

• 2교시 수학 영역 •

[가형]

1	5	2	4	3	2	4	4	5	3
6	1	7	3	8	4	9	2	10	1
11	3	12	3	13	4	14	5	15	2
16	1	17	2	18	5	19	1	20	5
21	5	22	25	23	6	24	9	25	16
26	63	27	325	28	54	29	209	30	49

1. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x} = \frac{3}{2} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} = \frac{3}{2}$$

2. [출제의도] 호도법 이해하기

$$\text{부채꼴의 호의 길이는 } 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

3. [출제의도] 쌍곡선의 방정식 이해하기

쌍곡선  $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ 의 점근선의 방정식은  $y = \frac{2}{5}x, y = -\frac{2}{5}x$ 이므로  $k = \frac{2}{5}$

4. [출제의도] 지수함수의 그래프 이해하기

$0 < \frac{1}{2} < 1$ 이므로 지수함수  $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 은 닫힌 구간  $[2, 4]$ 에서  $x=4$ 일 때 최솟값을 갖는다. 따라서 최솟값은  $f(4) = \frac{1}{4}$

5. [출제의도] 여러 가지 적분법 이해하기

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx = \left[ \frac{1}{3} \sin 3x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{3}$$

6. [출제의도] 도함수의 활용 이해하기

$f(x) = x^2 - 2x \ln x$ 라 하면  
 $f'(x) = 2x - (2 \ln x + 2), f''(x) = 2 - \frac{2}{x}$   
 $f''(x) = 0$ 에서  $x = 1$   
 $0 < x < 1$ 일 때  $f''(x) < 0$   
 $x > 1$ 일 때  $f''(x) > 0$   
 따라서 변곡점의  $x$ 좌표는 1

7. [출제의도] 자연수의 분할 이해하기

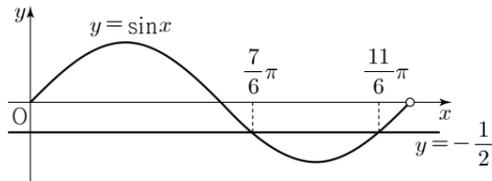
$$\begin{aligned} 5 &= 3+2 \\ &= 3+1+1 \\ &= 2+2+1 \\ &= 2+1+1+1 \\ &= 1+1+1+1+1 \end{aligned}$$

따라서 구하는 분할의 수는 5

8. [출제의도] 음함수의 미분법 이해하기

$x^3 + xy - y^2 = 0$ 의 양변을  $x$ 에 대하여 미분하면  
 $3x^2 + y + x \frac{dy}{dx} - 2y \frac{dy}{dx} = 0$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y}{-x + 2y} \quad (x \neq 2y)$   
 따라서 점  $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는  $\frac{8}{3}$

9. [출제의도] 삼각함수 이해하기



$2 \sin x + 1 < 0$ 의 해는  $\frac{7}{6}\pi < x < \frac{11}{6}\pi$

$\therefore \alpha = \frac{7}{6}\pi, \beta = \frac{11}{6}\pi$

따라서  $\cos(\beta - \alpha) = \cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$

10. [출제의도] 이항정리 이해하기

$\left(\frac{x}{2} + \frac{a}{x}\right)^6$ 의 전개식의 일반항은

$${}^6C_r \left(\frac{x}{2}\right)^r \left(\frac{a}{x}\right)^{6-r} = {}^6C_r \left(\frac{1}{2}\right)^r a^{6-r} x^{2r-6}$$

$x^{2r-6} = x^2$ 에서  $r=4$ 이므로  $x^2$ 의 계수는

$${}^6C_4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 \times a^2 = \frac{15}{16} \times a^2 = 15$$

따라서  $a=4$

11. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$$g'(x) = f'(f(x)) \times f'(x), f'(x) = \frac{1}{2} + 2 \cos x$$

