

01. ⑤ 02. ② 03. ② 04. ④ 05. ④
 06. ① 07. ④ 08. ③ 09. ② 10. ④
 11. ⑤ 12. ② 13. ④ 14. ③ 15. ①
 16. ③ 17. ② 18. ⑤ 19. ① 20. ③
 21. ⑤ 22. 9 23. 1 24. 80 25. 3
 26. 10 27. 14 28. 89 29. 12
 30. 30

두 점 $A(3, 5, 0)$, $B(4, 3, -2)$ 에 대하여 선분 AB 를 $3:2$ 으로 외분하는 점의 좌표가 $(a, -1, -6)$ 이므로

$$\frac{3 \times 4 - 2 \times 3}{3 - 2} = a$$

따라서

$$a = 6$$

정답 ②

1. 출제의도 : 성분으로 나타내어진 벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \vec{2a} - \vec{b} &= 2(4, 1) - (3, -2) \\ &= (8, 2) - (3, -2) \\ &= (5, 4) \end{aligned}$$

그러므로 모든 성분의 합은 9이다.

정답 ⑤

2. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x(x^2 + 2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + 2} \\ &= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

3. 출제의도 : 좌표공간에서 선분의 외분점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

4. 출제의도 : 확률의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} P(A^C \cup B^C) &= P((A \cap B)^C) \\ &= 1 - P(A \cap B) \\ &= 1 - \{P(A) - P(A \cap B^C)\} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\ &= 1 - \frac{3}{10} \\ &= \frac{7}{10} \end{aligned}$$

정답 ④

5. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y^2 = 4 \times 2 \times x$ 에서 $F(2, 0)$ 이고, 준선은 직선 $x = -2$ 이다.
 점 P 에서 준선에 내린 수선의 발을 H 라 하면
 포물선의 정의에 의하여
 $\overline{PH} = \overline{PF} = 4$ 이므로

점 P의 x좌표는 2이다.

즉 $a=2$

$$b^2 = 8 \times 2 = 16$$

$b > 0$ 이므로 $b=4$

따라서

$$a+b=2+4=6$$

정답 ④

6. 출제의도 : 역함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(e) = 3e \text{이므로 } g(3e) = e$$

함수 $f(x) = 3x \ln x$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \ln x + 3x \times \frac{1}{x} \\ &= 3 \ln x + 3 \end{aligned}$$

이므로

$$f'(e) = 3 \ln e + 3 = 6$$

한편, $f(g(x)) = x$ 에서

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

이므로

$$g'(3e) = \frac{1}{f'(g(3e))} = \frac{1}{f'(e)} = \frac{1}{6}$$

따라서

$$\begin{aligned} &\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3e+h) - g(3e-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3e+h) - g(3e)}{h} \\ &\quad + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(3e-h) - g(3e)}{-h} \\ &= g'(3e) + g'(3e) \\ &= 2g'(3e) \\ &= 2 \times \frac{1}{6} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3}$$

정답 ①

7. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 대칭 이동과 평행이동을 이용하여 그릴 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = -2^{4-3x} + k$$

$$= -\left(\frac{1}{8}\right)^{x-\frac{4}{3}} + k$$

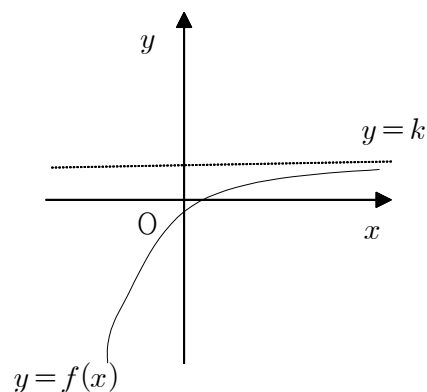
이므로 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 함수

$y=\left(\frac{1}{8}\right)^x$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭

이동시킨 후 x 축의 방향으로 $\frac{4}{3}$ 만큼, y

축의 방향으로 k 만큼 평행이동시킨 것이다.

한편, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 제2사분면을 지나지 않아야 하므로 그 개형은 다음과 같다.



이때, $f(0) \leq 0$ 이어야 하므로

$$-2^4 + k \leq 0$$

$$k \leq 16$$

따라서, k 의 최댓값은 16이다.

정답 ④

8. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 주어진 다항식의 전개식에서 조건을 만족시키는 k 의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(x+2)^{19}$ 의 일반항은
 ${}_{19}C_r 2^{19-r} x^r \quad (r=0, 1, 2, \dots, 19)$
 x^k 의 계수는 ${}_{19}C_k 2^{19-k}$
 x^{k+1} 의 계수는 ${}_{19}C_{k+1} 2^{18-k}$
 ${}_{19}C_k 2^{19-k} > {}_{19}C_{k+1} 2^{18-k}$ 에서
 ${}_{19}C_k \times 2 > {}_{19}C_{k+1}$
 $\frac{19!}{k!(19-k)!} \times 2 > \frac{19!}{(k+1)!(18-k)!}$
 $\frac{2}{19-k} > \frac{1}{k+1}$
 $3k > 17$ 에서 $k > \frac{17}{3}$
따라서 자연수 k 의 최솟값은 6이다.

