

제 2 교시

수학 영역(가형)

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(5, 3)$, $\vec{b}=(1, 2)$ 에 대하여 벡터 $\vec{a}-\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x(x+2)}$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

3. 좌표공간에서 직선 $\frac{x+a}{2}=z+2$, $y=b$ 가 원점을 지날 때, $a+b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이다.) [2점]

- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 두 사건 A, B 가 서로 배반사건이고,

$$P(A)=\frac{1}{6}, P(A \cup B)=\frac{2}{3}$$

일 때, $P(B)$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{7}{12}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

5. 곡선 $y = x\sqrt{x}$ 위의 점 (4, 8)에서의 접선의 기울기는? [3점]

- ① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 3

7. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 일 때, $\sin(\beta - \alpha)$ 의 값은? (단, α , β 는 예각이다.) [3점]

- ① $\frac{3\sqrt{5}}{20}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{4}$ ④ $\frac{3\sqrt{5}}{10}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{5}}{20}$

6. 한 개의 주사위를 36번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X 라 하자. $V(X)$ 의 값은? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

8. 자연수 7의 분할 중 짝수인 자연수가 오직 하나만 포함된 분할의 수는? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

9. $\int_1^e (1+\ln x)dx$ 의 값은? [3점]

- ① e ② $e+1$ ③ $e+2$ ④ $2e$ ⑤ $2e+1$

10. 직선 $y=mx$ 가 두 쌍곡선 $x^2-y^2=1$, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{64}=-1$ 중 어느 것과도 만나지 않도록 하는 정수 m 의 개수는? [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11. 평면 위에 길이가 1인 선분 AB와 점 C가 있다.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 이고 $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 4$ 일 때, $|\overrightarrow{BC}|$ 의 값은? [3점]

- ① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ 4

12. 열린 구간 $(0, \pi)$ 에서 부등식

$$(2^x - 8)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) < 0$$

의 해가 $a < x < b$ 또는 $c < x < d$ 일 때, $(b-a) + (d-c)$ 의 값은?
(단, $b < c$) [3점]

- ① $\pi - 3$ ② $\frac{7\pi}{6} - 3$ ③ $\frac{4\pi}{3} - 3$ ④ $3 - \frac{\pi}{3}$ ⑤ $3 - \frac{\pi}{6}$

13 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = \int_0^x \frac{2t-1}{t^2-t+1} dt$$

의 최솟값은? [3점]

- ① $\ln \frac{1}{2}$ ② $\ln \frac{2}{3}$ ③ $\ln \frac{3}{4}$ ④ $\ln \frac{4}{5}$ ⑤ $\ln \frac{5}{6}$

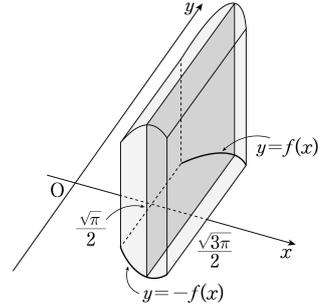
14 어느 도시에서 방학 기간에 봉사활동을 한 경험이 있는 고등학생의 비율을 알아보기 위하여 이 도시의 고등학생 중 400 명을 임의추출하여 조사한 결과 20%의 학생이 방학 기간에 봉사활동을 한 경험이 있는 것으로 나타났다. 이 결과를 이용하여 이 도시 전체 고등학생 중 방학 기간에 봉사활동을 한 경험이 있는 고등학생의 비율 p 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간을 구하면 $a \leq p \leq b$ 이다. $b-a$ 의 값은? (단, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.) [4점]

- ① 0.0196 ② 0.0392 ③ 0.0588 ④ 0.0784 ⑤ 0.0980

15. 흰 공 3개, 검은 공 2개가 들어 있는 주머니에서 같이 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고, 남아 있는 3개의 공 중에서 같이 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다. 같이 꺼낸 흰 공의 개수가 같이 꺼낸 흰 공의 개수보다 많을 때, 같이 꺼낸 공이 모두 검은 공일 확률은? [4점]