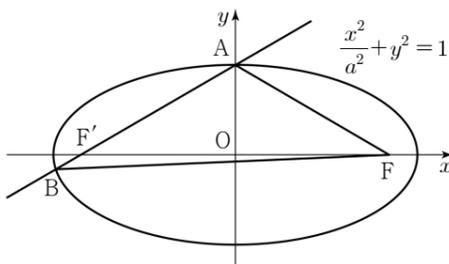
$$f(\pi) = \frac{\pi}{2}, f'(\pi) = -\frac{3}{2}, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} g'(\pi) &= f'(f(\pi)) \times f'(\pi) \\ &= f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \times f'(\pi) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{4} \end{aligned}$$

12. [출제의도] 타원의 정의를 활용하여 문제해결하기

점  $A(0, 1)$ 을 지나는 타원  $C$ 의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 \quad (a > 0)$$



그림과 같이  $\overline{AF} + \overline{AF'} = \overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$ 이고, 삼각형  $ABF$ 의 둘레의 길이가 16이므로  $4a = 16, a = 4$

$$\therefore c^2 = 16 - 1 = 15$$

따라서 선분  $FF'$ 의 길이는  $2\sqrt{15}$

13. [출제의도] 여러 가지 적분법 이해하기

함수  $f'(x)$ 를 적분하면

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + C_1 & (x < 1) \\ x \ln x - x + C_2 & (x > 1) \end{cases}$$

(단,  $C_1, C_2$ 는 적분상수)

$$f(e) = e \ln e - e + C_2 = 2 \text{이므로 } C_2 = 2$$

함수  $f(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 3 + C_1$$

$$1 = 1 + 3 + C_1 \text{이므로 } C_1 = -3$$

$$\therefore f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 3 & (x \leq 1) \\ x \ln x - x + 2 & (x > 1) \end{cases}$$

따라서  $f(-6) = 36 - 18 - 3 = 15$

14. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

곡선  $y = a \log_2(x - a + 1)$ 이  $x$ 축과 만나므로

$$a \log_2(x - a + 1) = 0 \text{에서 } x = a$$

곡선  $y = 2^{x-a} - 1$ 이  $x$ 축과 만나므로

$$2^{x-a} - 1 = 0 \text{에서 } x = a$$

$$\therefore A(a, 0)$$

점  $B$ 의  $y$ 좌표를  $k(k > 0)$ 라 하면

삼각형  $OAB$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{OA} \times k = \frac{1}{2} \times a \times k = \frac{7}{2}a \text{이므로 } k = 7$$

$$2^{x-a} - 1 = 7 \text{이므로 } x = a + 3$$

$$\therefore B(a + 3, 7)$$

점  $B$ 는 곡선  $y = a \log_2(x - a + 1)$  위의 점이므로

$$a \log_2(a + 3 - a + 1) = 7 \text{에서 } a = \frac{7}{2}$$

$$\therefore A\left(\frac{7}{2}, 0\right), B\left(\frac{13}{2}, 7\right)$$

선분  $AB$ 의 중점  $M$ 의 좌표는  $\left(5, \frac{7}{2}\right)$ 이므로

$$p = 5, q = \frac{7}{2}$$

따라서  $p + q = \frac{17}{2}$

15. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

곡선  $y = \frac{1}{x}$ 과 두 직선  $x=1, x=2$  및  $x$ 축으로

둘러싸인 부분의 넓이는  $S = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$

곡선  $y = \frac{1}{x}$ 과 두 직선  $x=1, x=a$  및  $x$ 축으로

둘러싸인 부분의 넓이는  $2S = 2 \ln 2$ 이므로

(i)  $a > 1$ 일 때,  $\int_1^a \frac{1}{x} dx = \ln a = 2 \ln 2$

$$\therefore a = 4$$

(ii)  $0 < a < 1$ 일 때,  $\int_a^1 \frac{1}{x} dx = -\ln a = 2 \ln 2$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

