

수학 영역(가형)

제 2 교시

1

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

3. 쌍곡선 $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 점근선의 방정식이 $y = kx$, $y = -kx$ 이다.

양수 k 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ 1

2. 반지름의 길이가 4, 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 부채꼴의 호의 길이는?

[2점]

- ① $\frac{\pi}{4}$ ② $\frac{\pi}{2}$ ③ $\frac{3}{4}\pi$ ④ π ⑤ $\frac{5}{4}\pi$

4. 닫힌 구간 $[2, 4]$ 에서 함수 $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 의 최솟값은? [3점]

- ① $\frac{1}{32}$ ② $\frac{1}{16}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

5. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

7. 자연수 5의 분할 중 3 이하의 자연수의 합으로 나타내어지는 분할의 수는? [3점]

- ① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

6. 곡선 $y = x^2 - 2x \ln x$ 의 변곡점의 x 좌표는? [3점]

- ① 1 ② \sqrt{e} ③ 2 ④ e ⑤ 3

8. 곡선 $x^3 + xy - y^2 = 0$ 위의 점 $(2, 4)$ 에서의 접선의 기울기는?

[3점]

- ① $\frac{13}{6}$ ② $\frac{7}{3}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ $\frac{17}{6}$

10. $\left(\frac{x}{2} + \frac{a}{x}\right)^6$ 의 전개식에서 x^2 의 계수가 15일 때, 양수 a 의 값은?

[3점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

9. $0 \leq x < 2\pi$ 에서 부등식 $2\sin x + 1 < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때,

$\cos(\beta - \alpha)$ 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0
 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. 함수 $f(x) = \frac{x}{2} + 2\sin x$ 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$g(x) = (f \circ f)(x)$ 라 할 때, $g'(\pi)$ 의 값은? [3점]

- ① -1 ② $-\frac{7}{8}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{5}{8}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

12. 좌표평면 위에 두 점 $F(c, 0)$, $F'(-c, 0)$ ($c > 0$)을 초점으로

하고 점 $A(0, 1)$ 을 지나는 타원 C 가 있다. 두 점 A , F' 을 지나는 직선이 타원 C 와 만나는 점 중 점 A 가 아닌 점을 B 라 하자.

삼각형 ABF 의 둘레의 길이가 16일 때, 선분 FF' 의 길이는?

[3점]

- ① 6 ② $4\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{15}$ ④ $6\sqrt{2}$ ⑤ $2\sqrt{21}$

13. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 가

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+3 & (x < 1) \\ \ln x & (x > 1) \end{cases}$$

이다. $f(e)=2$ 일 때, $f(-6)$ 의 값은? [3점]

- ① 9 ② 11 ③ 13 ④ 15 ⑤ 17

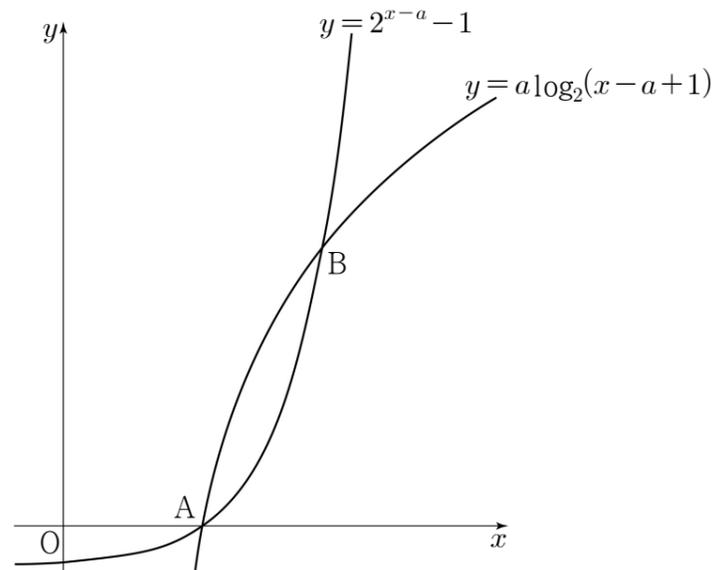
14. 그림과 같이 $a > 1$ 인 실수 a 에 대하여

두 곡선 $y = a \log_2(x-a+1)$ 과 $y = 2^{x-a} - 1$ 이

서로 다른 두 점 A, B에서 만난다. 점 A가 x 축 위에 있고

삼각형 OAB의 넓이가 $\frac{7}{2}a$ 일 때, 선분 AB의 중점은 $M(p, q)$ 이다.

