2019학년도 대학수학능력시험 대비

# 2018학년도 3월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

## 수학'가'형 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ③ | 2 | ③ | 3 | ⑤ | 4 | ④ | 5 | ② |
| 6 | ③ | 7 | ① | 8 | ② | 9 | ⑤ | 10 | ③ |
| 11 | ② | 12 | ⑤ | 13 | ④ | 14 | ① | 15 | ④ |
| 16 | ① | 17 | ④ | 18 | ① | 19 | ② | 20 | ⑤ |
| 21 | ④ | 22 | 12 | 23 | 11 | 24 | 27 | 25 | 9 |
| 26 | 546 | 27 | 64 | 28 | 5 | 29 | 51 | 30 | 36 |

## 해 설

1. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

$${}_7\mathrm{C}_2=\frac{7\times 6}{2}$$
$$=21$$

2. [출제의도] 삼각함수의 미분계수를 계산한다.

$f(x)=x+2\sin x$ 에서

$f'(x)=1+2\cos x$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=1+2\cos\frac{\pi}{3}$$
$$=1+2\times\frac{1}{2}$$
$$=2$$

3. [출제의도] 무리수 $e$의 정의를 이용하여 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2$$
$$=e^2$$

4. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 함숫값을 계산한다.

$\tan^2\theta=(-3)^2=9$이고

$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$이므로

$$\sec^2\theta=1+9$$
$$=10$$

5. [출제의도] 지수함수의 극한값을 구한다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1+1-e^{-x}}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)$$

이때 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=1$이므로

$$\lim_{x \to 0}\frac{f(x)}{x} = 1+1$$
$$= 2$$

6. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구한다.

백의 자리에 올 수 있는 수의 개수는 4이고, 십의 자리와 일의 자리에 올 수 있는 수의 개수는

${}_5\Pi_2 = 5^2 = 25$이므로

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$4 \times 25 = 100$

7. [출제의도] 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구한다.

$x^2-1=t$로 놓으면 $2x\frac{dx}{dt}=1$이고,

$x=1$일 때 $t=0$이고,

$x=2$일 때 $t=3$이므로

$$\int_1^2 x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{t}\,dt$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}t\sqrt{t}\right]_0^3$$
$$= \frac{1}{2}(2\sqrt{3}-0)$$
$$= \sqrt{3}$$

8. [출제의도] 지수함수를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

$a>0$에서 $0<2^{-\frac{2}{a}}<1$이므로

$1-2^{-\frac{2}{a}}>0$이다.

$$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right)}{Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)}$$
$$= \frac{1-\left(2^{-\frac{2}{a}}\right)^2}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$
$$= \frac{\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)\left(1+2^{-\frac{2}{a}}\right)}{1-2^{-\frac{2}{a}}}$$
$$= 1+2^{-\frac{2}{a}}$$

$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2}$에서

$1+2^{-\frac{2}{a}} = \frac{3}{2}$

$2^{-\frac{2}{a}} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

$-\frac{2}{a} = -1$에서

$a=2$

[다른 풀이]

$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2}$에서 $2Q(4) = 3Q(2)$

$2Q_0\left(1-2^{-\frac{4}{a}}\right) = 3Q_0\left(1-2^{-\frac{2}{a}}\right)$

$2^{-\frac{2}{a}}=t$로 놓으면 $a>0$이므로 $0<t<1$이다.

$2(1-t^2)=3(1-t)$

$2(1-t)(1+t)=3(1-t)$

$2(1+t)=3$

$t=\frac{1}{2}$

즉 $2^{-\frac{2}{a}}=2^{-1}$

$-\frac{2}{a}=-1$에서

$a=2$

9. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

$f(0)=2^0+1=2,\ g(0)=-2^{-1}+7=\frac{13}{2}$이므로

두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(0,\ 2),\ \mathrm{B}\left(0,\ \frac{13}{2}\right)$이다. 따라서

$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{13}{2}-2=\frac{9}{2}$

두 식 $y=2^x+1,\ y=-2^{x-1}+7$을 연립하여 풀면

$2^x+1=-2^{x-1}+7$

$\frac{3}{2}\times 2^x=6$

$2^x=4$

$x=2$

$f(2)=2^2+1=5$이므로 점 C의 좌표는 $(2,\ 5)$이다.

