2018학년도 9월 고2 전국연합학력평가
정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	②	2	③	3	⑤	4	②	5	③
6	③	7	⑤	8	①	9	②	10	③
11	④	12	③	13	①	14	②	15	②
16	④	17	④	18	①	19	⑤	20	④
21	⑤	22	2	23	7	24	13	25	3
26	72	27	512	28	71	29	18	30	11

해 설

1. [출제의도] 지수 계산하기
$2^5 \times 2^{-3} = 2^{5-3} = 2^2 = 4$

2. [출제의도] 집합의 원소의 개수 구하기
$A \cap B = \{2,\ 4,\ 6\}$ 이므로 $n(A \cap B) = 3$

3. [출제의도] 등비수열의 항 구하기
첫째항을 a라 하면
$a_2 = 2a = 6$이므로 $a = 3$
따라서 $a_4 = 3 \times 2^3 = 24$

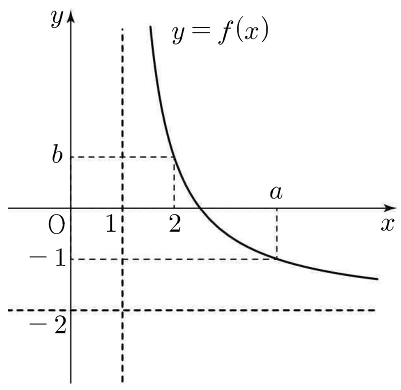
4. [출제의도] 합성함수 이해하기
$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(5) = 2$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) = 2,\ \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -1$ 이므로
$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) + \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 2 - 1 = 1$

6. [출제의도] 수열의 합 이해하기
$\sum\limits_{k=1}^{6} a_k = 66,\ \sum\limits_{k=1}^{5} a_k = 50$ 이므로
$a_6 = 66 - 50 = 16$

7. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기
함수 $f(x)$가 $x = 2$에서 연속이므로
$\lim\limits_{x \to 2-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2+} f(x) = f(2)$
$8 + 2a = 8 + b,\ b = 2a$
함수 $f(x)$가 $x = 2$에서 미분가능하므로
ⅰ) $\lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$
$= \lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{2x^2 + ax - (8 + b)}{x - 2}$
$= \lim\limits_{x \to 2-} \dfrac{2x^2 + ax - (8 + 2a)}{x - 2} = 8 + a$
ⅱ) $\lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$
$= \lim\limits_{x \to 2+} \dfrac{4x + b - (8 + b)}{x - 2} = 4$
ⅰ), ⅱ)에 의하여 $8 + a = 4,\ a = -4$
따라서 $b = -8,\ ab = 32$

8. [출제의도] 유리함수의 성질 이해하기
$f(x) = \dfrac{3}{x - 1} - 2$이라 하면



$f(2) = b = 1,\ f(a) = \dfrac{3}{a - 1} - 2 = -1$
$a = 4,\ b = 1$ 따라서 $a + b = 5$

9. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim\limits_{x \to 3}(x^2 - 9) = 0$ 이므로 $\lim\limits_{x \to 3}(2x^2 + ax + b) = 0$
$18 + 3a + b = 0$
$b = -3(a + 6)$
$\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x^2 + ax - 3(a + 6)}{(x + 3)(x - 3)}$
$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{(x - 3)(2x + a + 6)}{(x + 3)(x - 3)}$
$= \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2x + a + 6}{x + 3}$
$= \dfrac{12 + a}{6} = 3$
$a = 6,\ b = -36$
따라서 $a + b = -30$

10. [출제의도] 평균변화율 이해하기
$\dfrac{0 - (-8)}{0 - (-2)} = \dfrac{a(a + 1)(a - 2) - 0}{a - 0}$
$a > 0$ 이므로
$(a + 1)(a - 2) = 4$
$(a + 2)(a - 3) = 0$
따라서 $a = 3$

11. [출제의도] 급수의 성질 이해하기
급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{n} + 1\right)$이 수렴하므로 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{n} = -1$

따라서 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{na_n + 3n^2}{n^2 + 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\dfrac{a_n}{n} + 3}{1 + \dfrac{1}{n^2}} = 2$

12. [출제의도] 역함수 이해하기
$g^{-1}(k) = a$라 하면
$(f \circ g^{-1})(k) = f(a) = 4a - 5 = 7,\ a = 3$
$g^{-1}(k) = 3$이므로 $k = g(3) = 10$

