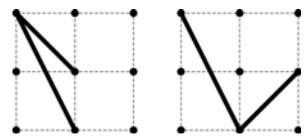
따라서 구하는 a 의 개수는 2 이다. (거짓)

21. [출제의도] 피타고라스 정리를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구한다.

두 점을 연결하여 만든 도형의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 경우는 그림과 같이 한 변의 길이가 2 인 정사각형에서 한 꼭짓점과 그 점을 포함하지 않는 변의 중점을 연결한 경우뿐이다.

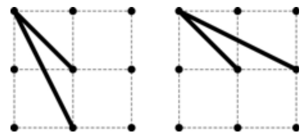


이때 하나의 점을 더 연결하여 만든 도형의 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 가 되기 위해서는 그림과 같이 선분의 길이가 $\sqrt{5}$ 인 선분의 양 끝점 중 하나와 한 변의 길이가 1 인 정사각형의 대각선을 이룰 수 있는 점을 찾아야 한다.



i) 한 변의 길이가 2 인 정사각형의 각 꼭짓점이 두 선분의 교점인 경우

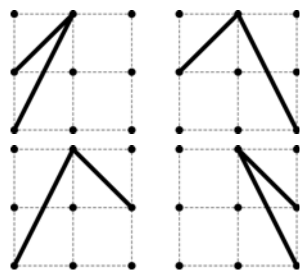
교점에서 길이가 $\sqrt{2}$ 인 선분을 만들 수 있는 점은 하나뿐이므로 길이가 $\sqrt{5}$ 인 선분을 그릴 수 있는 경우는 그림과 같이 2 가지다.



한 변의 길이가 2 인 정사각형의 꼭짓점은 4 개이므로 가능한 경우의 수는 $2\times4=8$ 이다.

ii) 한 변의 길이가 2 인 정사각형의 각 변의 중점이 두 선분의 교점인 경우

교점에서 길이가 $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ 인 선분을 만들 수 있는 경우는 각각 두 가지씩이므로 그림과 같이 4 가지 경우가 있다.



한 변의 길이가 2 인 정사각형의 변의 중점은 4 개이므로 가능한 경우의 수는 $4\times4=16$ 이다.

i), ii)에서

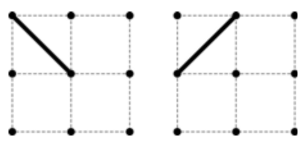
구하는 모든 도형의 개수는

$8+16=24$ 이다.

[다른풀이]

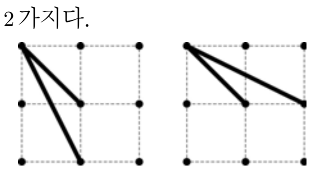
$\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{5}+\sqrt{2}$ 이므로 먼저 두 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{2}$ 인 도형을 만든 경우를 생각하자.

두 점을 연결한 도형의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 도형은 그림과 같이 정중앙에 있는 점이 다른 한 점과 연결되어 있는 경우와 정중앙에 있지 않는 8 개의 점들 중에서 2 개의 점이 연결된 경우로 나눌 수 있다.



i) 정중앙에 있는 점과 다른 한 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{2}$ 인 도형을 만든 경우는 4 가지다.

정중앙에 있는 점과 나머지 다른 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{5}$ 인 도형을 만들 수 없고, 나머지 8 개의 점들 중 2 개의 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{5}$ 인 도형을 만들 수 있다. 따라서 이 경우 그림과 같이 길이가 $\sqrt{2}$ 인 도형에 다른 한 점을 더 연결하여 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 인 도형을 만드는 방법은 각각 2 가지다.

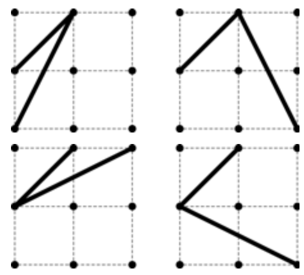


따라서 구하는 도형의 개수는

$4\times2=8$ 이다.

ii) 정중앙에 있지 않는 8 개의 점 중 2 개의 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{2}$ 인 도형을 만든 경우는 4 가지다.