정답 ③

9. 출제의도 : 정적분을 활용하여 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 함수 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$ 의 교점은 $(0, 0)$, $(1, 1)$ 이다.
이때, $0 \leq x \leq 1$ 에서 $\sin\frac{\pi}{2}x \geq 2^x-1$ 이
므로 두 곡선 $y=2^x-1$, $y=\left|\sin\frac{\pi}{2}x\right|$
로 둘러싸인 부분의 넓이는
 $\int_0^1 \left\{ \sin\frac{\pi}{2}x - (2^x-1) \right\} dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(\sin\frac{\pi}{2}x - 2^x + 1 \right) dx \\ &= \left[-\frac{2}{\pi} \cos\frac{\pi}{2}x - \frac{2^x}{\ln 2} + x \right]_0^1 \\ &= \left(-\frac{2}{\ln 2} + 1 \right) - \left(-\frac{2}{\pi} - \frac{1}{\ln 2} \right) \\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{1}{\ln 2} + 1 \end{aligned}$$

정답 ②

10. 출제의도 : 좌표평면 위를 움직이는 점의 속력의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t 에서의 속도를 $\vec{v}$ 라 하면
 $x=3t-\sin t$, $y=4-\cos t$ 이므로
 $\vec{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)$
 $= (3-\cos t, \sin t)$
그러므로 속력은
 $|\vec{v}| = \sqrt{(3-\cos t)^2 + \sin^2 t}$
 $= \sqrt{10-6\cos t}$
이때, $-1 \leq \cos t \leq 1$ 이므로 속력의 최댓값 M 은 $\cos t = -1$ 일 때
 $M=4$
또, 속력의 최솟값 m 은 $\cos t = 1$ 일 때
 $m=2$
따라서,
 $M+m=4+2=6$

정답 ④

11. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$e^y \ln x = 2y + 1$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$e^y \frac{dy}{dx} \times \ln x + e^y \times \frac{1}{x} = 2 \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{e^y}{x(e^y \ln x - 2)} \quad \dots\dots \textcircled{7}$$

⑦에 $x = e, y = 0$ 을 대입하면

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e(1 \times 1 - 2)} = \frac{1}{e}$$

곡선 위의 점 $(e, 0)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - 0 = \frac{1}{e}(x - e), \text{ 즉 } y = \frac{1}{e}x - 1$$

따라서 $a = \frac{1}{e}, b = -1$ 이므로

$$ab = \frac{1}{e} \times (-1) = -\frac{1}{e}$$

정답 ⑤

12. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{PH} \perp \alpha, \overline{PQ} \perp \overline{AB}$ 이므로

삼수선의 정리에 의해

$\overline{HQ} \perp \overline{AB}$

점 H가 삼각형 ABC의 무게중심이고,

삼각형 ABC의 넓이가 24이므로

삼각형 ABH의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{HQ} = \frac{1}{3} \times 24$$

$$\frac{1}{2} \times 8 \times \overline{HQ} = \frac{1}{3} \times 24$$

$$\overline{HQ} = 2$$

따라서 직각삼각형 PHQ에서

$$\overline{PQ} = \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HQ}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$$

정답 ②

13. 출제의도 : 표본평균의 분포를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

확률의 총합이 1이므로

$$\frac{1}{6} + a + b = 1$$

$$a + b = \frac{5}{6} \quad \text{-----}\textcircled{7}$$

또, $E(X^2) = \frac{16}{3}$ 이므로

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times a + 4^2 \times b = \frac{16}{3}$$

$$a + 4b = \frac{4}{3} \quad \text{-----}\textcircled{8}$$

⑦과 ⑧을 연립하면

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{6}$$

그러므로 확률변수 X 의 확률분포는 다음과 같다.