따라서 삼각형 ACB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 2\times\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$

10. [출제의도] 몫의 미분법을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값의 합을 구한다.

$f(x)=\frac{x-1}{x^2-x+1}$에서

$f'(x)=\frac{(x^2-x+1)-(x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$

$=\frac{-x^2+2x}{(x^2-x+1)^2}$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

| $x$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $2$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | 극소 | ↗ | 극대 | ↘ |

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $x=2$에서 극대이므로 극댓값과 극솟값의 합은

$f(2)+f(0)=\frac{2-1}{2^2-2+1}+\frac{0-1}{0^2-0+1}$

$=\frac{1}{3}+(-1)$

$=-\frac{2}{3}$

11. [출제의도] 닫힌 구간에서 지수함수의 최댓값을 구한다.

$f(x)=\left(\frac{3}{a}\right)^x$ 에서

( i ) $\frac{3}{a}>1$, 즉 $0<a<3$일 때,

함수 $f(x)$는 증가함수이므로 $x=2$에서 최댓값을 갖는다.

$f(2)=\left(\frac{3}{a}\right)^2=4$에서

$a^2=\frac{9}{4}$

$a=\pm\frac{3}{2}$

$0<a<3$이므로

$a=\frac{3}{2}$

( ii ) $\frac{3}{a}=1$, 즉 $a=3$일 때,

$f(x)=1$이므로 함수 $f(x)$의 최댓값이 $4$가 아니다.

(iii) $0<\frac{3}{a}<1$, 즉 $a>3$일 때,

함수 $f(x)$는 감소함수이므로 $x=-1$에서 최댓값을 갖는다.

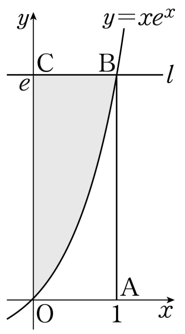
$$f(-1)=\left(\frac{3}{a}\right)^{-1}=\frac{a}{3}=4$$에서

$a=12$

( i ), ( ii ), (iii)에서 모든 양수 $a$의 값의 곱은

$\frac{3}{2}\times 12=18$

12. [출제의도] 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구한다.




4개의 점 O(0, 0), A(1, 0), B(1, e), C(0, e)를 꼭짓점으로 하는 직사각형의 넓이는

$1\times e=e$

이고, 곡선 $y=xe^x$과 $x$축 및 직선 $x=1$로 둘러싸인 도형의 넓이는

$$\int_0^1 xe^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x\,dx=e-(e-1)=1$$이므로

구하는 도형의 넓이는 $e-1$이다.

13. [출제의도] 함수의 도함수를 활용하여 접선의 $y$절편을 구한다.

$f(x)=0$에서

$\ln(\tan x)=0$

$\tan x=1$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $x=\frac{\pi}{4}$이므로

점 P의 좌표는 $\left(\frac{\pi}{4},\ 0\right)$이다.

$$f'(x)=\frac{(\tan x)'}{\tan x}$$
$$=\frac{\sec^2 x}{\tan x}$$
$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{(\sqrt{2})^2}{1}$$
$=2$이므로

점 P에서의 접선의 방정식은

$$y=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$
$y=2x-\frac{\pi}{2}$이므로

이 접선의 $y$절편은 $-\frac{\pi}{2}$이다.

**14. [출제의도] 적분을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.**

$\frac{d}{dt}\ln|T(t)-20|=\frac{T'(t)}{T(t)-20}$ 이므로

$\ln|T(t)-20|=kt+C$가 성립한다.

