

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. 7C_2 의 값은? [2점]

- ① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

2. 함수 $f(x) = x + 2\sin x$ 에 대하여 $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{2e}$ ③ $\frac{1}{e}$ ④ $2e$ ⑤ e^2

4. $\tan \theta = -3$ 일 때, $\sec^2 \theta$ 의 값은? [3점]

- ① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

5. 함수 $f(x) = e^x - e^{-x}$ 에 대하여 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 의 값은? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. 숫자 0, 1, 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 세 개를 선택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 세 자리 자연수의 개수는? [3점]

- ① 90 ② 95 ③ 100 ④ 105 ⑤ 110

7. $\int_1^2 x\sqrt{x^2-1} dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\sqrt{3}$ ② 2 ③ $\sqrt{5}$ ④ $\sqrt{6}$ ⑤ $\sqrt{7}$

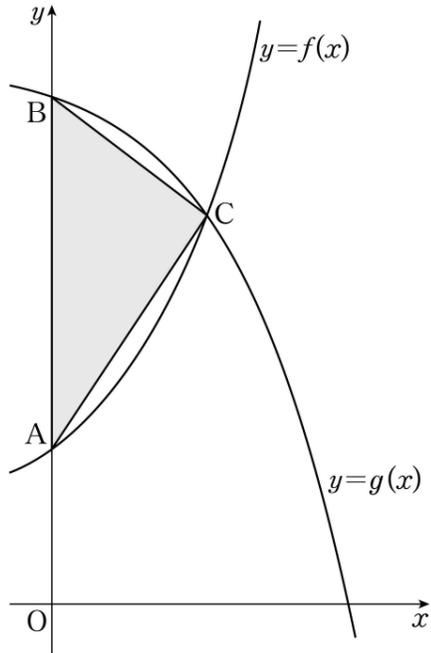
8. 최대 충전 용량이 Q_0 ($Q_0 > 0$)인 어떤 배터리를 완전히 방전시킨 후 t 시간 동안 충전한 배터리의 충전 용량을 $Q(t)$ 라 할 때, 다음 식이 성립한다고 한다.

$$Q(t) = Q_0 \left(1 - 2^{-\frac{t}{a}}\right) \quad (\text{단, } a \text{는 양의 상수이다.})$$

$\frac{Q(4)}{Q(2)} = \frac{3}{2}$ 일 때, a 의 값은? (단, 배터리의 충전 용량의 단위는 mAh이다.) [3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

9. 그림과 같이 두 함수 $f(x)=2^x+1$, $g(x)=-2^{x-1}+7$ 의 그래프가 y 축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 점을 C라 할 때, 삼각형 ACB의 넓이는? [3점]



- ① $\frac{5}{2}$ ② 3 ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

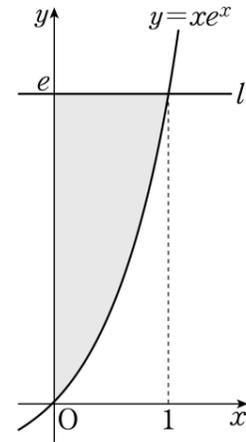
10. 함수 $f(x)=\frac{x-1}{x^2-x+1}$ 의 극댓값과 극솟값의 합은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{5}{6}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{3}$

11. 닫힌 구간 $[-1, 2]$ 에서 함수 $f(x) = \left(\frac{3}{a}\right)^x$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 양수 a 의 값의 곱은? [3점]

- ① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

12. 그림과 같이 곡선 $y = xe^x$ 위의 점 $(1, e)$ 를 지나고 x 축에 평행한 직선을 l 이라 하자. 곡선 $y = xe^x$ 과 y 축 및 직선 l 로 둘러싸인 도형의 넓이는? [3점]



- ① $2e - 3$ ② $2e - \frac{5}{2}$ ③ $e - 2$
 ④ $e - \frac{3}{2}$ ⑤ $e - 1$

13. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x) = \ln(\tan x)$ 의 그래프와 x 축이 만나는 점을 P 라 하자. 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 P 에서의 접선의 y 절편은? [3점]

- ① $-\pi$ ② $-\frac{5}{6}\pi$ ③ $-\frac{2}{3}\pi$ ④ $-\frac{\pi}{2}$ ⑤ $-\frac{\pi}{3}$

14. 뉴턴의 냉각법칙에 따르면 온도가 20 으로 일정한 실내에 있는 어떤 물질의 시각 t (분)에서의 온도를 $T(t)$ 라 할 때, 함수 $T(t)$ 의 도함수 $T'(t)$ 에 대하여 다음 식이 성립한다고 한다.

$$\int \frac{T'(t)}{T(t)-20} dt = kt + C \quad (\text{단, } k, C \text{ 는 상수이다.})$$

$T(0) = 100$, $T(3) = 60$ 일 때, k 의 값은? (단, 온도의 단위는 $^{\circ}\text{C}$ 이다.) [4점]

- ① $-\frac{\ln 2}{3}$ ② $-\frac{2\ln 2}{3}$ ③ $-\ln 2$
 ④ $-\frac{4\ln 2}{3}$ ⑤ $-\frac{5\ln 2}{3}$

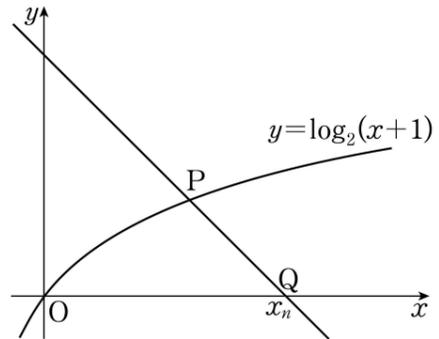
15. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(4, f(4))$ 에서의 접선 l 이 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 직선 l 은 제2사분면을 지나지 않는다.
 (나) 직선 l 과 x 축 및 y 축으로 둘러싸인 도형은 넓이가 2인 직각이등변삼각형이다.