X	0	2	4	합계
$P(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	1

이때, X 의 평균은

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{2}{3} + 4 \times \frac{1}{6} = 2$$

그러므로

$$V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2 = \frac{16}{3} - 2^2 = \frac{4}{3}$$

이때, 모집단에서 크기가 20인 표본의 표본평균이 $\overline{X}$ 이므로

$$V(\bar{X}) = \frac{1}{20} \times V(X) \\ = \frac{1}{20} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{15}$$

정답 ④

14. 출제의도 : 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \cos^2\left(x - \frac{3}{4}\pi\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k \\ = \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k \\ = \cos^2\left\{\frac{\pi}{2} - \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right\} - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k \\ = \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k \\ = 1 - \cos^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + k$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = t \text{로 놓으면}$$

$$-1 \leq t \leq 1$$

이때

$$y = -t^2 - t + k + 1$$

$$= -\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + k + \frac{5}{4}$$

$$t = -\frac{1}{2} \text{일 때 최댓값 } k + \frac{5}{4},$$

$$t = 1 \text{일 때 최솟값 } k - 1 \text{을 갖는다.}$$

$$\text{따라서 } k + \frac{5}{4} = 3 \text{에서 } k = \frac{7}{4} \text{이고,}$$

$$m = \frac{7}{4} - 1 = \frac{3}{4} \text{이므로}$$

$$k + m = \frac{7}{4} + \frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

정답 ③

15. 출제의도 : 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

동전 A를 세 번 던져 나온 3개의 수의 합은 3, 4, 5, 6 중 하나이고,

동전 B를 네 번 던져 나온 4개의 수의 합은 12, 13, 14, 15, 16 중 하나이다.

(i) 7개의 수의 합이 19인 경우

두 동전을 각각 던졌을 때 나온 눈의 수의 합을 각각 a, b 라 하면 7개의 수의 합이 19인 경우를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면 다음과 같다.

$$(3, 16), (4, 15), (5, 14), (6, 13)$$

이때의 확률은

$$= {}_3C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ + {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times {}_4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ = \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 18 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ = \frac{35}{128}$$

(ii) 7개의 수의 합이 20인 경우

두 동전을 각각 던졌을 때 나온 눈의 수의 합을 각각 a, b 라 하면 7개의 수의 합이 20인 경우를 순서쌍 (a, b) 로 나타내면 다음과 같다.

$$(4, 16), (5, 15), (6, 14)$$

이때의 확률은

$$= {}_3C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times {}_4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + {}_3C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times {}_4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ + {}_3C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \times {}_4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \\ = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 12 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 \\ = \frac{21}{128}$$

(i), (ii)에서
구하는 확률은

$$\frac{35}{128} + \frac{21}{128} = \frac{7}{16}$$

정답 ①

16. 출제의도 : 위치벡터의 연산을 이해
하고 벡터의 내적을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$$|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}| = \sqrt{10} \text{ 에서}$$

$$2|\overrightarrow{PM}| = \sqrt{10}$$

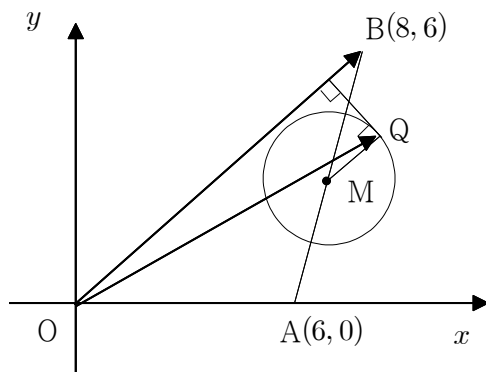
$$|\overrightarrow{PM}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

그러므로 점 P는 중심이 M이고 반지름
의 길이가 $\frac{\sqrt{10}}{2}$ 인 원 위의 점이다.

이 원을 C라 하자.

한편, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}$ 의 값이 최대이기 위해서
는 그림과 같이 직선 OB에 수직인 직선
이 원 C와 접하는 점 중 선분 OP의 길
이가 가장 클 때의 점이다.

그러므로 점 Q는 그림과 같다.



한편, 직선 OB에 수직이고 점 Q를 지
나는 직선과 직선 MQ는 수직이므로

$$\overrightarrow{OB} // \overrightarrow{MQ}$$

그러므로 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$ 가 이루는

각의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ 가 이루는
각의 크기와 같다.

두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MQ}$ 가 이루는 각의 크기
를 θ 라 하면

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{OB}| \cos \theta$$

에서

$$(6, 0) \cdot (8, 6) = \sqrt{6^2 + 0^2} \sqrt{8^2 + 6^2} \cos \theta$$

$$48 = 6 \times 10 \times \cos \theta$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5}$$

따라서, $|\overrightarrow{OA}| = 6$, $|\overrightarrow{MQ}| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 이므로

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{MQ} = |\overrightarrow{OA}| |\overrightarrow{MQ}| \cos \theta$$

$$= 6 \times \frac{\sqrt{10}}{2} \times \frac{4}{5}$$

$$= \frac{12\sqrt{10}}{5}$$

정답 ③

17. 출제의도 : 모평균의 신뢰구간을 구
할 수 있는가?