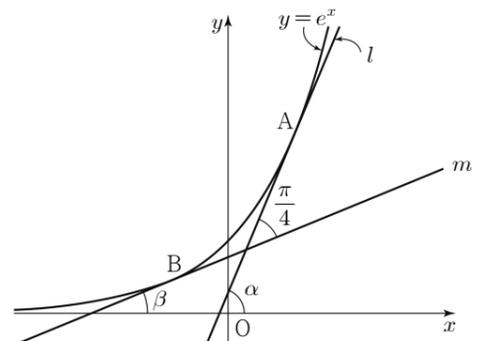
따라서 모든  $a$ 의 값의 합은  $4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$

16. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$y' = e^x$ 이므로 곡선  $y = e^x$  위의

두 점  $A(t, e^t), B(-t, e^{-t})$ 에서의

접선  $l, m$ 의 기울기는 각각  $e^t, e^{-t}$ 이다.



두 직선  $l, m$ 이  $x$ 축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각  $\alpha, \beta$ 라 하면

$$\tan \alpha = e^t, \tan \beta = e^{-t}$$

$$\begin{aligned}\tan \frac{\pi}{4} &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{e^t - e^{-t}}{1 + e^t e^{-t}} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}e^t - e^{-t} &= 2 \\ (e^t)^2 - 2e^t - 1 &= 0 \\ e^t > 0 \text{이므로 } e^t &= 1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore t &= \ln(1 + \sqrt{2}) \\ \text{따라서 직선 AB의 기울기는} \\ \frac{e^t - e^{-t}}{t - (-t)} &= \frac{1}{\ln(1 + \sqrt{2})}\end{aligned}$$

17. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 극한 추론하기

두 곡선  $y = e^{x-1}$ 과  $y = a^x$ 이 만나는 점의  $x$ 좌표는 방정식  $e^{x-1} = a^x$ 의 해이다.

양변에  $\frac{e}{a^x}$ 를 곱하면  $\left(\frac{e}{a}\right)^x = e$

$x = \frac{1}{\ln \frac{e}{a}}$ 이므로  $f(a) = \frac{1}{\ln \frac{e}{a}}$

$a - e = t$ 라 하면  $a = t + e$ 이고,  $a \rightarrow e + 0$ 일 때  $t \rightarrow 0 +$ 이므로

$$\begin{aligned}\lim_{a \rightarrow e+} \frac{1}{(e-a)f(a)} &= \lim_{a \rightarrow e+} \frac{\ln \frac{e}{a}}{(e-a)} = \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\ln \frac{e}{t+e}}{-t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \ln \left(1 + \frac{t}{e}\right)^{\frac{1}{t}} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+} \ln \left\{ \left(1 + \frac{t}{e}\right)^{\frac{e}{t}} \right\}^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

18. [출제의도] 포물선의 접선을 활용하여 문제해결하기

점 A에서 포물선에 그은 기울기가 양수인 접선과 포물선이 만나는 점을 B( $x_1, y_1$ )이라 하면

점 B에서의 접선의 방정식은  $y = \frac{8}{y_1}(x + x_1)$

포물선의 준선의 방정식이  $x = -4$ 이므로

$A\left(-4, \frac{8}{y_1}(x_1 - 4)\right), H(-4, y_1)$

점 A가 제3사분면 위의 점이므로  $\overline{AC} = \frac{8}{y_1}(4 - x_1)$

$\overline{AC} \times \overline{CH} = \frac{8}{y_1}(4 - x_1) \times y_1 = 8$

$\therefore x_1 = 3, y_1 = 4\sqrt{3}$

$A\left(-4, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right), B(3, 4\sqrt{3}), H(-4, 4\sqrt{3})$

따라서 삼각형 ABH의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 7 \times \frac{14}{3} \sqrt{3} = \frac{49}{3} \sqrt{3}$

19. [출제의도] 순열과 조합 추론하기

$n$ 개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는 '(i) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우'에서 '(ii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우'와

'(iii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우'를 제외하면 된다.