$t=0$일 때, $\ln|T(0)-20|=C$에서

$C=\ln 80$ …… ㉠

$t=3$일 때, $\ln|T(3)-20|=3k+C$에서

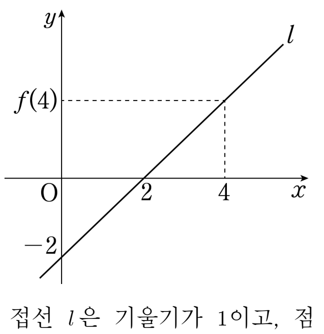
$3k+C=\ln 40$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$3k=\ln 40-\ln 80$$
$$=\ln\frac{1}{2}$$
$$=-\ln 2$$
$$k=-\frac{\ln 2}{3}$$

**15. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 합성함수의 미분계수를 구한다.**

조건 (가)에서 직선 $l$이 제2사분면을 지나지 않고, 조건 (나)에서 직선 $l$과 $x$축 및 $y$축으로 둘러싸인 도형인 직각이등변삼각형의 넓이가 2이므로 아래 그림과 같이 직선 $l$의 $x$절편과 $y$절편은 각각 2, $-2$이다.




함수 $y=f(x)$ 위의 점 $(4,\ f(4))$에서의 접선 $l$은 기울기가 1이고, 점 $(2,\ 0)$을 지나므로 직선 $l$의 방정식은 $y=x-2$이다.

따라서 $f(4)=2$, $f'(4)=1$이다.

$g(x)=xf(2x)$ 에서

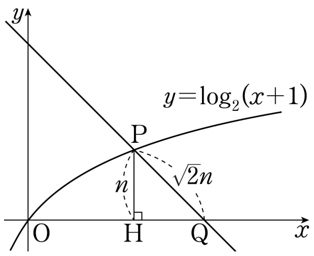
$g'(x)=f(2x)+2xf'(2x)$이므로

$g'(2)=f(4)+4f'(4)$

$=2+4$

$=6$

16. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 수열의 합을 구한다.




점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ (단, $a$, $b$는 양수)라 하고, 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하자.

이때 두 점 P, Q를 지나는 직선의 기울기가 $-1$이므로 삼각형 PHQ는 $\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{HQ}}$인 직각이등변삼각형이다.

이때 $\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}\mathrm{n}$이므로

$\overline{\mathrm{PH}}=\mathrm{n}$, 즉 $b=n$이다.

점 $\mathrm{P}(a,\ n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$

$a=2^n-1$

이때 $\overline{\mathrm{OQ}}=\overline{\mathrm{OH}}+\overline{\mathrm{HQ}}$, $\overline{\mathrm{HQ}}=\mathrm{n}$이므로

$x_n=a+n$

$=2^n-1+n$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}x_k=\sum_{k=1}^{5}\left(2^k-1+k\right)$

$=\sum_{k=1}^{5}2^k-\sum_{k=1}^{5}1+\sum_{k=1}^{5}k$

$=\dfrac{2\times(2^5-1)}{2-1}-5\times1+\dfrac{5\times6}{2}$

$=62-5+15$

$=72$

**[다른 풀이]**

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$ (단, $a$, $b$는 양수)라 하자.

점 Q의 좌표가 $(x_n,\ 0)$이고 직선 PQ의 기울기가 $-1$이므로

$\dfrac{0-b}{x_n-a}=-1$에서 $x_n-a=b$

$x_n=a+b$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x_n-a)^2+(0-b)^2}$

$=\sqrt{b^2+b^2}$

$=\sqrt{2}b$

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{2}\mathrm{n}$에서 $b=n$이다.

점 $\mathrm{P}(a,\ n)$이 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점이므로

$n=\log_2(a+1)$에서

$a=2^n-1$

$x_n=a+b$

$=2^n-1+n$

따라서

$$\sum_{k=1}^{5} x_k = \sum_{k=1}^{5}\left(2^k - 1 + k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{5} 2^k - \sum_{k=1}^{5} 1 + \sum_{k=1}^{5} k$$

$$= \frac{2\times(2^5-1)}{2-1} - 5\times 1 + \frac{5\times 6}{2}$$

$$= 62 - 5 + 15$$

$$= 72$$

**17. [출제의도] 역함수의 미분을 이용하여 조건을 만족하는 함숫값을 구한다.**

$g(f(x)) = x$ 의 양변을 $x$ 에 대하여 미분하면

$g'(f(x))f'(x) = 1$

조건 (나)에서 $g'(f(x)) \neq 0$ 이고

$g'(f(x)) = \dfrac{1}{f'(x)}$ 이므로

$$f(x)g'(f(x)) = \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$= \frac{1}{x^2+1}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = x^2 + 1$$