정답풀이 :

25명을 임의추출하여 구한 표본평균이
 $\overline{x}_1$ 이므로

모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구
간은

$$\overline{x}_1 - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{25}} \leq m \leq \overline{x}_1 + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{25}}$$

$$\overline{x}_1 - 1.96 \leq m \leq \overline{x}_1 + 1.96$$

$$\text{즉 } \overline{x}_1 = 80, a = 1.96$$

또, n 명을 임의 추출하여 구한 표본평균
이 $\overline{x}_2$ 이므로

모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구
간은

$$\overline{x_2} - 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x_2} + 1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}}$$

$$\text{따라서 } \overline{x_2} = \frac{15}{16} \overline{x_1} = \frac{15}{16} \times 80 = 75 \text{이고,}$$

$$1.96 \times \frac{5}{\sqrt{n}} = \frac{5}{7} a = \frac{5}{7} \times 1.96 \text{에서 } n = 49$$

$$\text{즉 } n + \overline{x_2} = 49 + 75 = 124$$

정답 ②

18. 출제의도 : 집합의 분할의 수를 이용하여 함수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) 공역 X 의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A 의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.

따라서 집합 X 의 원소 중에서 집합 A 의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.

(ii) 정의역 X 를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다.

따라서 집합 X 를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_1 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{3!} = \boxed{10} \text{이다.}$$

(iii) (i)과 (ii)의 각 경우에 대하여 집합 X 를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A 의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $4! = \boxed{24}$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 함수 f 의 개수는 $2 \times 10 \times 24 = \boxed{480}$ 이다.

이상에서 (가), (나), (다) 이므로

$$a = 10, b = 24, c = 480$$

따라서

$$a + b + c = 10 + 24 + 480 = 514$$

정답 ⑤

19. 출제의도 : 지수함수와 삼각함수의 극한에 관련된 내적문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

호 PQ의 길이가 π 이므로 $\angle POQ = \theta$ 라 하면

$$2^n \times \theta = \pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{2^n}$$

한편,

$$\overline{OQ} = \overline{OP} = 2^n$$

또, 직각삼각형

$$\overline{HP} = \overline{OP} - \overline{OH}$$

$$= 2^n - 2^n \cos \frac{\pi}{2^n}$$

$$= 2^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^n} \right)$$

그러므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\overline{OQ} \times \overline{HP})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 2^n \times 2^n \left(1 - \cos \frac{\pi}{2^n} \right) \right\} \quad \text{--- ⑦}$$

이때, $\frac{\pi}{2^n} = t$ 로 놓으면 $n \rightarrow \infty$ 일 때,

$t \rightarrow 0+$ 이므로 ⑦은

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\pi^2 (1 - \cos t)}{t^2}$$

$$= \pi^2 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos t)(1 + \cos t)}{t^2 (1 + \cos t)}$$

$$= \pi^2 \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 t}{t^2 (1 + \cos t)}$$

$$= \pi^2 \times \lim_{t \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \times \lim_{t \rightarrow 0+} \frac{1}{1 + \cos t}$$

$$= \pi^2 \times 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{\pi^2}{2}$$

정답 ①

20. 출제의도 : 미분을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ.

$$\begin{aligned} \text{함수 } f(x) &= \cos x + 2x \sin x \text{에서} \\ f'(x) &= -\sin x + 2\sin x + 2x \cos x \\ &= \sin x + 2x \cos x \end{aligned}$$

함수 $f(x)$ 가 $x = \alpha$ 에서 극값을 가지므로 $f'(\alpha) = 0$ 에서

$$\sin \alpha + 2\alpha \cos \alpha = 0$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -2\alpha$$

$$\tan \alpha = -2\alpha$$

따라서

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha = -2\alpha \quad (\text{참})$$

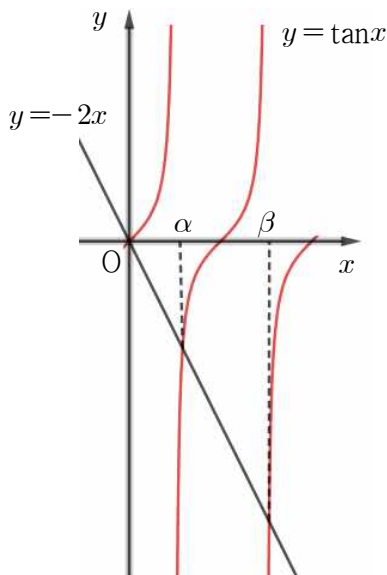
ㄴ.

$$f'(x) = 0 \text{에서}$$

$$\tan x = -2x$$

이때, $f'(\alpha) = 0$, $f'(\beta) = 0$ 이므로

열린 구간 $(0, 2\pi)$ 에서 함수 $y = \tan x$ 의 그래프와 직선 $y = -2x$ 가 만나는 점의 x 좌표가 $x = \alpha$, $x = \beta$ 이다.