$p+q$ 의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



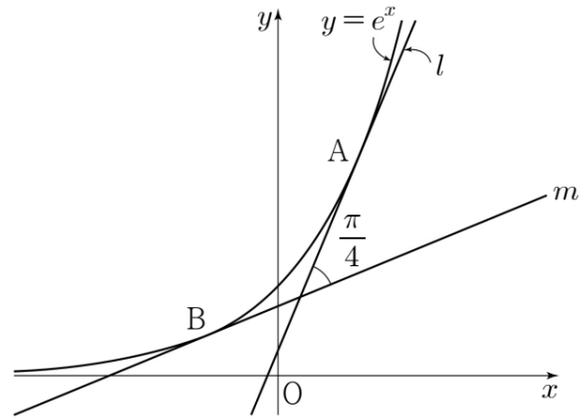
- ① $\frac{13}{2}$ ② 7 ③ $\frac{15}{2}$ ④ 8 ⑤ $\frac{17}{2}$

15. 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 두 직선 $x = 1, x = 2$ 및 x 축으로 둘러싸인

부분의 넓이를 S 라 하자. 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 두 직선 $x = 1, x = a$ 및 x 축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $2S$ 가 되도록 하는 모든 양수 a 의 값의 합은? [4점]

- ① $\frac{15}{4}$ ② $\frac{17}{4}$ ③ $\frac{19}{4}$ ④ $\frac{21}{4}$ ⑤ $\frac{23}{4}$

16. 그림과 같이 곡선 $y = e^x$ 위의 두 점 $A(t, e^t), B(-t, e^{-t})$ 에서의 접선을 각각 l, m 이라 하자. 두 직선 l 과 m 이 이루는 예각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 일 때, 두 점 A, B 를 지나는 직선의 기울기는? (단, $t > 0$) [4점]



- ① $\frac{1}{\ln(1+\sqrt{2})}$ ② $\frac{1}{\ln 2}$ ③ $\frac{4}{3\ln(1+\sqrt{2})}$
 ④ $\frac{7}{6\ln 2}$ ⑤ $\frac{3}{2\ln(1+\sqrt{2})}$

17. $a > e$ 인 실수 a 에 대하여

두 곡선 $y = e^{x-1}$ 과 $y = a^x$ 이 만나는 점의 x 좌표를 $f(a)$ 라 할 때,

$\lim_{a \rightarrow e^+} \frac{1}{(e-a)f(a)}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{e^2}$ ② $\frac{1}{e}$ ③ 1 ④ e ⑤ e^2

18. 그림과 같이 포물선 $y^2 = 16x$ 에 대하여

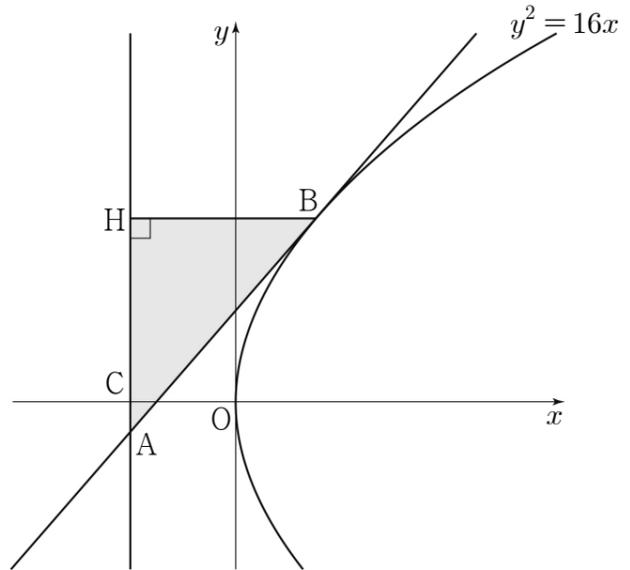
포물선의 준선 위의 한 점 A가 제3사분면에 있다.

점 A에서 포물선에 그은 기울기가 양수인 접선과 포물선이

만나는 점을 B, 점 B에서 준선에 내린 수선의 발을 H,

준선과 x 축이 만나는 점을 C라 하자.

$\overline{AC} \times \overline{CH} = 8$ 일 때, 삼각형 ABH의 넓이는? [4점]



- ① $15\sqrt{3}$ ② $\frac{46}{3}\sqrt{3}$ ③ $\frac{47}{3}\sqrt{3}$
 ④ $16\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{49}{3}\sqrt{3}$

19. 다음은 1부터 n 까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n 개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 세 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, $n \geq 5$)

주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는

‘(i) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우’에서

‘(ii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우’와

‘(iii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우’를 제외하면 된다.

(i)의 경우 :

n 개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_nC_3$ 이다.

(ii)의 경우 :

주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는 $(n-2)$ 이다.

(iii)의 경우 :

연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우의 수는 이고, 마찬가지로 연속되는 두 수 중 하나가 n 인 경우의 수도 이다.

또한 연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과 n 이 아닌 경우의 수는 이다.