(i)의 경우 :

$n$ 개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는  ${}_n C_3$ 이다.

(ii)의 경우 :

주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는  $(n-2)$ 이다.

(iii)의 경우 :

연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우는 2는 반드시 포함되어야 하고 3은 포함되지 않아야 하므로

경우의 수는  $\boxed{n-3}$  이고, 마찬가지로 연속되는

두 수 중 하나가  $n$ 인 경우의 수도  $\boxed{n-3}$  이다.

또한

연속되는 두 수가  $k, k+1 (k=2, 3, \dots, n-2)$ 라 하면 이 경우의 수는  $(n-3)$ 이고,

각각의 경우에  $k, k+1$ 과 연속되지 않는 수가 적혀 있는 하나의 공을 더 선택하는

경우의 수는  $(n-4)$ 이므로

연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과  $n$ 이 아닌

경우의 수는  $\boxed{(n-3)(n-4)}$  이다.

따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는

세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는

$2 \times (\boxed{n-3}) + \boxed{(n-3)(n-4)}$  이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여  $n$ 개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는

$\frac{n(n-1)(n-2)}{6} - (n-2) - \{2(n-3) + (n-3)(n-4)\}$

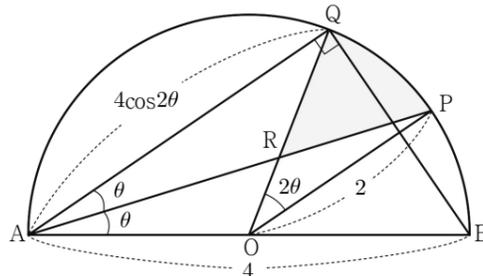
$= \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$  이다.

$\therefore p(n) = n-3, q(n) = (n-3)(n-4),$

$r(n) = \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$

따라서  $\frac{p(18) \times q(17)}{r(16)} = \frac{15 \times (14 \times 13)}{14 \times 13 \times 12} = \frac{15}{2}$

20. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제해결하기



부채꼴 OPQ는 반지름의 길이가 2이고 중심각의 크기가  $2\theta$ 이므로 부채꼴 OPQ의 넓이는

$\frac{1}{2} \times 2^2 \times 2\theta = 4\theta$

직각삼각형 ABQ에서  $\overline{AQ} = 4\cos 2\theta$

삼각형 AOQ에서  $\overline{AO} = \overline{OQ} = 2, \overline{RQ} = 2 - \overline{OR}$

선분 AR는 각 QAO의 이등분선이므로

$\overline{AO} : \overline{AQ} = \overline{OR} : \overline{RQ}$

$2 : 4\cos 2\theta = \overline{OR} : (2 - \overline{OR})$

$\overline{OR} = \frac{2}{2\cos 2\theta + 1}$

삼각형 OPR의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{OP} \times \overline{OR} \times \sin 2\theta = \frac{2\sin 2\theta}{2\cos 2\theta + 1}$

호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분은 부채꼴 OPQ에서 삼각형 OPR를 제외한 부분이므로

$S(\theta) = 4\theta - \frac{2\sin 2\theta}{2\cos 2\theta + 1}$

$\therefore \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left\{ 4 - \frac{2\sin 2\theta}{\theta(2\cos 2\theta + 1)} \right\}$

$= 4 - 4 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$

21. [출제의도] 여러 가지 적분법을 활용하여 추론하기

함수  $f(x)$ 의 역함수가  $g(x)$ 이므로  $f(g(x)) = x$

$f(1) = 2$ 이므로  $g(2) = 1$

주어진 식에서

$$\begin{aligned}f'(g(x)) &= \frac{1 - \{g(x)\}^2 \{f(g(x))\}^3}{\{g(x)\}^3 \{f(g(x))\}^2} \\ &= \frac{1 - x^3 \{g(x)\}^2}{x^2 \{g(x)\}^3} = \frac{1}{g'(x)} \text{이므로}\end{aligned}$$