함수 $g(x)=xf(2x)$ 에 대하여 $g'(2)$ 의 값은? [4점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

16. 그림과 같이 제1사분면에 있는 곡선 $y=\log_2(x+1)$ 위의 점 P 를 지나고 기울기가 -1 인 직선이 x 축과 만나는 점을 Q 라 하자. 자연수 n 에 대하여 $\overline{PQ}=\sqrt{2n}$ 이 되도록 하는 점 Q 의 x 좌표를 x_n 이라 할 때, $\sum_{k=1}^5 x_k$ 의 값은? [4점]



- ① 72 ② 84 ③ 96 ④ 108 ⑤ 120

17. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 1$
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)g'(f(x)) = \frac{1}{x^2 + 1}$ 이다.

$f(3)$ 의 값은? [4점]

- ① e^3 ② e^6 ③ e^9 ④ e^{12} ⑤ e^{15}

18. 다음은 부등식

$$\sum_{k=1}^n \{2k \times ({}_n C_k)^2\} \geq 10 \times {}_{2n} C_{n+1}$$

을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값을 구하는 과정이다.

$(1+x)^{2n}$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는 (가) 이다.

$(1+x)^n(1+x)^n$ 의 전개식에서 x^n 의 계수는

$$\sum_{k=0}^n ({}_n C_k \times {}_n C_{n-k}) = \sum_{k=0}^n ({}_n C_k)^2$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n \{2k \times ({}_n C_k)^2\} \\ &= \sum_{k=1}^n \{k \times ({}_n C_k)^2\} + \sum_{k=1}^n \{k \times ({}_n C_{n-k})^2\} \\ &= \{({}_n C_1)^2 + 2 \times ({}_n C_2)^2 + \dots + n \times ({}_n C_n)^2\} \\ & \quad + \{({}_n C_{n-1})^2 + 2 \times ({}_n C_{n-2})^2 + \dots + n \times ({}_n C_0)^2\} \\ &= \text{[나]} \times \{({}_n C_0)^2 + ({}_n C_1)^2 + \dots + ({}_n C_n)^2\} \\ &= \text{[나]} \times \text{[가]} \end{aligned}$$

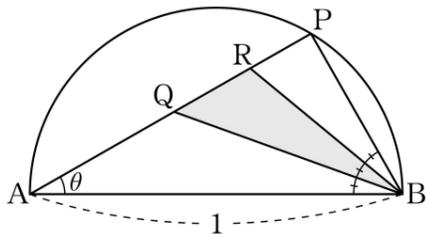
이다.

따라서 부등식 $\sum_{k=1}^n \{2k \times ({}_n C_k)^2\} \geq 10 \times {}_{2n} C_{n+1}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 최솟값은 (다) 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$ 이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p 라 할 때, $f(3) + g(3) + p$ 의 값은? [4점]

- ① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

19. 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위의 점 P에 대하여 $\angle ABP$ 를 삼등분하는 두 직선이 선분 AP와 만나는 점을 각각 Q, R라 하자. $\angle PAB = \theta$ 일 때, 삼각형 BRQ의 넓이를 $S(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^2}$ 의 값은?
 (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) [4점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

20. 함수 $f(x) = \int_0^x \sin(\pi \cos t) dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

— < 보 기 > —

ㄱ. $f'(0) = 0$
 ㄴ. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
 ㄷ. $f(\pi) = 0$

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x) = (x^2 + ax + b)e^x$ 과 함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(1) = e, f'(1) = e$
 (나) 모든 실수 x 에 대하여 $g(f(x)) = f'(x)$ 이다.

함수 $h(x) = f^{-1}(x)g(x)$ 에 대하여 $h'(e)$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

단답형

22. 부등식 $\log_2(x-2) < 2$ 를 만족시키는 모든 자연수 x 의 값의 합을 구하시오. [3점]

23. $\tan \alpha = 4, \tan \beta = -2$ 일 때, $\tan(\alpha + \beta) = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

24. $P(5, 3) + S(5, 3)$ 의 값을 구하시오. [3점]

26. 세 문자 A, B, C에서 중복을 허락하여 각각 홀수 개씩 모두 7개를 선택하여 일렬로 나열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 모든 문자는 한 개 이상씩 선택한다.) [4점]

25. 함수 $f(x) = \sin^2 x + \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 1$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, $4M$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t) dt = ae^{2x} - 4x + b$$

를 만족시킬 때, $f(a)f(b)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [4점]

28. 함수 $f(x) = \ln x$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} f\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

[4점]

29. 사과, 배, 귤 세 종류의 과일이 각각 2개씩 있다. 이 6개의 과일 중 4개를 선택하여 2명의 학생에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 종류의 과일은 서로 구별하지 않고, 과일을 한 개도 받지 못하는 학생은 없다.) [4점]

30. 함수

$$f(x) = \begin{cases} e^x & (0 \leq x < 1) \\ e^{2-x} & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

에 대하여 열린 구간 $(0, 2)$ 에서 정의된 함수

$$g(x) = \int_0^x |f(x) - f(t)| dt$$

의 극댓값과 극솟값의 차는 $ae + b\sqrt[3]{e^2}$ 이다. $(ab)^2$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.) [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.