이때, $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$ 이므로

$$\tan'(\alpha + \pi) = \tan' \alpha$$

한편, $\alpha < \beta$ 이고, 함수 $y = \tan x$ 는 열린 구간 $\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$ 에서 증가하므로

$$\tan'(\alpha + \pi) < \tan' \beta$$

$$\text{따라서 } g'(\alpha + \pi) < g'(\beta) \quad (\text{참})$$

ㄷ.

함수 $f(x)$ 가 $x = \beta$ 에서 극값을 가지므로 $f'(\beta) = 0$ 에서

$$\sin \beta + 2\beta \cos \beta = 0$$

$$\frac{\sin \beta}{\cos \beta} = -2\beta$$

$$\tan \beta = -2\beta$$

이때, $\tan(\beta - \pi) = -2\beta$ 이므로

$$\frac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} = \frac{-2\alpha - (-2\beta)}{\alpha - (\beta - \pi)} > \sec^2 \alpha \quad (\text{거짓})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ③

21. 출제의도 : 연속함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 정수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{에서 } f(0) = 0 \text{이므로}$$

$$f(x) = l \sin x$$

$$\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi \text{에서 } f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 \text{이므로}$$

$$f(x) = n \sin x + n + 1$$

$$\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \text{에서 } f(x) = m \sin x + C \quad (C \text{는}$$

적분상수)

함수 $f(x)$ 가 $x = \pi$ 에서 연속이므로

$$C = n + 1$$

또, 함수 $f(x)$ 가 $x = \frac{\pi}{2}$ 에서 연속이므로

$$l = m + n + 1 \dots\dots \textcircled{7}$$

이때,

$$f(x) = \begin{cases} l \sin x & \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right) \\ m \sin x + n + 1 & \left(\frac{\pi}{2} < x \leq \pi\right) \\ n \sin x + n + 1 & \left(\pi < x \leq \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x) dx + \int_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= [-l \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [-m \cos x + (n+1)x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\ &\quad + [-n \cos x + (n+1)x]_{\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \end{aligned}$$

$$= l + m + (\pi - 1)n + \pi$$

$\textcircled{7}$ 에서 $l = m + n + 1$ 이므로

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx &= 2m + (n+1)\pi + 1 \\ &= 2m + n\pi + \pi + 1 \end{aligned}$$

이 값이 최대이어야 하므로 $m > 0, n > 0$ 이어야 한다.

한편, $|l| + |m| + |n| \leq 10$ 에서

$l = m + n + 1$ 이므로

$$|m + n + 1| + |m| + |n| \leq 10$$

$$(m + n + 1) + m + n \leq 10$$

$$2m + 2n + 1 \leq 10 \text{에서 } m + n \leq \frac{9}{2}$$

(i) $m = 1, n = 3$ 일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx = 4\pi + 3$$

(ii) $m = 2, n = 2$ 일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx = 3\pi + 5$$

(iii) $m = 3, n = 1$ 일 때,

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx = 2\pi + 7$$

(i), (ii), (iii)에서

$\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x) dx$ 의 값이 최대인 경우는

$m = 1, n = 3$ 일 때이고,

$\textcircled{7}$ 에서 $l = 1 + 3 + 1 = 5$ 이다.

따라서

$$l + 2m + 3n = 5 + 2 + 9 = 16$$

정답 ⑤

22. 출제의도 : 순열의 수와 조합의 수를 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$${}_3P_2 + {}_3C_2$$

$$= {}_3P_2 + \frac{{}_3P_2}{2!}$$

$$= 3 \times 2 + \frac{3 \times 2}{2 \times 1}$$

$$= 6 + 3$$

$$= 9$$

정답 9

23. 출제의도 : 로그방정식의 근을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{진수조건에서 } x > -\frac{1}{5}$$

$$2\log_4(5x+1) = 1, \log_2(5x+1) = 1$$

$$5x+1 = 2 \text{에서 } x = \frac{1}{5}$$

따라서 $\alpha = \frac{1}{5}$ 이므로

$$\log_5 \frac{1}{\alpha} = \log_5 5 = 1$$

정답 1

24. 출제의도 : 이항분포의 성질과 확률 변수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X 가 이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 을 따
르므로

$$V(X) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4} \quad \dots\dots \textcircled{A}$$

한편

$$V\left(\frac{1}{2}X + 1\right) = 5 \text{에서}$$

$$\frac{1}{4}V(X) = 5, \quad V(X) = 20 \quad \dots\dots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에서

$$\frac{n}{4} = 20$$

따라서 $n = 80$

정답 80

25. 출제의도 : 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x + 3 \cos^3 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (1 + 3 \cos^2 x) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \{1 + 3(1 - \sin^2 x)\} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (4 - 3 \sin^2 x) dx \quad \dots\dots \textcircled{C}$$