13. [출제의도] 미분계수의 정의를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
$f'(1) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1 + h) - f(1)}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^3 + 13h^2 + 26h}{h}$
$= \lim\limits_{h \to 0}(h^2 + 13h + 26) = 26$

14. [출제의도] 정적분을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
$v(t) = -3(t + 2)(t - 2)$이고 $v(2) = 0$ 이므로
$\int_0^4 |12 - 3t^2|\, dt$
$= \int_0^2 (12 - 3t^2)\, dt + \int_2^4 (-12 + 3t^2)\, dt$
$= \left[12t - t^3\right]_0^2 + \left[-12t + t^3\right]_2^4$
$= 16 + 32 = 48$

15. [출제의도] 수열의 합 이해하기
공차를 d라 하면
$\sum\limits_{k=1}^{15} a_k = \dfrac{15(2a_1 + 14d)}{2} = 165$
이므로 $a_1 + 7d = 11$ … ㉠
$\sum\limits_{k=1}^{21} (-1)^k a_k = d + d + d + \cdots + d - a_{21} = 10d - a_{21}$
$= -a_1 - 10d = -20$
이므로 $a_1 + 10d = 20$ … ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $a_1 = -10,\ d = 3$
따라서 $a_{21} = -10 + 60 = 50$

16. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim\limits_{x \to \infty}\left\{\sqrt{f(-x)} - \sqrt{f(x)}\right\}$
$= \lim\limits_{x \to \infty}\left\{\sqrt{a(-x - 1)^2 + 1} - \sqrt{a(x - 1)^2 + 1}\right\}$
$= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4ax}{\sqrt{a(x + 1)^2 + 1} + \sqrt{a(x - 1)^2 + 1}}$
$= \dfrac{4a}{2\sqrt{a}} = 6$
따라서 $a = 9$

17. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
수열 $\{a_n\}$의 일반항 $a_n = 3r^{n-1}\ (r > 1)$
$b_n = (\log_{a_1} a_2) \times (\log_{a_2} a_3) \times (\log_{a_3} a_4) \times \cdots \times (\log_{a_n} a_{n+1})$
$= \dfrac{\log a_2}{\log a_1} \times \dfrac{\log a_3}{\log a_2} \times \dfrac{\log a_4}{\log a_3} \times \cdots \times \dfrac{\log a_{n+1}}{\log a_n}$
$= \log_{a_1} a_{n+1} = \log_3 (3r^n) = 1 + n\log_3 r$
$\sum\limits_{k=1}^{10} b_k = 10 + (\log_3 r) \times \sum\limits_{k=1}^{10} k$
$= 10 + 55\log_3 r = 120$
따라서 $\log_3 r = 2$

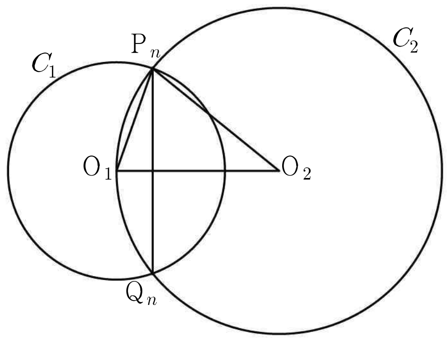
18. [출제의도] 정적분의 정의를 활용하여 추론하기

$S_n = \dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{(1 + 2 + 3 + \cdots + n)(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2)}$
이라 하면
$S_n = \dfrac{\boxed{12} \times \sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^2(n + 1)^2(2n + 1)}$
$= \boxed{12} \times \dfrac{\boxed{n^3}}{(n + 1)^2(2n + 1)} \times \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^4}{n^5}$
이다. 따라서
$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 6 \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left\{\left(\dfrac{k}{n}\right)^4 \dfrac{1}{n}\right\}$
이므로 정적분의 정의에 의하여
$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 6\int_0^1 f(x)\, dx = \boxed{\dfrac{6}{5}}$
이다.

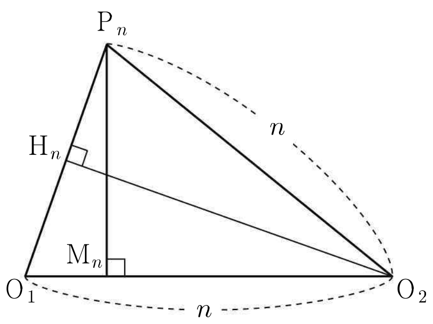
$p = 12,\ g(n) = n^3,\ q = \dfrac{6}{5}$

따라서 $g(2)+\dfrac{p}{q}=18$

19. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기



원 C_1, C_2의 중심을 각각 O_1, O_2라 하자.
점 O_2에서 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{P}_n$에 내린 수선의 발을 H_n, 점 P_n에서 선분 $\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2$에 내린 수선의 발을 M_n이라 하자.