이 두 점과 나머지 다른 점을 연결하여 $\sqrt{5}$ 인 선분을 각각 2 개씩 만들 수 있다. 따라서 이 경우 길이가 $\sqrt{2}$ 인 도형에 다른 한 점을 더 연결하여 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 인 도형을 만드는 방법은 4 가지다.



따라서 구하는 도형의 개수는 $4\times4=16$ 이다.

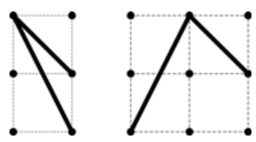
i), ii)에서

구하는 모든 도형의 개수는

$8+16=24$ 이다.

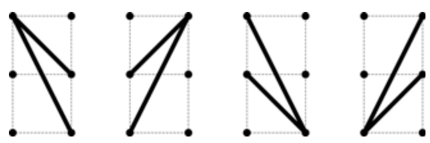
[다른풀이]

세 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 인 도형을 만드는 경우는 그림과 같이 이웃하는 변의 길이가 각각 1, 2 인 직사각형에서 길이가 2 인 변의 중점과 직사각형의 꼭짓점을 연결하는 경우와 한 변의 길이가 2 인 정사각형의 한 꼭짓점과 두 변의 중점을 연결하는 경우에서 살펴볼 수 있다.



i) 이웃하는 변의 길이가 각각 1, 2 인 직사각형을 이루는 점으로 도형을 만든 경우

한 직사각형을 이루는 6 개의 점들 중 세 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 인 도형을 만들 수 있는 경우는 다음과 같이 4 가지다.



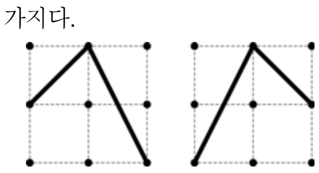
이때 주어진 9 개의 점으로 이웃하는 변의 길이가 각각 1, 2 인 직사각형 모양을 만들 수 있는 경우는 4 가지다.

따라서 만들 수 있는 도형의 개수는

$4\times4=16$ 이다.

ii) 한 변의 길이가 2 인 정사각형을 이루는 점으로 도형을 만드는 경우

정사각형을 이루는 8 개의 점들 중 세 점을 연결하여 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 인 도형 중 선분의 교점이 정사각형의 한 변 위에 놓이는 경우는 그림과 같이 2 가지다.



이때 도형을 이루는 두 선분의 교점이 될 수 있는 경우는 4 가지다. 따라서 만들 수 있는 도형의 개수는 $2\times4=8$ 이다.

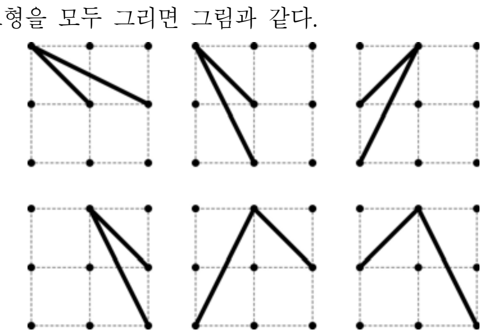
i), ii)에서

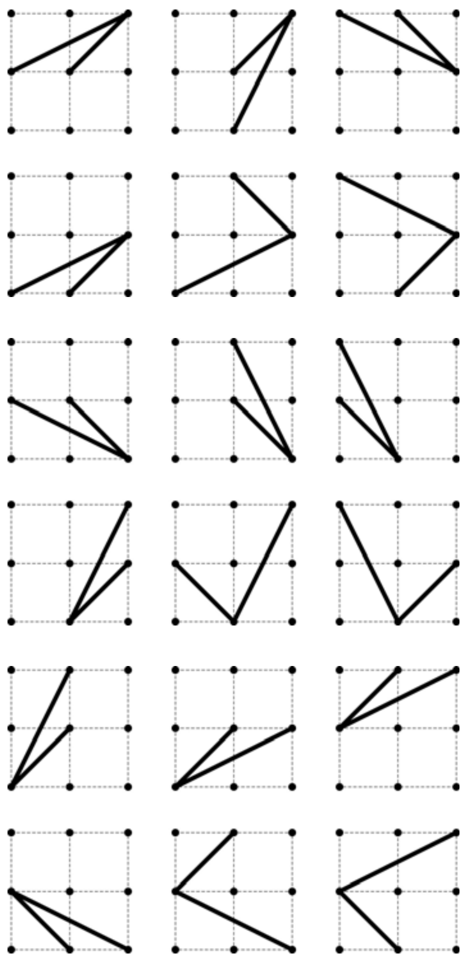
구하는 모든 도형의 개수는

$16+8=24$ 이다.