여기서 $\sin x = t$ 로 놓으면 $\cos x = \frac{dt}{dx}$ 이

고 $x=0$ 일 때 $t=0$, $x=\frac{\pi}{2}$ 일 때 $t=1$

이므로 $\textcircled{C}$ 은

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x (4 - 3 \sin^2 x) dx$$

$$= \int_0^1 (4 - 3t^2) dt$$

$$= \left[4t - t^3 \right]_0^1$$

$$= 3$$

정답 3

26. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \frac{\pi}{6}}{x - 1} \text{에서 } x \rightarrow 1 \text{일 때 (분모)} \rightarrow 0$$

이고, 극한값이 존재하므로 (분자) $\rightarrow 0$ 이어야 한다.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left\{ f(x) - \frac{\pi}{6} \right\} = 0 \text{에서 } f(x) \text{가 미분가능}$$

한 함수이므로 $f(1) = \frac{\pi}{6}$

$h(x) = (g \circ f)(x)$ 라 하면

$$h(1) = g(f(1))$$

$$= g\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

한편, $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$ 이므로

$$h'(1) = g'(f(1))f'(1)$$

$$\begin{aligned}
&= g'\left(\frac{\pi}{6}\right)f'(1) \\
&= \cos\frac{\pi}{6} \times f'(1) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}f'(1)
\end{aligned}$$

이때, 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 에서

의 접선의 방정식은

$$y - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}f'(1)(x-1)$$

이 직선이 원점을 지나므로

$$0 - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}f'(1)(0-1) \text{에서}$$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

따라서

$$k = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{이므로}$$

$$30k^2 = 30 \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 10$$

정답 10

27. 출제의도 : 타원의 성질을 이용하여 사각형의 둘레의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 초점의 좌표를

$$F(c, 0), F'(-c, 0) (c > 0)$$

라 하면

$$c^2 = 16 - 7 = 9, \quad c = 3$$

이므로

$$F(3, 0), F'(-3, 0)$$

한편 $\overline{PA} = \overline{PF}$, $\overline{OA} = \overline{OF}$, $\overline{PO}$ 는 공통이므로

$$\triangle AOP \sim \triangle FOP$$

이때, 점 P는 직선 $y=x$ 위에 있으므로

$$\overline{PF'} = \overline{BP}$$

타원의 성질에 의해

$$\overline{BP} + \overline{PA} = \overline{PF'} + \overline{PF} = 8$$

$$\text{한편, } \overline{AF'} = \overline{BF'} = 3\sqrt{2} \text{이므로}$$

사각형 AF'BP의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned}
\overline{BP} + \overline{PA} + \overline{AF'} + \overline{BF'} &= 8 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \\
&= 8 + 6\sqrt{2}
\end{aligned}$$

따라서 $a=8$, $b=6$ 이므로

$$a+b=8+6=14$$

정답 14

28. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

모든 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 9개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_9 = {}_{11}C_9 = {}_{11}C_2 = 55$$

이때, $a < 2$ 또는 $b < 2$ 인 사건을 A라 하면 A^C 는 $a \geq 2$ 이고 $b \geq 2$ 인 사건이다.

$$a = a' + 2, b = b' + 2 \text{로 놓으면}$$

$$(a' + 2) + (b' + 2) + c = 9 \text{에서}$$

$$a' + b' + c = 5$$

방정식 $a' + b' + c = 5$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c 의 모든 순서쌍 (a', b', c) 의 개수는 서로 다른 3개에서 중복을 허락하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3H_5 = {}_7C_5 = {}_7C_2 = 21$$

$$\text{이때, } P(A^C) = \frac{21}{55} \text{이므로}$$

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{21}{55} = \frac{34}{55}$$

따라서 $p = 55$, $q = 34$ 이므로

$$p + q = 55 + 34 = 89$$

정답 89

29. 출제의도 : 공간벡터의 내적과 직선의 방향벡터를 활용하여 k 의 값의 범위를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

세 점 P_1, P_2, P_3 의 좌표를

$$P_1(x_1, y_1, 1), P_2(x_2, y_2, 1), P_3(x_3, y_3, 1)$$

이라 하자.

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = 3x_1 + \frac{1}{2}y_1 + 2 = \frac{11}{3} \text{에서}$$

$$3x_1 + \frac{1}{2}y_1 = \frac{5}{3}$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_2} = 3x_2 + \frac{1}{2}y_2 + 2 = 1 \text{에서}$$

$$3x_2 + \frac{1}{2}y_2 = -1$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = 3x_3 + \frac{1}{2}y_3 + 2 = -\frac{7}{4} \text{에서}$$