양변을 $x$ 에 대하여 적분하면

$\ln|f(x)| = \dfrac{1}{3}x^3 + x + C$ (단, $C$는 적분상수)

$|f(x)| = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$

조건 (가)에서 $f(0) = 1 > 0$이고 함수 $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x + C}$

$f(0) = 1$에서

$C = 0$

따라서 $f(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + x}$ 이므로

$f(3) = e^{12}$

**18. [출제의도] 이항정리를 이용하여 부등식의 해결 과정을 완성한다.**

$(1+x)^{2n}$ 의 전개식에서 $x^n$ 의 계수는 $\boxed{{}_{2n}\mathrm{C}_{\mathrm{n}}}$ 이다.

$(1+x)^n(1+x)^n$ 의 전개식에서 $x^n$ 의 계수는

$\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_{\mathrm{k}} \times {}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{n-k}}\right) = \sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_{\mathrm{k}}\right)^2$ 이므로

$\sum_{k=0}^{n}\left({}_n\mathrm{C}_{\mathrm{k}}\right)^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_{\mathrm{n}}$ 이 성립한다.

그러므로

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{2k\times\left({}_n\mathrm{C}_{\mathrm{k}}\right)^2\right\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{k\times\left({}_n\mathrm{C}_{\mathrm{k}}\right)^2\right\} + \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\left\{\mathrm{k}\times\left({}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{n-k}}\right)^2\right\}$$

$$= \left\{\left({}_n\mathrm{C}_1\right)^2 + 2\times\left({}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_2\right)^2 + \cdots + n\times\left({}_n\mathrm{C}_{\mathrm{n}}\right)^2\right\}$$
$$+ \left\{\left({}_n\mathrm{C}_{\mathrm{n-1}}\right)^2 + 2\times\left({}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{n-2}}\right)^2 + \cdots + n\times\left({}_n\mathrm{C}_0\right)^2\right\}$$

$$= \left\{\left({}_n\mathrm{C}_1\right)^2 + 2\times\left({}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_2\right)^2 + \cdots + n\times\left({}_n\mathrm{C}_{\mathrm{n}}\right)^2\right\}$$
$$+ \left\{n\times\left({}_n\mathrm{C}_0\right)^2 + (\mathrm{n}-1)\times\left({}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_1\right)^2 + \cdots + \left({}_n\mathrm{C}_{\mathrm{n-1}}\right)^2\right\}$$

$=n\times({}_{n}\mathrm{C}_0)^2+\mathrm{n}\times({}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+n\times({}_{n}\mathrm{C}_{\mathrm{n}})^2$

$=\boxed{n}\times\{({}_{n}\mathrm{C}_0)^2+({}_{\mathrm{n}}\mathrm{C}_1)^2+\cdots+({}_{n}\mathrm{C}_{\mathrm{n}})^2\}$

$=\boxed{n}\times\boxed{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$

이다. 한편

$\sum_{k=1}^{n}\{2k\times({}_{n}\mathrm{C}_{\mathrm{k}})^2\}\geq 10\times{}_{2\mathrm{n}}\mathrm{C}_{\mathrm{n}+1}$

$n\times{}_{2n}\mathrm{C}_{\mathrm{n}}\geq 10\times{}_{2n}\mathrm{C}_{\mathrm{n}+1}$

$n\times\dfrac{(2n)!}{n!\times n!}\ \geq\ 10\times\dfrac{(2n)!}{(n+1)!\times(n-1)!}$

$n\times\dfrac{1}{n}\ \geq\ 10\times\dfrac{1}{n+1}$

$n+1\geq 10$

$n\geq 9$

따라서 부등식을 만족시키는 자연수 $n$의 최솟값은 $\boxed{9}$이다.

$f(n)={}_{2n}\mathrm{C}_{\mathrm{n}},\ g(n)=n,\ p=9$이므로

$f(3)+g(3)+p={}_{6}\mathrm{C}_3+3+9$

$=20+3+9$

$=32$

19. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 구한다.