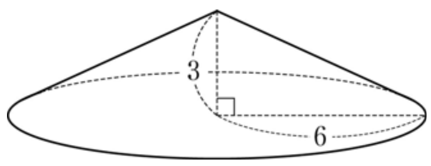
[보충설명]

세 점을 연결하여 만든 도형의 길이가 $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ 인 도형을 모두 그리면 그림과 같다.





22. **[출제의도] 원뿔의 부피를 계산한다.**



밑면의 반지름의 길이가 r, 높이가 h인 원뿔의 부피를 V라 하면

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

이므로 주어진 원뿔의 부피는

$V=\frac{1}{3}\pi\times 6^2\times 3=36\pi$

따라서 $a=36$

23. **[출제의도] 연립일차방정식을 이해하여 해를 구한다.**

$\begin{cases} 2x-5y=3 & \cdots ㉠ \\ x+2y=6 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠$-2\times$㉡을 하면

$-9y=-9$

$y=1$

위에서 구한 $y=1$을 ㉠에 대입하면

$2x-5=3$

$x=4$

따라서 $a=4$, $b=1$이므로

$a+b=4+1=5$

[다른풀이]

$x+2y=6$에서

$x=6-2y$

이를 $2x-5y=3$에 대입하면

$2(6-2y)-5y=3$

$12-4y-5y=3$

$12-9y=3$

따라서 $y=1$, $x=4$에서

$a=4$, $b=1$이므로

$a+b=4+1=5$

24. **[출제의도] 주어진 사건을 이해하고 경우의 수를 구한다.**

ⅰ) $a=2$일 때

주어진 조건을 만족시키는 b의 값은

$b=3$ 또는 $b=5$ 또는 $b=8$

따라서 3가지 경우가 있다.

ⅱ) $a=4$일 때

주어진 조건을 만족시키는 b의 값은

$b=5$ 또는 $b=8$

따라서 2가지 경우가 있다.

ⅲ) $a=7$일 때

주어진 조건을 만족시키는 b의 값은

$b=8$뿐이므로 1가지 경우가 있다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서

구하는 경우의 수는 6이다.

[다른풀이]

ⅰ) $b=2$일 때

주어진 조건을 만족시키는 a의 값은 없다.

ⅱ) $b=3$일 때

$a=2$뿐이므로 1가지 경우가 있다.

ⅲ) $b=5$일 때

$a=2$ 또는 $a=4$

따라서 2가지 경우가 있다.

ⅳ) $b=8$일 때

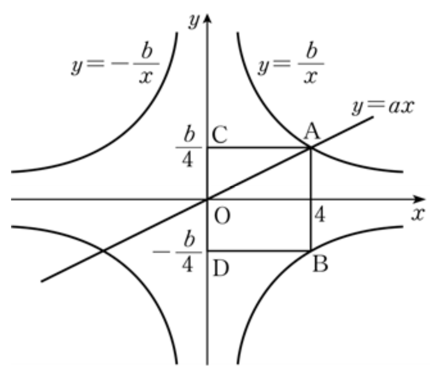
$a=2$ 또는 $a=4$ 또는 $a=7$

따라서 3가지 경우가 있다.

ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)에서

구하는 경우의 수는 6이다.

25. **[출제의도] 함수의 그래프의 성질을 이해하여 함수의 식을 구한다.**



정사각형 ACDB에서

$\overline{CA}=\overline{DB}=4$

이므로 점 A와 점 B의 x좌표는 4이다.