$$3x_3 + \frac{1}{2}y_3 = -\frac{15}{4}$$

세 점 P_1, P_2, P_3 에서 xy 평면에 내린 수선의 발을 각각 Q_1, Q_2, Q_3 이라 하면

세 점 Q_1, Q_2, Q_3 은 각각 xy 평면 위의

$$\text{세 직선 } 3x + \frac{1}{2}y = \frac{5}{3}, 3x + \frac{1}{2}y = -1,$$

$$3x + \frac{1}{2}y = -\frac{15}{4}$$

$$\text{즉, } y = -6x + \frac{10}{3}, y = -6x - 2,$$

$$y = -6x - \frac{30}{4} \text{ 위에 있다.}$$

한편 점 $(0, k, 0)$ 을 지나고 방향벡터가 $(1, -6, 0)$ 인 직선의 방정식은

$$\frac{x}{1} = \frac{y-k}{-6}, z=0$$

이다. 즉,

xy 평면 위의 직선 $y = -6x + k$ 이므로

주어진 조건을 만족하려면

$$k < -\frac{30}{4} \text{ 또는 } k > \frac{10}{3}$$

이어야 한다.

따라서 $m = 4$, $M = -8$ 이므로

$$m - M = 4 - (-8) = 12$$

정답 12

30. 출제의도 : 합성함수 미분법을 이용하여 내적문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

사차함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이므로 사차함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축에 접한다.

한편, $g(x) = 2x^4e^{-x}$ 에서

$$g'(x) = 8x^3e^{-x} - 2x^4e^{-x} \\ = -2x^3e^{-x}(x-4)$$

이때, $g'(x) = 0$ 에서

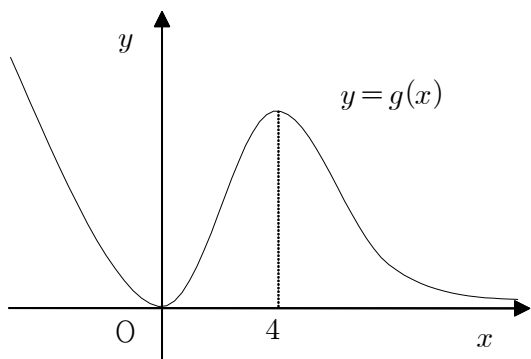
$$x = 0 \text{ 또는 } x = 4$$

그러므로 함수 $g(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2^4e^{-4}	$\searrow$

이때, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ 이므로 함수 $y = g(x)$

의 그래프의 개형은 다음과 같다.



한편, 조건 (가)에서 함수 $h(x)=0$ 은 서로 다른 4개의 실근을 가진다.

이때, $f(g(x))=0$ 에서 $g(x)=t$ 로 놓으면 주어진 방정식은 $f(t)=0$ 이다.

이때, 방정식 $f(t)=0$ 의 한 근을 $t=\alpha$ 라 하면

$$g(x)=\alpha$$

이때, $g(x) \geq 0$ 이므로 $\alpha \geq 0$ 이어야 한다.

또, 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\alpha$ 는 많아야 세 점에서 만나므로 방정식 $h(x)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되기 위해서는 방정식 $f(t)=0$ 은 적어도 2개의 0이상의 실근을 가져야 한다.

한편, 함수 $f(x)$ 의 최솟값이 0이고 함수

$f(x)$ 의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$ 이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 \quad (0 \leq \alpha < \beta)$$

..... ㉠

또, 조건 (나)에서 함수 $h(x)$ 는 $x=0$ 에서 극소이므로 $h'(0)=0$ 이고 $x=0$ 의 좌우에서 $h'(x)$ 의 부호가 -에서 +로 바뀌어야 한다.

한편, $h'(x)=f'(g(x)) \times g'(x)$ 이고 $g'(x)$ 의 부호가 $x=0$ 의 좌우에서 -에서 +로 바뀌므로 $f'(g(x))$ 의 부호는 $x=0$ 의 좌우에서 +에서 +로 나타나야 한다.

한편, x 의 값이 0에 아주 가까이 있을 때, $x < 0$ 이면 $g(x) > 0$ 이고 $x > 0$ 이면 $g(x) > 0$ 이다. 또, $g(0)=0$ 이므로 위의 조건을 만족시키기 위해서는 함수 $f(x)$ 에서 x 의 값이 0의 근처이고 양수일 때, $f'(x) > 0$ 이어야 한다.

이때, $\alpha \geq 0$ 이므로 $\alpha=0$ 이어야 한다.

그러므로 ㉠에서

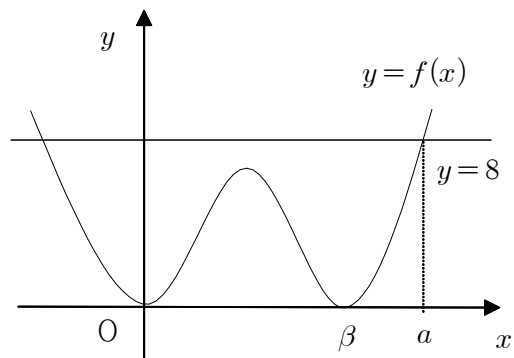
$$f(x)=\frac{1}{2}x^2(x-\beta)^2 \quad \text{..... ㉡}$$

또, 조건 (다)에서 방정식 $h(x)=8$ 의 서로 다른 실근의 개수가 6이어야 한다.