삼각형 $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_n\mathrm{O}_1$이 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n}=\dfrac{n-1}{2}$

직각삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{H}_n\mathrm{O}_2$에서

$\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{H}_n}=\sqrt{n^2-\left(\dfrac{n-1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3n^2+2n-1}}{2}$

삼각형 $\mathrm{O}_2\mathrm{P}_n\mathrm{O}_1$의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{O}_1}\times\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{H}_n}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{M}_n}$이므로

$\dfrac{1}{2}\times(n-1)\times\dfrac{\sqrt{3n^2+2n-1}}{2}=\dfrac{1}{2}\times n\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{M}_n}$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{M}_n}=\dfrac{(n-1)\sqrt{3n^2+2n-1}}{2n}$

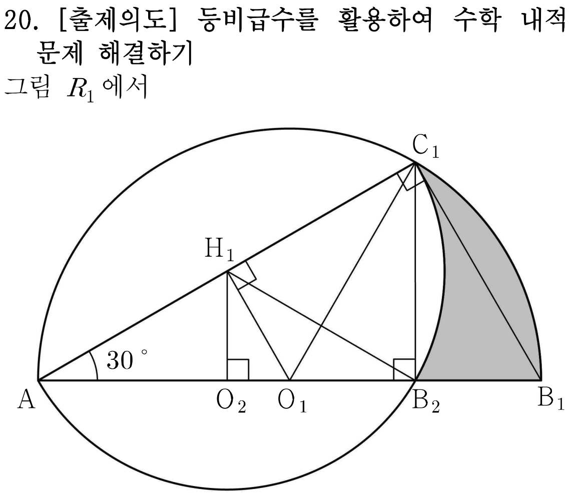
$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=2\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{M}_n}$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}}{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n-1)\sqrt{3n^2+2n-1}}{n^2}=\sqrt{3}$

20. [출제의도] 등비급수를 활용하여 수학 내적 문제 해결하기

그림 R_1에서



$\angle\mathrm{B}_1\mathrm{AC}_1=30^\circ$이므로

직각삼각형 $\mathrm{C}_1\mathrm{AB}_1$에서 $\overline{\mathrm{AC}_1}=4\sqrt{3}$

직각삼각형 $\mathrm{C}_1\mathrm{AB}_2$에서 $\overline{\mathrm{AB}_2}=6$

선분 AB_1의 중점을 O_1, 선분 AB_2의 중점을 O_2, 선분 AC_1의 중점을 H_1이라 하면

$\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{H}_1}=2$, $\overline{\mathrm{H}_1\mathrm{O}_2}=\sqrt{3}$

$S_1=$(부채꼴 $\mathrm{O}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1+$삼각형 $\mathrm{O}_1\mathrm{C}_1\mathrm{A}$)

$\quad-$(부채꼴 $\mathrm{H}_1\mathrm{B}_2\mathrm{C}_1+$삼각형 $\mathrm{H}_1\mathrm{AB}_2$)

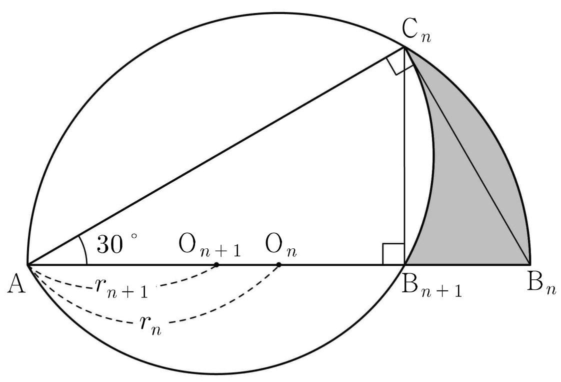
$=\left(16\pi\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}+\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{3}\times2\right)$

$\quad-\left(12\pi\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}+\dfrac{1}{2}\times6\times\sqrt{3}\right)$

$=16\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)-12\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$=\dfrac{1}{3}(2\pi+3\sqrt{3})$

다음은 그림 R_n의 일부이다.