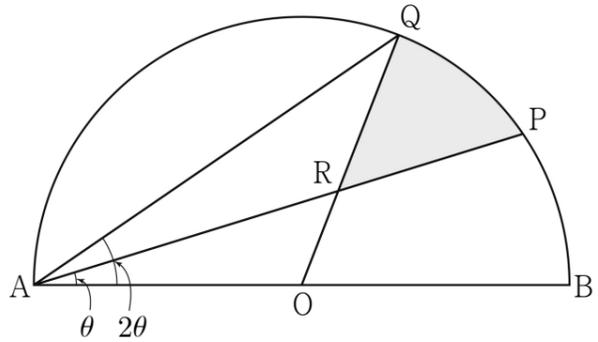
따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는 $2 \times (\text{가}) + \text{나}$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 n 개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$ 이라 할 때, $\frac{p(18) \times q(17)}{r(16)}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{15}{2}$ ② 9 ③ $\frac{21}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{27}{2}$

20. 그림과 같이 길이가 4인 선분 AB를 지름으로 하는 반원 위에 두 점 P, Q를 $\angle PAB = \theta$, $\angle QAB = 2\theta$ 가 되도록 잡는다. 선분 AB의 중점 O에 대하여 선분 OQ와 선분 AP가 만나는 점을 R라 하자. 호 PQ와 두 선분 QR, RP로 둘러싸인 부분의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ 2 ④ $\frac{7}{3}$ ⑤ $\frac{8}{3}$

21. $\frac{3}{5} < x < 4$ 에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 $f(1)=2$ 이고

$$f'(x) = \frac{1 - x^2 \{f(x)\}^3}{x^3 \{f(x)\}^2}$$

을 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 역함수 $g(x)$ 가 존재하고 미분가능할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보기 >

ㄱ. $g'(2) = -\frac{4}{7}$

ㄴ. $g(x) = \frac{1}{3}x^3 \{g(x)\}^3 - \frac{5}{3}$

ㄷ. $2 < g(1) < \frac{5}{2}$

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. 방정식 $\log_3(x+2)=3$ 을 만족시키는 실수 x 의 값을 구하시오.

[3점]

23. 함수 $f(x)=x\sqrt{x}$ 에 대하여 $f'(16)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 좌표평면에서 곡선 $y = 4\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ ($0 \leq x \leq 2$) 위의 점 중 y 좌표가 정수인 점의 개수를 구하시오. [3점]

26. 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 중복을 허락하여 7개를 선택할 때, 짝수가 두 개가 되는 경우의 수를 구하시오. [4점]

25. 함수 $f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 8}$ 에 대하여 부등식 $f'(x) > 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 자연수 n 에 대하여 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \int_1^x \frac{n - \ln t}{t} dt$$

의 최댓값을 $g(n)$ 이라 하자. $\sum_{n=1}^{12} g(n)$ 의 값을 구하시오. [4점]

28. 그림과 같이 두 초점이 $F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$ 이고,

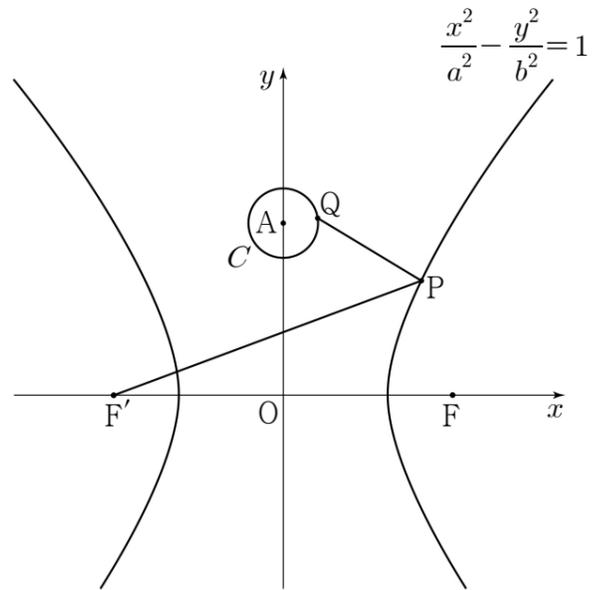
주축의 길이가 6인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 과

점 $A(0, 5)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 C 가 있다.

제1사분면에 있는 쌍곡선 위를 움직이는 점 P 와 원 C 위를

움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ} + \overline{PF'}$ 의 최솟값이 12일 때,

$a^2 + 3b^2$ 의 값을 구하시오. (단, a 와 b 는 상수이다.) [4점]



29. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에서 집합 $Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 로의 함수 중에서

$$f(1) + f(2) + f(3) - f(4) = 3m \quad (m \text{은 정수})$$

를 만족시키는 함수 f 의 개수를 구하시오. [4점]

30. 함수 $f(x) = e^x(ax^3 + bx^2)$ 과 양의 실수 t 에 대하여 닫힌 구간 $[-t, t]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 $M(t)$, 최솟값을 $m(t)$ 라 할 때, 두 함수 $M(t), m(t)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 모든 양의 실수 t 에 대하여 $M(t) = f(t)$ 이다.
 (나) 양수 k 에 대하여 닫힌 구간 $[k, k+2]$ 에 있는 임의의 실수 t 에 대해서만 $m(t) = f(-t)$ 가 성립한다.

$$(다) \int_1^5 \{e^t \times m(t)\} dt = \frac{7}{3} - 8e$$

$f(k+1) = \frac{q}{p}e^{k+1}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, a 와 b 는 0이 아닌 상수, p 와 q 는 서로소인 자연수이고,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ 이다.) [4점]

※ 확인 사항

답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.