점 A는 함수 $y=\frac{b}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$x=4$를 대입하면

$y=\frac{b}{4}$이다. 따라서 점 A의 좌표는

$A\left(4,\ \frac{b}{4}\right)$

점 B는 함수 $y=-\frac{b}{x}$의 그래프 위의 점이므로

$x=4$를 대입하면

$y=-\frac{b}{4}$이다. 따라서 점 B의 좌표는

$B\left(4,\ -\frac{b}{4}\right)$

주어진 조건에서 $\overline{AB}=4$이므로

$\frac{b}{4}-\left(-\frac{b}{4}\right)=\frac{b}{2}=4$

따라서 $b=8$이고 A$(4,\ 2)$

또, 점 A$(4,\ 2)$는 함수 $y=ax$의 그래프 위의 점이므로 $y=ax$에 대입하면

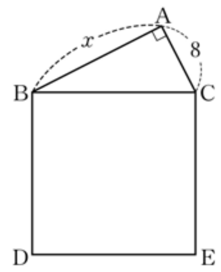
$2=4a$

$a=\frac{1}{2}$

따라서 $ab=\frac{1}{2}\times 8$

$=4$

26. **[출제의도] 피타고라스 정리와 이차방정식을 이해하여 변의 길이를 구한다.**



$\overline{AB}=x$라 하자.

$\overline{AB}>\overline{AC}$에서 $x>8$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

이므로

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}$

$=\sqrt{x^2+8^2}$

$=\sqrt{x^2+64}$

직각삼각형 ABC의 넓이를 구하면

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\times x\times 8$

$=4x$

사각형 BDEC의 넓이를 구하면

$\square BDEC=\overline{BC}^2$

$=x^2+64$

주어진 조건에서

$\square BDEC=5\triangle ABC$ 이므로

$x^2+64=5\times 4x=20x$

$x^2-20x+64=0$

인수분해하면

$(x-4)(x-16)=0$

$x=4$ 또는 $x=16$

조건에 의해 $x>8$이므로 $x=16$

따라서 $\overline{AB}=16$

27. **[출제의도] 무리수의 뜻을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구한다.**

ⅰ) $\sqrt{2x}$가 유리수인 경우

$\sqrt{2x}$가 유리수가 되기 위해서는 근호 안의 수 $2x$가 어떤 수의 제곱이 되어야 하므로

$x=2n^2$ (n은 자연수)의 꼴이어야 한다.

$2n^2$이 100 이하의 자연수가 되어야 하므로

n^2은 50 이하의 자연수가 되어야 한다.

따라서 가능한 자연수 n은

1, 2, ⋯, 7로 7개다.

그러므로 구하는 자연수 x는

2×1^2, 2×2^2, ⋯, 2×7^2으로 7개다.

ⅱ) $\sqrt{3x}$가 유리수인 경우

$\sqrt{3x}$가 유리수가 되기 위해서는 근호 안의 수 $3x$가 어떤 수의 제곱이 되어야 하므로

$x=3n^2$ (n은 자연수)의 꼴이어야 한다.

$3n^2$이 100 이하의 자연수가 되어야 하므로

n^2은 $\frac{100}{3}$ 이하의 자연수가 되어야 한다.

$\frac{100}{3}=33+\frac{1}{3}$이므로 가능한 자연수 n은

1, 2, ⋯, 5로 5개다.

그러므로 구하는 자연수 x는

3×1^2, 3×2^2, ⋯, 3×5^2으로 5개다.

ⅲ) $\sqrt{4x}$가 유리수인 경우

$\sqrt{4x}=2\sqrt{x}$이므로 $\sqrt{4x}$가 유리수가 되기 위해서는 $\sqrt{x}$가 유리수가 되어야 한다. $\sqrt{x}$가 유리수가 되기 위해서는 근호 안의 수 x가 어떤 수의 제곱이 되어야 하므로

$x=n^2$ (n은 자연수)의 꼴이어야 한다.

n^2이 100 이하의 자연수가 되도록 하는 n은

1, 2, ⋯, 10으로 10개다.

그러므로 구하는 자연수 x는

$1^2,\ 2^2,\ \cdots,\ 10^2$으로 10개다.