$\angle\mathrm{BPA}=\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle\mathrm{QBR}=\alpha$라 하면

$3\alpha=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}$

$\overline{\mathrm{BP}}=\sin\theta$이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}=\sin\theta\tan2\alpha$

$\overline{\mathrm{PR}}=\sin\theta\tan\alpha$

이다. 따라서

$S(\theta)=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}-\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{PR}}$

$=\dfrac{1}{2}\sin^2\theta(\tan2\alpha-\tan\alpha)$

$=\dfrac{1}{2}\sin^2\theta\left\{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}\right)\right\}$

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}=\lim\limits_{\theta\to0+}\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)^2$

$=1$이므로

$\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{S(\theta)}{\theta^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\theta\to0+}\dfrac{\sin^2\theta}{\theta^2}\left\{\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2}{3}\theta\right)-\tan\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\theta}{3}\right)\right\}$

$=\dfrac{1}{2}\left(\tan\dfrac{\pi}{3}-\tan\dfrac{\pi}{6}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

20. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 성질을 추론한다.

ㄱ. $f(x)=\int_0^x \sin(\pi\cos t)dt$ 에서

$f'(x)=\sin(\pi\cos x)$

$f'(0)=\sin(\pi\cos 0)$

$=\sin\pi$

$=0$ (참)

ㄴ. 모든 실수 $x$에 대하여

$f(-x)=\int_0^{-x}\sin(\pi\cos t)dt$

$-t=y$로 놓으면 $-\frac{dt}{dy}=1$이고

$t=0$일 때 $y=0$, $t=-x$일 때 $y=x$이므로

$f(-x)=-\int_0^x \sin\{\pi\cos(-y)\}dy$

$=-\int_0^x \sin(\pi\cos y)dy$

$=-f(x)$

따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. (참)

ㄷ. $\pi-t=y$라 하면 $-\frac{dt}{dy}=1$이고,

$t=0$일 때 $y=\pi$, $t=\pi$일 때 $y=0$이므로

$f(\pi)=\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos t)dt$

$=-\int_{\pi}^0 \sin\{\pi\cos(\pi-y)\}dy$

$=-\int_{\pi}^0 \sin(-\pi\cos y)dy$

$=\int_{\pi}^0 \sin(\pi\cos y)dy$

$=-\int_0^{\pi}\sin(\pi\cos y)dy$

$=-f(\pi)$

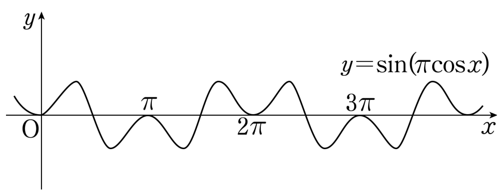
$2f(\pi)=0$이므로

$f(\pi)=0$이다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참이다.

[참고]

함수 $y=\sin(\pi\cos x)$의 그래프는 그림과 같다.




21. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 함수의 미분계수를 구한다.

$f(1)=(1+a+b)e$

$=e$에서

$a+b=0$ …… ㉠

$f'(x)=\{x^2+(a+2)x+a+b\}e^x$ 이므로

$f'(1)=\{1+(a+2)+a+b\}e$

$=e$에서

$2a+b=-2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서
$a=-2$, $b=2$
$f(x)=(x^2-2x+2)e^x$에서
$f'(x)=x^2e^x$
$f''(x)=x(x+2)e^x$이므로
$f''(1)=3e$
이때 모든 실수 $x$에 대하여 $f'(x)\geq 0$이므로
함수 $f(x)$는 역함수가 존재한다.
$f(1)=e$에서 $f^{-1}(e)=1$이므로
역함수의 미분법에 의하여

$$\left(f^{-1}\right)'(e)=\frac{1}{f'(1)}$$
$$=\frac{1}{e}$$

한편 $g(f(1))=f'(1)$, 즉 $g(e)=e$이고
$g(f(x))=f'(x)$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면
$g'(f(x))f'(x)=f''(x)$ …… ㉢
㉢의 양변에 $x=1$을 대입하면
$g'(f(1))f'(1)=f''(1)$
$g'(e)\times e=3e$
$g'(e)=3$
따라서

$$h'(e)=\left(f^{-1}\right)'(e)g(e)+f^{-1}(e)g'(e)$$
$$=\frac{1}{e}\times e+1\times 3$$
$$=4$$