이때, $f(g(x))=8$ 에서 $g(x)=t$ 로 놓으면 $f(t)=8$ 이고 $g(x) \geq 0$ 이므로 $t \geq 0$ 이어야 한다.

이때, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 의 그래프를 각 경우로 나누고, 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=8$ 의 교점 중 x 좌표가 0보다 큰 점만 나타내면 다음과 같다.

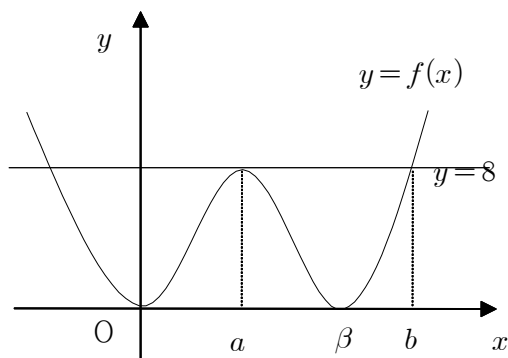
(i) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 8보다 작은 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$ 의 그래프의 교점의 x 좌표 중 0보다 큰 값을 a 라 하면 방정식 $g(x)=a$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.

그런데 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a(a > 0)$ 인 직선은 많아야 세 점에서

만나므로 조건을 만족시키지 못한다.
(ii) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 8인 경우



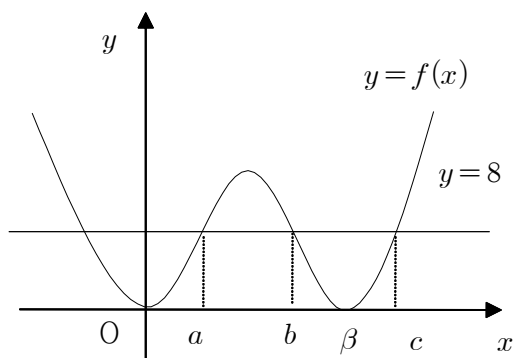
두 함수 $y=f(x)$, $y=8$ 의 그래프의 교점의 x 좌표 중 0보다 큰 값을 a , b ($a < b$)라 하면 방정식 $g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.

그런데 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ ($a > 0$)인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.

마찬가지로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=b$ ($b > 0$)인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.

그러므로 조건을 만족시킬 수 있다.

(iii) 함수 $f(x)$ 의 극댓값이 8보다 큰 경우



두 함수 $y=f(x)$, $y=8$ 의 그래프의 교점의 x 좌표 중 0보다 큰 값을 a , b , c

($a < b < c$)라 하면 방정식 $g(x)=a$ 또는 $g(x)=b$ 또는 $g(x)=c$ 의 서로 다른 실근의 개수는 6이어야 한다.

그런데 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=a$ ($a > 0$)인 직선의 교점의 개수는 2 또는 3이다.

마찬가지로 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=b$ ($b > 0$), 함수 $y=g(x)$ 와 직선 $y=c$ ($c > 0$)의 교점의 개수도 모두 2 또는 3이다.

그러므로 방정식 $h(x)=0$ 이 서로 다른 실근의 개수가 6이기 위해서는 모두 교점의 개수가 2가 되어야 한다.

그런데 $0 < a < b < c$ 이고 함수 $y=g(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2^9 e^{-4}$ 만 서로 다른 두 점에서 만나므로 조건을 만족시키지 못한다.

그러므로 (i), (ii), (iii)에서 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 8이다.

한편, ㉠에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(x-\beta)^2 + x^2(x-\beta) \\ &= x(x-\beta)(2x-\beta) \\ &= 2x(x-\beta)\left(x-\frac{\beta}{2}\right) \end{aligned}$$

이때, 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	...	0	...	$\frac{\beta}{2}$	...	β	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

그러므로 $f\left(\frac{\beta}{2}\right)=8$ 에서

$$\frac{1}{2} \times \left(\frac{\beta}{2}\right)^2 \times \left(\frac{\beta}{2} - \beta\right)^2 = 8$$

$$\beta^4 = 2^8$$

이때, $\beta > 0$ 이므로

$$\beta = 4$$

따라서 $f(x) = \frac{1}{2}x^2(x-4)^2$ 에서

$$\begin{aligned} f'(x) &= x(x-4)^2 + x^2(x-4) \\ &= 2x(x-2)(x-4) \end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned} f'(5) &= 2 \times 5 \times 3 \times 1 \\ &= 30 \end{aligned}$$

정답 30