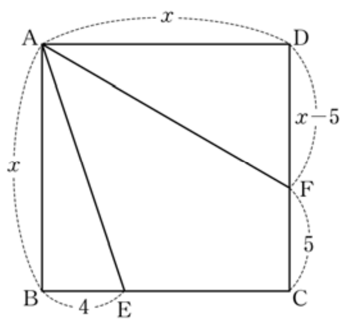
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서

구하는 자연수 x의 개수는 $7+5+10=22$이다.

따라서 $\sqrt{2x}$, $\sqrt{3x}$, $\sqrt{4x}$가 모두 무리수가 되도록 하는 100 이하의 자연수 x의 개수는

$100-22=78$이다.

28. [출제의도] 도형의 성질과 이차방정식을 이용하여 정사각형의 넓이를 구한다.



정사각형의 한 변의 길이를 $x\,(x>0)$라 하면

$\overline{DF}=x-5$

$\square AECF=\square ABCD-(\triangle ABE+\triangle FDA)$

$=x^2-\left\{\frac{1}{2}\times 4x+\frac{1}{2}\times x(x-5)\right\}$

$=x^2-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x\right)$

$=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$

사각형 AECF의 넓이가 78이므로

$\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x=78$

$x^2+x-156=0$

인수분해하면

$(x+13)(x-12)=0$

$x=-13$ 또는 $x=12$

$x>0$이므로 $x=12$

따라서 정사각형 ABCD의 넓이는

$12^2=144$

29. [출제의도] 대푯값의 뜻을 이해하여 조건을 만족시키는 자료를 추측하고 그 분산을 구한다.

9개의 자료를 작은 수부터 순서대로

$a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ g,\ h,\ i$

라 하자.

조건 (가)에서 주사위의 모든 눈이 적어도 한 번씩 나왔고, 자료를 크기순으로 배열하였으므로 첫 번째 수 a는 1이고 마지막 수 i는 6이다.

따라서 $a=1,\ i=6$

조건 (나)에서 중앙값이 4이므로 다섯 번째 수 e는 4이다.

이때 $a=1,\ e=4$이므로 $b,\ c,\ d$는 1, 2, 3, 4 중 어느 하나이고 조건에 의해 1, 2, 3, 4 중 하나의 수는 두 번 나와야 한다.

이 수를 $k\,(1\le k\le 4)$라 하자.

k가 두 번 나오고 조건 (나)에서 최빈값은 6뿐이므로 6은 세 번 이상 나와야 한다.

따라서

$g=6,\ h=6,\ i=6$

이고, $e=4$이므로 조건 (가)에 의하여

$f=5$

그러므로 9개의 자료는 다음과 같다.

$k\ (1\le k\le 4),\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 6$

(나)에서 평균이 4이므로

$\frac{k+1+2+3+4+5+6+6+6}{9}=4$

$k+33=36$

$k=3$

따라서 9개의 자료는

1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 6

이고 이 자료의 평균이 4이므로 편차는 차례로

$-3,\ -2,\ -1,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2$

이다. 그러므로 분산 V는

$V=\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+2^2+2^2}{9}$

$=\frac{28}{9}$

따라서 $81V=81\times\frac{28}{9}=252$

[다른풀이]

조건 (가)에서 주사위의 모든 눈이 적어도 한 번씩 나왔으므로 9개의 자료를

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ a,\ b,\ c\ \ (a\le b\le c)$

라 하자.

조건 (나)에서 중앙값이 4이므로 다섯 번째 수가 4이다.

따라서 $a\le 4$이므로 1, 2, 3, 4 중에서 하나의 수는 두 번 나온다. 그런데 최빈값이 6뿐이므로 6은 3번 이상 나와야 한다.

따라서 $b=c=6$

주어진 자료의 평균이 4이므로 자료의 편차를 나열하면

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ a-4,\ 2,\ 2$

이다. 편차의 합이 0이므로

$(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+(a-4)+2+2=0$

$a=3$

편차를 다시 쓰면

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ -1,\ 2,\ 2$

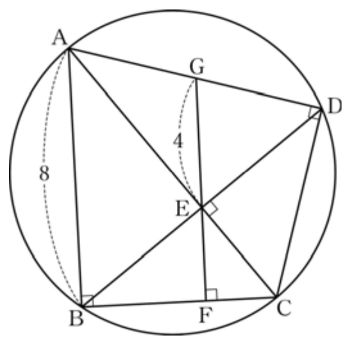
분산 V는

$V=\frac{(-3)^2+(-2)^2+(-1)^2+0^2+1^2+2^2+(-1)^2+2^2+2^2}{9}$

$=\frac{28}{9}$

따라서 $81V=81\times\frac{28}{9}=252$

30. [출제의도] 도형의 닮음과 원주각의 성질을 이해하여 선분의 길이를 구한다.