22. [출제의도] 로그부등식의 해를 구한다.
진수의 조건에 의하여
$x-2>0$, $x>2$ …… ㉠
$\log_2(x-2)<2$에서 로그의 정의에 의하여
$x-2<2^2$, $x<6$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $2<x<6$이다.
따라서 부등식을 만족시키는 자연수 $x$는
3, 4, 5이므로 그 합은
$3+4+5=12$

23. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 삼각함수의 값을 계산한다.
탄젠트 함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{4+(-2)}{1-4\times(-2)}$$
$$=\frac{2}{9}$$

$p=9$, $q=2$이므로
$p+q=11$

24. [출제의도] 자연수의 분할의 수와 집합의 분할의 수를 구한다.
$5=1+1+3=1+2+2$
이므로 $P(5,3)=2$이다.

한편, 원소의 개수가 5인 집합을 공집합이 아닌 서로 다른 3개의 부분집합으로 분할할 때, 부분집합의 원소의 개수는 각각 1, 1, 3 또는 1, 2, 2이다.

(ⅰ) 부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 1, 3인 경우

5개의 원소 중 3개를 선택하여 원소의 개수가 3인 부분집합을 만들고, 나머지 2개의 원소로 각각 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들면 되므로 구하는 경우의 수는

$${}_5\mathrm{C}_3 = {}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\times 4}{2\times 1} = 10$$

(ⅱ) 부분집합의 원소의 개수가 각각 1, 2, 2인 경우

5개의 원소 중 1개를 선택하여 원소의 개수가 1인 부분집합을 만들고, 나머지 4개의 원소 중 2개의 원소를 선택하여 원소의 개수가 2인 부분집합을 만들면 나머지 2개의 원소로 이루어진 부분집합이 정해진다. 이때 각 경우가 2가지씩 중복되므로 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_5\mathrm{C}_1 \times {}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \frac{1}{2} &= 5 \times \frac{4\times 3}{2\times 1} \times 1 \times \frac{1}{2}\\ &= 15\end{aligned}$$

위의 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$S(5,\ 3) = 10 + 15 = 25$

따라서

$P(5,\ 3) + S(5,\ 3) = 2 + 25 = 27$

**25. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 함수의 최댓값을 구한다.**

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$이므로

$$\begin{aligned}f(x) &= \sin^2 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1\\ &= 1 - \cos^2 x + \cos x + 1\\ &= -\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\end{aligned}$$

이때 $-1 \le \cos x \le 1$이므로

함수 $f(x)$는 $\cos x = \frac{1}{2}$일 때 최댓값 $\frac{9}{4}$를 갖는다.

따라서 $M = \frac{9}{4}$이므로

$4M = 9$

**26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 구한다.**

선택한 7개의 문자 중 A, B, C의 개수를 차례로 $a$, $b$, $c$라 하면 세 수 $a$, $b$, $c$는 모두 홀수이고 그 합이 7이어야 하므로 다음 경우가 나온다.

(ⅰ) $(a,\ b,\ c) = (1,\ 1,\ 5)$인 경우

7개의 문자 A, B, C, C, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7개 중 같은 것이 각각 1개, 1개, 5개 있는 순열의 수와 같으므로

$$\frac{7!}{5!} = 7 \times 6 = 42$$

$(a,\ b,\ c) = (1,\ 5,\ 1)$, $(5,\ 1,\ 1)$인 경우의 수도 모두 42이다.

(ⅱ) $(a,\ b,\ c) = (1,\ 3,\ 3)$인 경우

7개의 문자 A, B, B, B, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우의 수는 7개 중 같은 것이 각각 1개, 3개, 3개 있는 순열의 수와 같으므로

$$\begin{aligned}\frac{7!}{3! \times 3!} &= \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(3\times 2\times 1)\times(3\times 2\times 1)}\\ &= 140\end{aligned}$$

$(a,\ b,\ c) = (3,\ 1,\ 3)$, $(3,\ 3,\ 1)$인 경우의 수도 모두 140이다.