$\overline{\mathrm{AB}_n}$을 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_n, $\overline{\mathrm{AB}_{n+1}}$을 지름으로 하는 반원의 반지름의 길이를 r_{n+1}이라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}_n}=2r_n$, $\angle\mathrm{B}_n\mathrm{AC}_n=30^\circ$이므로

직각삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{AB}_n$에서 $\overline{\mathrm{AC}_n}=\sqrt{3}r_n$

$\angle\mathrm{B}_{n+1}\mathrm{AC}_n=30^\circ$이므로

직각삼각형 $\mathrm{C}_n\mathrm{AB}_{n+1}$에서 $\overline{\mathrm{AB}_{n+1}}=\dfrac{3}{2}r_n$

따라서 $r_{n+1}=\dfrac{3}{4}r_n$

그림 R_n에서 새롭게 색칠되는 도형의 넓이를 T_n이라 하면 $T_{n+1}=\dfrac{9}{16}T_n$이고 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}T_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}T_k=\dfrac{\dfrac{1}{3}(2\pi+3\sqrt{3})}{1-\dfrac{9}{16}}$

$=\dfrac{16}{21}(2\pi+3\sqrt{3})$

따라서 $p+q=21+16=37$

21. [출제의도] 정적분을 활용하여 추론하기

ㄱ. $f'(x)=x^2-4tx+3t^2=(x-t)(x-3t)$ (참)

ㄴ. $f(x)=\displaystyle\int_{3t}^{x}(s^2-4ts+3t^2)ds$

$=\left[\dfrac{1}{3}s^3-2ts^2+3t^2s\right]_{3t}^{x}=\dfrac{1}{3}x^3-2tx^2+3t^2x$

$=\dfrac{1}{3}x(x-3t)^2$

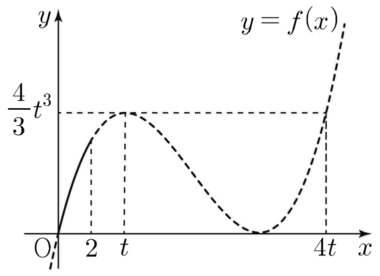
$f'(t)=0$, $f(t)=\dfrac{4}{3}t^3$이므로

$f(x)-\dfrac{4}{3}t^3=\dfrac{1}{3}x(x^2-6tx+9t^2)-\dfrac{4}{3}t^3$

$\qquad=\dfrac{1}{3}(x-t)^2(x-4t)$

$f(t)=f(4t)=\dfrac{4}{3}t^3$

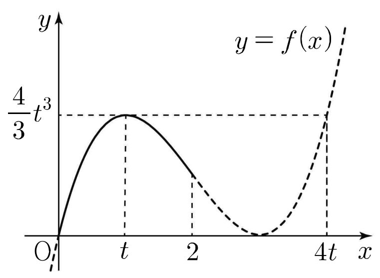
ⅰ) $t>2$일 때



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$g(t)=f(2)=\dfrac{2}{3}(3t-2)^2$

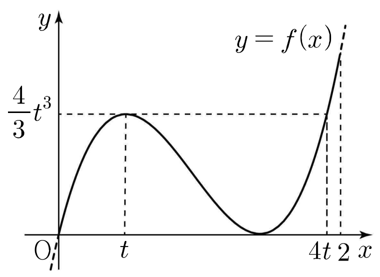
ⅱ) $t\le2<4t$ 즉, $\dfrac{1}{2}<t\le2$일 때



함수 $f(x)$는 $x=t$에서 최댓값을 가지므로

$g(t)=f(t)=\dfrac{4}{3}t^3$

ⅲ) $4t\le2$ 즉, $0<t\le\dfrac{1}{2}$일 때



함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값을 가지므로

$g(t)=f(2)=\dfrac{2}{3}(3t-2)^2$

ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여

$t>2$일 때, $g(t)=\dfrac{2}{3}(3t-2)^2$ (참)

ㄷ. 함수

$$g(t)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}(3t-2)^2 & \left(0<t\le\dfrac{1}{2}\right)\\ \dfrac{4}{3}t^3 & \left(\dfrac{1}{2}<t\le2\right)\\ \dfrac{2}{3}(3t-2)^2 & (t>2)\end{cases}$$

의 미분가능성을 조사하면

ⅰ) $t=\dfrac{1}{2}$일 때,

$\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}-}\dfrac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}-}\dfrac{\frac{2}{3}(3t-2)^2-\frac{1}{6}}{t-\frac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}-}\dfrac{(2t-1)(6t-5)}{2t-1}=-2$

$\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}+}\dfrac{g(t)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{t-\frac{1}{2}}=\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}+}\dfrac{\frac{4}{3}t^3-\frac{1}{6}}{t-\frac{1}{2}}$

$=\lim\limits_{t\to\frac{1}{2}+}\dfrac{(2t-1)(4t^2+2t+1)}{3(2t-1)}=1$

따라서 $t=\dfrac{1}{2}$에서 미분가능하지 않다.