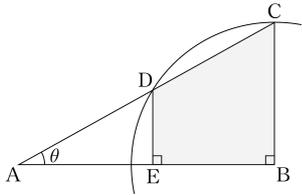
- ① $\frac{1}{15}$ ② $\frac{2}{15}$ ③ $\frac{1}{5}$ ④ $\frac{4}{15}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

16. 그림과 같이 함수 $f(x) = \sqrt{x \sin x^2}$ ($\frac{\sqrt{\pi}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3\pi}}{2}$)에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=-f(x)$ 및 두 직선 $x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $x=\frac{\sqrt{3\pi}}{2}$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [4점]



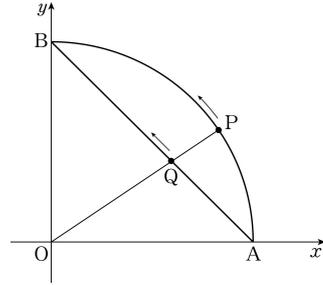
- ① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4 ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ $4\sqrt{3}$

17. 그림과 같이 빗변 AC의 길이가 1이고 $\angle BAC = \theta$ 인 직각삼각형 ABC가 있다. 점 B를 중심으로 하고 점 C를 지나는 원이 선분 AC와 만나는 점 중 점 C가 아닌 점을 D라 하고, 점 D에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 E라 하자. 사각형 BCDE의 넓이를 $S(\theta)$ 라 할 때, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{S(\theta)}{\theta^3}$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



- ① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

18. 원점 O를 중심으로 하고 두 점 A(1, 0), B(0, 1)을 지나는 사분원이 있다. 그림과 같이 점 P는 점 A에서 출발하여 호 AB를 따라 점 B를 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 움직인다. 선분 OP와 선분 AB가 만나는 점을 Q라 하자. 점 P의 x좌표가 $\frac{4}{5}$ 인 순간 점 Q의 속도는 (a, b)이다. b-a의 값은? [4점]



- ① $\frac{2}{49}$ ② $\frac{8}{49}$ ③ $\frac{18}{49}$ ④ $\frac{32}{49}$ ⑤ $\frac{50}{49}$

19. 다음은 4 이상의 자연수 n 에 대하여 등식

$$a \times b \times c \times d = 2^n \times 3^n$$

을 만족시키는 2 이상의 자연수 a, b, c, d 의 순서쌍 (a, b, c, d) 중에서 $a+b+c+d$ 가 짝수가 되도록 하는 모든 순서쌍의 개수를 구하는 과정이다.

$a = 2^{x_1} \times 3^{y_1}, b = 2^{x_2} \times 3^{y_2}, c = 2^{x_3} \times 3^{y_3}, d = 2^{x_4} \times 3^{y_4}$ 이라 하면
 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n, y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = n$
 (단, $i = 1, 2, 3, 4$ 에 대하여 x_i, y_i 는 음이 아닌 정수)
 이다. 이때 $a+b+c+d$ 가 짝수이므로 a, b, c, d 가 모두 짝수이거나 a, b, c, d 중에서 2개만 짝수이다.

(i) a, b, c, d 가 모두 짝수인 경우
 x_1, x_2, x_3, x_4 가 모두 자연수이고 y_1, y_2, y_3, y_4 는 음이 아닌 정수이므로 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$ 의 개수는
 ${}_4H_{\boxed{\text{(가)}}} \times {}_4H_n \dots\dots \textcircled{\text{㉑}}$