$g'(x) = \frac{x^2 \{g(x)\}^3}{1 - x^3 \{g(x)\}^2} \dots (*)$

ㄱ. 식 (\*)에  $x = 2$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}g'(2) &= \frac{2^2 \times \{g(2)\}^3}{1 - 2^3 \times \{g(2)\}^2} \\ &= \frac{2^2}{1 - 2^3} = -\frac{4}{7} \therefore (\text{참})\end{aligned}$$

ㄴ. 식 (\*)을 정리하면

$$\begin{aligned}g'(x) &= x^3 \{g(x)\}^2 g'(x) + x^2 \{g(x)\}^3 \\ &= x^2 \{g(x)\}^2 \{xg'(x) + g(x)\}\end{aligned}$$

양변을  $x$ 에 대하여 적분하면

$$xg'(x) + g(x) = \{xg(x)\}' \text{이므로}$$

$$\int g'(x) dx = \int \{xg(x)\}^2 \{xg(x)\}' dx$$

$g(x) = \frac{1}{3} x^3 \{g(x)\}^3 + C$  (단,  $C$ 는 적분상수)

$x = 2$ 를 대입하면  $1 = \frac{8}{3} + C$ 이므로  $C = -\frac{5}{3}$

$g(x) = \frac{1}{3} x^3 \{g(x)\}^3 - \frac{5}{3} \dots (**)$   $\therefore$  (참)

ㄷ. 식 (\*\*)에  $x = 1$ 을 대입하여 정리하면

$\{g(1)\}^3 - 3g(1) - 5 = 0$

함수  $h(t) = t^3 - 3t - 5, g(1) = \alpha$ 라 하면

$h'(t) = 3(t+1)(t-1)$

$t = -1$ 에서 극댓값  $-3, t = 1$ 에서 극솟값  $-7$ 을 가지므로 방정식  $h(t) = 0$ 은 하나의 실근  $\alpha$ 를 갖는다.

$h(2) = 8 - 6 - 5 = -3 < 0,$

$h\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{125}{8} - \frac{15}{2} - 5 = \frac{25}{8} > 0$ 이므로

사이값 정리에 의해  $2 < \alpha < \frac{5}{2}$

$2 < g(1) < \frac{5}{2} \therefore$  (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 로그방정식 계산하기

$\log_3(x+2) = 3$ 에서  $x+2 = 3^3$

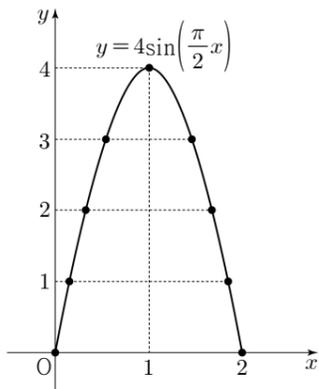
따라서  $x = 25$

23. [출제의도] 여러 가지 함수의 미분법 이해하기

$f'(x) = \frac{3}{2} \sqrt{x}$ 이므로  $f'(16) = \frac{3}{2} \times 4 = 6$

24. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

곡선  $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) (0 \leq x \leq 2)$ 는 그림과 같다.