ⅱ) $t=2$일 때,

$$\lim_{t \to 2-} \frac{g(t)-g(2)}{t-2} = \lim_{t \to 2-} \frac{\frac{4}{3}t^3 - \frac{32}{3}}{t-2}$$
$$= \lim_{t \to 2-} \frac{\frac{4}{3}(t^3-8)}{t-2} = \lim_{t \to 2-} \frac{4(t^2+2t+4)}{3} = 16$$

$$\lim_{t \to 2+} \frac{g(t)-g(2)}{t-2} = \lim_{t \to 2+} \frac{\frac{2}{3}(3t-2)^2 - \frac{32}{3}}{t-2}$$
$$= \lim_{t \to 2+} \frac{2(t-2)(3t+2)}{t-2} = 16$$

따라서 $t=2$에서 미분가능하다.
ⅰ), ⅱ)에 의하여 $t>0$에서 함수 $g(t)$는
$t=\frac{1}{2}$에서만 미분가능하지 않다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

22. [출제의도] 로그 계산하기
$\log_5 50 + \log_5 \frac{1}{2} = \log_5 25 = 2$

23. [출제의도] 집합의 포함관계 이해하기
$B=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$
$a=1$일 때, $A=\{1,\ 2\}$
$a=2$일 때, $A=\{1,\ 4\}$
$a=4$일 때, $A=\{1,\ 8\}$
$A \subset B$를 만족시키는 a는 1, 2, 4
따라서 모든 자연수 a의 값의 합은 7

24. [출제의도] 부정적분을 활용하여 함숫값 구하기
$f(x)=x^3+2x+C$ (C는 적분상수)
$f(0)=C=1$이므로 $f(x)=x^3+2x+1$
따라서 $f(2)=13$

25. [출제의도] 충분조건 이해하기
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하면
$P=\{x \mid 1 \le x \le 3\}$, $Q=\{x \mid x \le a\}$
$P \subset Q$이므로 $a \ge 3$
따라서 실수 a의 최솟값은 3

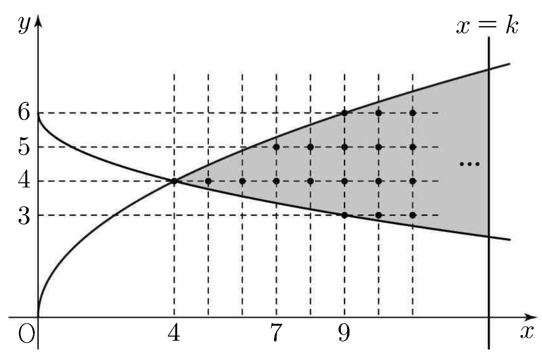
26. [출제의도] 등비수열의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
x에 대한 다항식 x^3-ax+b를 $x-1$로 나눈 나머지가 57이므로
나머지 정리에 의하여
$1-a+b=57$
$b=a+56$ $\cdots$ ㉠
1, a, b가 이 순서대로 등비수열을 이루므로
$a^2=b$ $\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에 의하여
$a^2=a+56$
$a^2-a-56=(a+7)(a-8)=0$
$a=-7,\ 8$
공비 a가 양수이므로 $a=8$, $b=64$
따라서 $a+b=72$

27. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
점 C는 선분 AB의 중점이므로 $\mathrm{C}\left(\frac{3}{2}t,\ \frac{\sqrt{2}}{2}t\right)$
직선 AB의 기울기가 $-\sqrt{2}$이므로 점 C를 지나고 직선 AB에 수직인 직선을 l이라 하면
직선 l의 방정식은
$y=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{3}{2}t\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}t$
점 D는 직선 l과 직선 $x=2t$의 교점이므로
점 D의 좌표는 $\mathrm{D}\left(2t,\ \frac{3\sqrt{2}}{4}t\right)$

$$f(t)=\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\left(2t-\frac{3}{2}t\right)^2+\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}t-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}}{4}t$$
$$\lim_{t \to 4} \frac{t^2-16}{f(t)-\sqrt{6}} = \lim_{t \to 4} \frac{t^2-4^2}{\frac{\sqrt{6}}{4}t-\sqrt{6}}$$
$$=\lim_{t \to 4} \frac{4(t-4)(t+4)}{\sqrt{6}(t-4)} = \lim_{t \to 4} \frac{4(t+4)}{\sqrt{6}} = \frac{16\sqrt{6}}{3}$$
따라서 $3a^2=512$