(ii) a, b, c, d 중에서 2개만 짝수인 경우
 x_1, x_2, x_3, x_4 중에서 자연수가 2개이고 0이 2개이므로 순서쌍 (x_1, x_2, x_3, x_4) 의 개수는
 ${}_4C_2 \times \boxed{\text{(나)}} \dots\dots \textcircled{\text{㉒}}$
 이다. 이때 a, b, c, d 중 홀수인 두 수는 1이 될 수 없으므로 순서쌍 (y_1, y_2, y_3, y_4) 의 개수는
 ${}_4H_{\boxed{\text{(다)}}} \dots\dots \textcircled{\text{㉓}}$
 이다. 따라서 순서쌍 $(x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4)$ 의 개수는
 ${}_4C_2 \times \boxed{\text{(나)}} \times {}_4H_{\boxed{\text{(다)}}} \dots\dots \textcircled{\text{㉔}}$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는 $\textcircled{\text{㉑}} + \textcircled{\text{㉔}}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n), h(n)$ 이라 할 때, $f(6)+g(7)+h(8)$ 의 값은? [4점]

- ① 13
- ② 14
- ③ 15
- ④ 16
- ⑤ 17

20. 공간에서 서로 다른 5개의 점 A, B, C, D, E가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = 1$
 (나) $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{CD} \perp \overline{DE}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $|\overrightarrow{AE}|$ 의 최댓값은 $2\sqrt{2}$ 이다.
 ㄴ. $\overline{AB} \perp \overline{DE}$ 이면 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이다.
 ㄷ. $\overline{AB} \perp \overline{CD}$ 이고 $\overline{BC} \perp \overline{CD}$ 이면 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$ 의 최댓값은 $1+2\sqrt{2}$ 이다.

- ① ㄱ
- ② ㄴ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄴ, ㄷ

21. 함수 $f(x) = -\frac{kx^3}{x^2+1}$ ($k > 1$)에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 와 곡선

$y = f^{-1}(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표 중 가장 작은 값을 α , 가장 큰 값을 β 라 하자. 함수 $y = f(x-2\beta) + 2\alpha$ 의 역함수 $g(x)$ 에 대하여 $f'(\beta) = 2g'(\alpha)$ 일 때, 상수 k 의 값은? [4점]

- ① $\frac{5+2\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{6+2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{4+2\sqrt{2}}{5}$
 ④ $\frac{5+2\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{6+2\sqrt{2}}{5}$

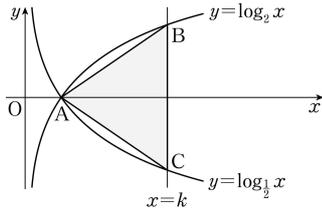
단답형

22. 4명의 학생을 일렬로 세우는 경우의 수를 구하시오. [3점]

23. 함수 $f(x) = 4e^{3x-3}$ 에 대하여 $f'(1)$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 그림과 같이 두 곡선 $y = \log_2 x$, $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 가 만나는 점을

A 라 하고, 직선 $x = k (k > 1)$ 이 두 곡선과 만나는 점을 각각 B, C 라 하자. 삼각형 ACB의 무게중심의 좌표가 (3, 0)일 때, 삼각형 ACB의 넓이를 구하시오. [3점]



25. 매개변수 $t (t > 0)$ 으로 나타내어진 함수

$$x = \ln t, \quad y = \ln(t^2 + 1)$$

에 대하여 $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy}{dx}$ 의 값을 구하시오. [3점]

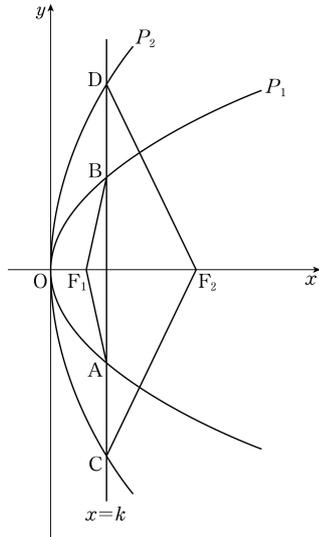
26. 두 연속확률변수 X 와 Y 는 각각 정규분포 $N(50, \sigma^2)$, $N(65, 4\sigma^2)$ 을 따른다.

$$P(X \geq k) = P(Y \leq k) = 0.1056$$

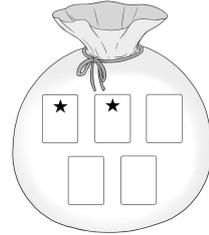
일 때, $k + \sigma$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오. (단, $\sigma > 0$) [4점]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
1.25	0.3944
1.50	0.4332
1.75	0.4599
2.00	0.4772