선분 AC가 지름이므로

$\angle ABC=90°$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2-\overline{AB}^2$

$=10^2-8^2$

$=36$

따라서 $\overline{BC}=6$

두 직각삼각형 ABC, BEC에서 $\angle ACB$가 공통이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle BEC$ (AA 닮음)

$\overline{BC}:\overline{AC}=\overline{CE}:\overline{BC}$에서

$\overline{BC}^2=\overline{CE}\times\overline{AC}$

$\overline{CE}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AC}}$

$=\frac{6^2}{10}$

$=\frac{18}{5}$

직각삼각형 ABC에서

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BC}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times\overline{BE}$

조건에서

$\frac{1}{2}\times 8\times 6=\frac{1}{2}\times 10\times\overline{BE}$

$\overline{BE}=\frac{48}{10}=\frac{24}{5}$

직각삼각형 BEC에서

$\overline{EF}\perp\overline{BC}$이므로

$\triangle BEC=\frac{1}{2}\times\overline{CE}\times\overline{BE}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{BC}$

$\frac{1}{2}\times\frac{18}{5}\times\frac{24}{5}=\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times 6$

$\overline{EF}=\frac{18}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{72}{25}$

지름 AC는 현 BD를 수직이등분하므로

$\overline{BE}=\overline{ED}$

두 삼각형 DGE, DAB에서 두 선분 GF, AB는 각각 선분 BC에 수직이므로

$\overline{GF}\,/\!/\,\overline{AB}$, $\angle DGE=\angle DAB$이므로

$\triangle DGE \backsim \triangle DAB$ (AA 닮음)

두 삼각형 DGE, DAB의 닮음비가 $1:2$이므로

$\overline{GE}=\frac{1}{2}\overline{AB}=\frac{1}{2}\times 8=4$

그러므로

$l=\overline{FG}$

$=\overline{FE}+\overline{EG}$

$=\frac{72}{25}+4$

$=\frac{172}{25}$

따라서 $25l=172$

[다른풀이]

선분 AC가 원의 지름이므로 $\angle ABC=90°$, $\overline{GF}\,/\!/\,\overline{AB}$

선분 AC가 원의 지름이고 $\overline{AC}\perp\overline{BD}$이므로 $\overline{BE}=\overline{ED}$

따라서 점 G는 삼각형 ABD에서 변 BD의 중점을 지나고 변 AB에 평행한 직선이 변 AD와 만나는 점이므로 변 AD의 중점이 된다.

삼각형 ABD에서

$\overline{GE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$

$=4$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{BC}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{AB}^2}=\sqrt{10^2-8^2}=6$

$\angle BAC=x$라 하면 직각삼각형 ABC에서

$\sin x=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

두 직각삼각형 ABC, ABE에서 $\angle BAC$가 공통이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle AEB$

두 직각삼각형 ABC, BCE에서 $\angle BCA$가 공통이므로

$\triangle ABC \backsim \triangle BEC$

따라서 $\angle BAE=\angle EBC=\angle BAC=x$

직각삼각형 ABE에서

$\sin x=\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$

따라서 $\overline{BE}=\overline{AB}\sin x=8\times\frac{3}{5}=\frac{24}{5}$

직각삼각형 BEF에서

$\sin x=\frac{\overline{EF}}{\overline{BE}}$

따라서 $\overline{EF}=\overline{BE}\sin x=\frac{24}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{72}{25}$

그러므로

$l=\overline{FG}$

$=\overline{FE}+\overline{EG}$

$=\frac{72}{25}+4$

$=\frac{172}{25}$

따라서 $25l=172$