따라서  $y$  좌표가 정수인 점의 개수는 9

25. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$$f'(x) = \frac{(x^2+x+8)-x(2x+1)}{(x^2+x+8)^2}$$

$$= \frac{-x^2+8}{(x^2+x+8)^2} > 0$$

$$(x^2+x+8)^2 > 0 \text{ 이므로}$$

$$-x^2+8 > 0$$

$$-2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \alpha = -2\sqrt{2}, \beta = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 16$$

26. [출제의도] 중복조합 이해하기

두 수 2, 4에서 중복을 허락하여 두 개를 선택하는 경우의 수는  ${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$

세 수 1, 3, 5에서 중복을 허락하여 5개를 선택하는 경우의 수는  ${}_3H_5 = {}_7C_5 = 21$

따라서 구하는 경우의 수는  $3 \times 21 = 63$

27. [출제의도] 여러 가지 적분법을 활용하여 문제해결하기

$$f(x) = \int_1^x \frac{n-\ln t}{t} dt \text{의 양변을 } x \text{에 대하여}$$

$$\text{미분하면 } f'(x) = \frac{n-\ln x}{x}$$

$$f'(x)=0 \text{에서 } x=e^n$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

$x$	(0)	...	$e^n$	...
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$		↗	극대	↘

함수  $f(x)$ 는  $x=e^n$ 에서 최댓값을 가지므로

$$g(n) = f(e^n) = \int_1^{e^n} \frac{n-\ln t}{t} dt$$

$$n - \ln t = s \text{라 하면 } \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{t} \text{이고,}$$

$t=1$ 일 때  $s=n$ ,  $t=e^n$ 일 때  $s=0$ 이므로

$$g(n) = \int_n^0 (-s) ds$$

$$= \left[ -\frac{1}{2}s^2 \right]_n^0$$

$$= \frac{1}{2}n^2$$

$$\therefore \sum_{n=1}^{12} g(n) = \sum_{n=1}^{12} \frac{n^2}{2} = 325$$

28. [출제의도] 쌍곡선의 방정식을 활용하여 추론하기

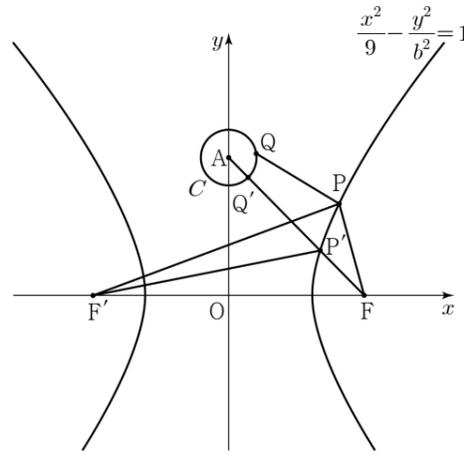
쌍곡선의 주축의 길이가 6이므로  $a^2=9$

점 P가 쌍곡선  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  위의 점이므로

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 6$$

$$\overline{PQ} + \overline{PF'} = \overline{PQ} + (\overline{PF} + 6) = (\overline{PQ} + \overline{PF}) + 6$$

$\overline{PQ} + \overline{PF}$ 는 두 점 P, Q가 선분 AF 위의 점일 때 최소이다.



그림과 같이 선분 AF가 쌍곡선  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과

원 C와 만나는 점을 각각 P', Q'이라 하면

$$\overline{PQ} + \overline{PF'} \geq (\overline{P'Q'} + \overline{P'F}) + 6$$

$$= (\overline{AF} - 1) + 6$$

$$= \sqrt{c^2 + 25} + 5$$

$\overline{PQ} + \overline{PF'}$ 의 최솟값이 12이므로  $\sqrt{c^2 + 25} + 5 = 12$

$$c^2 = 24$$

$$\therefore b^2 = c^2 - a^2 = 24 - 9 = 15$$

$$\therefore a^2 + 3b^2 = 9 + 3 \times 15 = 54$$

29. [출제의도] 순열과 조합을 활용하여 문제해결하기

집합 Y의 원소들을 3으로 나누었을 때의 나머지가 같은 수들을 원소로 하는 집합 Y의 부분집합을 각각  $A = \{1, 4\}$ ,  $B = \{2, 5\}$ ,  $C = \{3\}$ 이라 하자.