위의 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$3 \times 42 + 3 \times 140 = 546$

27. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구한다.

$x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = ae^{2x} - 4x + b$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0 = a+b$ …… ㉡

㉠의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$\int_0^x f(t)dt + xf(x) - xf(x) = 2ae^{2x} - 4$

즉 $\int_0^x f(t)dt = 2ae^{2x} - 4$ …… ㉢

㉢의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0 = 2a - 4$, 즉 $a=2$

이므로 ㉡에서 $b=-2$이다.

$\int_0^x f(t)dt = 4e^{2x} - 4$의 양변을 $x$에 대하여 미분하면

$f(x) = 8e^{2x}$이므로

$$\begin{aligned} f(a)f(b) &= f(2)f(-2) \\ &= (8e^4)\times(8e^{-4}) \\ &= 64e^{4-4} \\ &= 64 \end{aligned}$$

28. [출제의도] 정적분의 정의를 이용하여 급수의 합을 구한다.

$x_k = 1+\frac{k}{n}$로 놓으면 $\Delta x = \frac{1}{n}$이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}f\left(1+\frac{k}{n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}f\left(1+\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n} \\ &= \int_1^2 (x-1)f(x)dx \end{aligned}$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned} \int_1^2 (x-1)\ln x\,dx &= \left[\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)dx \\ &= (0-0) - \int_1^2\left(\frac{1}{2}x - 1\right)dx \\ &= -\left[\frac{1}{4}x^2 - x\right]_1^2 \\ &= -(1-2) + \left(\frac{1}{4} - 1\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$p=4$, $q=1$이므로

$p+q=5$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구한다.

6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 $x$, $y$, $z$라 하자.

(ⅰ) $(x,\ y,\ z) = (0,\ 2,\ 2)$인 경우

배 2개와 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 각각 ${}_2\mathrm{H}_2$, ${}_2\mathrm{H}_2$이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} {}_2\mathrm{H}_2 \times {}_2\mathrm{H}_2 - 2 &= {}_3\mathrm{C}_2 \times {}_3\mathrm{C}_2 - 2 \\ &= 3\times 3 - 2 \\ &= 7 \end{aligned}$$

$(x,\ y,\ z) = (2,\ 0,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 0)$인 경우의 수도 모두 7이다.

(ii) $(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 2)$ 인 경우

사과 1개, 배 1개, 귤 2개를 2명의 학생에게 나누어주는 경우의 수는 차례로 ${}_2\mathrm{H}_1$, ${}_2\mathrm{H}_1$, ${}_2\mathrm{H}_2$ 이고, 4개의 과일을 한 명의 학생에게 모두 주는 경우는 제외해야 하므로 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned}{}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_1\times{}_2\mathrm{H}_2-2&={}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2-2\\&=2\times2\times3-2\\&=10\end{aligned}$$

$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 1)$ 인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3\times7+3\times10=51$

[다른 풀이]

6개의 과일에서 선택한 4개의 과일 중 사과, 배, 귤의 개수를 각각 $x$, $y$, $z$라 하고, 2명의 학생을 각각 A, B라 하자.

이때 과일을 하나도 받지 못하는 학생이 없어야 하고, 학생 A가 받는 과일이 정해지면 학생 B가 받는 과일도 정해진다.

(i) $(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 2)$ 인 경우

학생 A가 받는 배와 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면

$(0,\ 1)$, $(0,\ 2)$, $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$, $(1,\ 2)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$

이므로 구하는 경우의 수는 7이다.

이때 $(x,\ y,\ z)=(2,\ 0,\ 2)$, $(2,\ 2,\ 0)$ 인 경우의 수도 모두 7이다.

(ii) $(x,\ y,\ z)=(1,\ 1,\ 2)$ 인 경우

학생 A가 받는 사과, 배, 귤의 수를 순서쌍으로 나타내면

$(0,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 0,\ 2)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 2)$,

$(1,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 2)$, $(1,\ 1,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 1)$

이므로 구하는 경우의 수는 10이다.