27. 그림과 같이 원점을 꼭짓점으로 하고 초점이 $F_1(1, 0)$, $F_2(4, 0)$ 인 두 포물선을 각각 P_1 , P_2 라 하자. 직선 $x=k$ ($1 < k < 4$)가 포물선 P_1 과 만나는 두 점을 A, B 라 하고, 포물선 P_2 와 만나는 두 점을 C, D 라 하자. 삼각형 F_1AB 의 둘레의 길이를 l_1 , 삼각형 F_2DC 의 둘레의 길이를 l_2 라 하자. $l_2 - l_1 = 11$ 일 때, $32k$ 의 값을 구하시오. [4점]



28. 그림과 같이 주머니에 ★ 모양의 스티커가 각각 1개씩 붙어 있는 카드 2장과 스티커가 붙어 있지 않은 카드 3장이 들어 있다.



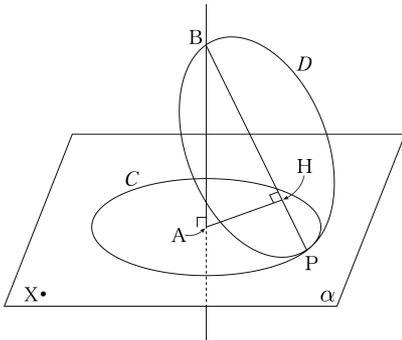
이 주머니를 사용하여 다음의 시행을 한다.

주머니에서 임의로 2장의 카드를 동시에 꺼낸 다음, 꺼낸 카드에 ★ 모양의 스티커를 각각 1개씩 붙인 후 다시 주머니에 넣는다.

위의 시행을 2번 반복한 뒤 주머니 속에 ★ 모양의 스티커가 3개 붙어 있는 카드가 들어 있을 확률은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 그림과 같이 평면 α 위에 중심이 점 A 이고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 원 C가 있다. 점 A 를 지나고 평면 α 에 수직인 직선 위의 점 B 에 대하여 $\overline{AB}=3$ 이다. 원 C 위의 점 P 에 대하여 원 D 가 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 선분 BP 는 원 D 의 지름이다.
- (나) 점 A 에서 원 D 를 포함하는 평면에 내린 수선의 발 H 는 선분 BP 위에 있다.



평면 α 위에 $\overline{AX}=5$ 인 점 X 가 있다. 점 P 가 원 C 위를 움직일 때, 원 D 위의 점 Q 에 대하여 선분 XQ 의 길이의 최댓값은 $m + \sqrt{n}$ 이다. $m+n$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 자연수이다.) [4점]

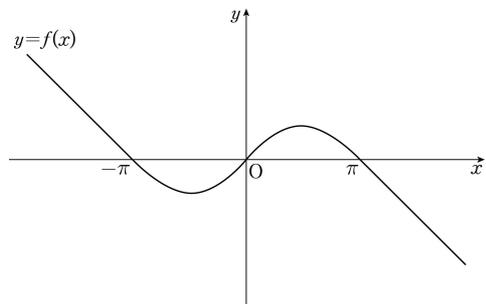
30. 함수

$$f(x) = \begin{cases} -x - \pi & (x < -\pi) \\ \sin x & (-\pi \leq x \leq \pi) \\ -x + \pi & (x > \pi) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t 에 대하여 부등식 $f(x) \leq f(t)$ 를 만족시키는 실수 x 의 최솟값을 $g(t)$ 라 하자. 예를 들어, $g(\pi) = -\pi$ 이다. 함수 $g(t)$ 가 $t = \alpha$ 에서 불연속일 때,

$$\int_{-\pi}^{\alpha} g(t) dt = -\frac{7}{4}\pi^2 + p\pi + q$$

이다. $100 \times |p+q|$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이다.) [4점]



- ※ 확인 사항
- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.