(i)  $f(4)=3$ 인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k$  ( $k$ 는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서  $f(1), f(2), f(3)$ 의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	1	1	$3! \times 2 \times 2 = 24$
3	0	0	$2^3 = 8$
0	3	0	$2^3 = 8$
0	0	3	$1^3 = 1$

$$\therefore 24 + 8 + 8 + 1 = 41$$

(ii)  $f(4)=1$  또는  $f(4)=4$ 인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+1$  ( $k$ 는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서  $f(1), f(2), f(3)$ 의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	0	2	$3 \times 2 = 6$
2	1	0	$3 \times 2^2 \times 2 = 24$
0	2	1	$3 \times 2^2 = 12$

$$\therefore 2 \times (6 + 24 + 12) = 84$$

(iii)  $f(4)=2$  또는  $f(4)=5$ 인 경우

$f(1)+f(2)+f(3)=3k+2$  ( $k$ 는 자연수)이므로

집합 A, B, C의 원소 중에서  $f(1), f(2), f(3)$ 의 값으로 선택할 수 있는 원소의 개수와 각 경우의 함수의 개수는 표와 같다.

A	B	C	함수의 개수
1	2	0	$3 \times 2^2 \times 2 = 24$
2	0	1	$3 \times 2^2 = 12$
0	1	2	$3 \times 2 = 6$

$$\therefore 2 \times (24 + 12 + 6) = 84$$

따라서 구하는 함수의 개수는  $41 + 84 + 84 = 209$

【 다른 풀이 】

(i)  $f(4)=3$ 인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 0이 되는 수들의 순서쌍은 (1, 1, 1), (2, 2, 2), (3, 3, 3), (4, 4, 4), (5, 5, 5)와 (1, 1, 4), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 5, 5)와 (1, 2, 3), (1, 3, 5), (2, 3, 4), (3, 4, 5)이고, 각 순서쌍을 이루는 수들을  $f(1), f(2), f(3)$ 이 되도록 나열하는 방법의 수는

$$5 \times \frac{3!}{3!} + 4 \times \frac{3!}{2!} + 4 \times 3! = 41$$

(ii)  $f(4)=1$  또는  $f(4)=4$ 인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 1이 되는 수들의 순서쌍은 (1, 1, 2), (1, 1, 5), (1, 3, 3), (2, 2, 3), (2, 4, 4), (3, 3, 4), (3, 5, 5), (4, 4, 5)와 (1, 2, 4), (1, 4, 5), (2, 3, 5)이고, 각 순서쌍을 이루는 수들을

$f(1), f(2), f(3)$ 이 되도록 나열하는 방법의 수는

$$8 \times \frac{3!}{2!} + 3 \times 3! = 42$$

$$\therefore 42 \times 2 = 84$$

(iii)  $f(4)=2$  또는  $f(4)=5$ 인 경우

집합 Y의 원소 중 중복을 허락하여 선택한 세 수들의 합을 3으로 나눈 나머지가 2가 되는 수들의 순서쌍은 (1, 1, 3), (1, 2, 2), (1, 5, 5), (2, 2, 4), (2, 3, 3), (3, 3, 5), (3, 4, 4), (4, 5, 5)와 (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 4, 5)이고, 각 순서쌍을 이루는 수들을