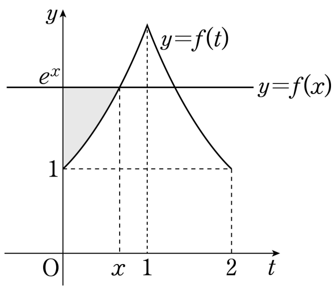
이때 $(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 1)$, $(2,\ 1,\ 1)$ 인 경우의 수도 모두 10이다.

위의 (i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$3\times7+3\times10=51$

30. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수의 극댓값과 극솟값을 구하는 문제를 해결한다.

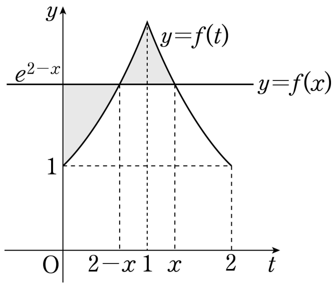
(i) $0<x\le1$일 때,




그림에서 $0<t\le x$일 때, $f(x)\ge f(t)$이므로

$$\begin{aligned}g(x)&=\int_0^x|f(x)-f(t)|dt\\&=\int_0^x\{f(x)-f(t)\}dt\\&=\int_0^x(e^x-e^t)dt\\&=\Big[\,te^x-e^t\,\Big]_0^x\\&=xe^x-e^x+1\\&=(x-1)e^x+1\end{aligned}$$

(ii) $1 < x < 2$일 때,




그림에서

$0 < t < 2-x$일 때, $f(x) \geq f(t)$

$2-x \leq t < x$일 때, $f(x) \leq f(t)$이므로

$$g(x) = \int_0^x |f(x)-f(t)|dt$$

$$= \int_0^{2-x} \{f(x)-f(t)\}dt + \int_{2-x}^{x} \{f(t)-f(x)\}dt$$

위의 (i)에 의하여

$$\int_0^{2-x} \{f(x)-f(t)\}dt = (2-x-1)e^{2-x}+1$$

$$= (1-x)e^{2-x}+1$$

한편, 함수 $y=e^{2-x}$의 그래프는 함수 $y=e^x$의 그래프와 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로

$$\int_{2-x}^{x} \{f(t)-f(x)\}dt$$

$$= 2\int_1^x \{f(t)-f(x)\}dt$$

$$= 2\int_1^x (e^{2-t}-e^{2-x})dt$$

$$= 2\Big[-e^{2-t}-te^{2-x}\Big]_1^x$$

$$= 2\{(-e^{2-x}-xe^{2-x})-(-e-e^{2-x})\}$$

$$= 2e-2xe^{2-x}$$

따라서

$$g(x) = (1-x)e^{2-x}+1+2e-2xe^{2-x}$$

$$= (1-3x)e^{2-x}+2e+1$$

위의 (i), (ii)에서

$$g(x) = \begin{cases} (x-1)e^x+1 & (0 < x \leq 1) \\ (1-3x)e^{2-x}+2e+1 & (1 < x < 2) \end{cases}$$ 이므로

$$g'(x) = \begin{cases} xe^x & (0 < x < 1) \\ (3x-4)e^{2-x} & (1 < x < 2) \end{cases}$$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 나타내는 표는 다음과 같다.

| $x$ | (0) | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\frac{4}{3}$ | $\cdots$ | (2) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | + | | − | 0 | + | |
| $g(x)$ | | ↗ | 극대 | ↘ | 극소 | ↗ | |

(극댓값) $= g(1)$

$=(1-1)e+1$

$=1$

$(\text{극솟값})=g\left(\frac{4}{3}\right)$

$=(1-4)e^{\frac{2}{3}}+2e+1$

$=2e-3e^{\frac{2}{3}}+1$

함수 $g(x)$의 극댓값과 극솟값의 차는

$1-\left(2e-3e^{\frac{2}{3}}+1\right)=-2e+3e^{\frac{2}{3}}$

$=-2e+3\sqrt[3]{e^2}$

$a=-2,\ b=3$이므로

$(ab)^2=36$