28. [출제의도] 정적분의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
$$\int_1^{10} f(x)\,dx = \int_0^{10} f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$
$$= \int_0^2 f(x)\,dx + \int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^6 f(x)\,dx$$
$$+ \int_6^8 f(x)\,dx + \int_8^{10} f(x)\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$
$$= 5 \times 4 - \int_0^1 (x^3-6x^2+8x)\,dx$$
$$= 20 - \frac{9}{4} = \frac{71}{4}$$
따라서 $4\int_1^{10} f(x)\,dx = 71$

29. [출제의도] 무리함수의 그래프를 활용하여 추론하기
두 곡선 $y=2\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}+6$과
직선 $x=k$로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되는 점 중 x, y좌표가 모두 정수인 점의 개수는



ⅰ) $4 \le x < \frac{25}{4}$일 때, $y=4$이므로
$3 \times 1 = 3$
ⅱ) $\frac{25}{4} \le x < 9$일 때, $y=4,\ 5$이므로
$2 \times 2 = 4$
ⅲ) $9 \le x < \frac{49}{4}$일 때, $y=3,\ 4,\ 5,\ 6$이므로
$4 \times 4 = 16$
ⅳ) $\frac{49}{4} \le x < 16$일 때, $y=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$이므로
$3 \times 5 = 15$
ⅴ) $16 \le x < \frac{81}{4}$일 때,
$y=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$이므로
$5 \times 7 = 35$
ⅰ), ⅱ), ⅲ), ⅳ)에 의하여
$4 \le x < 16$일 때, 점의 개수의 합이 38이고,
ⅴ)에 의하여
$x=16,\ 17,\ 18$일 때, 점의 개수의 합이 21이다.
따라서 조건을 만족시키는 점의 개수가 59가 되도록 하는 자연수 k의 값은 18

30. [출제의도] 미분의 성질을 활용하여 수학 내적 문제 해결하기
두 다항식 $P_1(x)$, $P_2(x)$를
$P_1(x)=g(x)-4x-26$,
$P_2(x)=g(x)+2x^3-14x^2+12x+6$이라 하면
$P_1(x)=-P_2(x)$ 즉, $P_1(x)+P_2(x)=0$
따라서 $g(x)=-x^3+7x^2-4x+10$,
$$|f(x)|=\begin{cases} -\left(x^3-7x^2+8x+16\right) & (x \le a) \\ x^3-7x^2+8x+16 & (x > a) \end{cases}$$
$g(x)$의 최고차항의 계수가 음수이므로
$f(x)=x^3-7x^2+8x+16=(x+1)(x-4)^2$이고
$a=-1$이다.
함수 $h(x)=f(x)-(x-k)^2$라 하면
함수 $h(x)$의 극값이 존재해야 하므로
방정식 $h'(x)=3x^2-16x+(8+2k)=0$에서
판별식을 D라 하면 $D/4=64-3(8+2k)>0$
$k<\frac{20}{3}$이므로 k는 6이하의 자연수이다.
ⅰ) $k=1,\ 2,\ 3,\ 5$일 때
$h(-1)=-(k+1)^2<0$
$h(1)=18-(1-k)^2>0$
$h(4)=-(4-k)^2<0$
$h(6)=28-(6-k)^2>0$
사이값 정리에 의하여 삼차방정식 $h(x)=0$의 실근이 열린 구간 $(-1,\ 1)$, $(1,\ 4)$, $(4,\ 6)$에 각각 하나씩 존재한다.
ⅱ) $k=4$일 때,
$h(x)=(x+1)(x-4)^2-(x-4)^2=x(x-4)^2$
이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
ⅲ) $k=6$일 때,
극댓값 $h(2)=-4<0$이므로 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 한 점에서 만난다.
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의하여 함수 $h(x)$의 그래프가 x축과 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 5이다.
따라서 구하는 모든 자연수 k의 값의 합은 11