$f(1), f(2), f(3)$ 이 되도록 나열하는 방법의 수는

$$8 \times \frac{3!}{2!} + 3 \times 3! = 42$$

$$\therefore 42 \times 2 = 84$$

따라서 구하는 함수의 개수는  $41 + 84 + 84 = 209$

30. [출제의도] 도함수를 활용하여 추론하기

$$f(x) = e^x(ax^3 + bx^2) = x^2 e^x(ax + b)$$

$$f'(x) = xe^x\{ax^2 + (3a+b)x + 2b\}$$

$f(0) = f'(0) = 0$ 이므로 함수  $f(x)$ 의 그래프는  $x=0$ 에서  $x$ 축에 접하고,

조건 (가)에서  $M(t) = f(t)$ 에 의하여

함수  $f(x)$ 는  $x > 0$ 에서 증가하므로  $a > 0$

또한 함수  $f(x)$ 의 그래프가  $x > 0$ 에서  $x$ 축과

만나지 않고  $f(-\frac{b}{a}) = 0$ 이므로  $-\frac{b}{a} < 0$

$$\therefore b > 0$$

$$f'(x) = xe^x\{ax^2 + (3a+b)x + 2b\} \text{에서}$$

이차방정식  $ax^2 + (3a+b)x + 2b = 0$ 의 판별식을

$D$ 라 하면

$$D = (3a+b)^2 - 8ab = (a-b)^2 + 8a^2 > 0 \text{이므로}$$

이차방정식은 서로 다른 두 실근  $\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ )를 갖는다.

$$\alpha + \beta = -\frac{3a+b}{a} < 0, \alpha\beta = \frac{2b}{a} > 0 \text{이므로}$$

$\alpha < \beta < 0$ 이다.

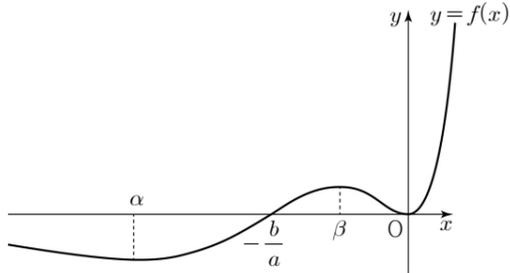
$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = \alpha, x = \beta, x = 0$$

함수  $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

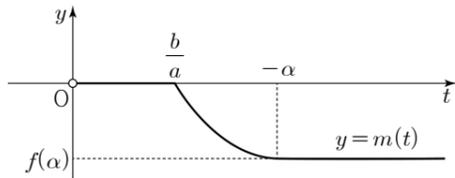
$x$	...	$\alpha$	...	$\beta$	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

함수  $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\text{따라서 } m(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < \frac{b}{a}) \\ f(-t) & (\frac{b}{a} \leq t \leq -\alpha) \\ f(\alpha) & (t > -\alpha) \end{cases}$$



조건 (나)에서 양수  $k$ 에 대하여

단한 구간  $[k, k+2]$ 에 있는 임의의 실수  $t$ 에 대해서만  $m(t) = f(-t)$ 가 성립하므로

$$\frac{b}{a} = k, \quad -\alpha = k+2$$

$$f'(\alpha) = f'(-k-2) = 0$$

$$\frac{-k-2}{e^{k+2}} \{a(-k-2)^2 + (3a+ak)(-k-2) + 2ak\} = 0$$

$$\frac{-k-2}{e^{k+2}} \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$a(-k-2)^2 + (3a+ak)(-k-2) + 2ak = 0$$

$$a(k-2) = 0$$

$$\therefore k=2, \quad \alpha = -4$$

따라서  $f(x) = ae^x(x^3 + 2x^2)$  이고,

$$m(t) = \begin{cases} 0 & (0 < t < 2) \\ ae^{-t}(-t^3 + 2t^2) & (2 \leq t \leq 4) \\ -\frac{32a}{e^4} & (t > 4) \end{cases}$$

조건 (다)에 의하여

$$\begin{aligned} & \int_1^5 \{e^t \times m(t)\} dt \\ &= \int_2^4 (-at^3 + 2at^2) dt + \int_4^5 \left(-\frac{32a}{e^4} e^t\right) dt \\ &= \left[-\frac{a}{4}t^4 + \frac{2a}{3}t^3\right]_2^4 + \left[-\frac{32a}{e^4}e^t\right]_4^5 \\ &= \frac{28a}{3} - 32ae = \frac{7}{3} - 8e \end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{1}{4}$$

따라서  $f(k+1) = f(3) = \frac{45}{4}e^3$  이고,  $p+q = 49$