2019학년도 3월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	⑤	2	⑤	3	①	4	③	5	②
6	①	7	①	8	②	9	②	10	②
11	④	12	③	13	④	14	③	15	④
16	⑤	17	④	18	⑤	19	③	20	①
21	③	22	6	23	16	24	81	25	72
26	9	27	18	28	124	29	13	30	90

해 설

1. [출제의도] 거듭제곱의 뜻을 알고 식의 값을 계산한다.

$\frac{5}{2}\div\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}\div\frac{1}{4}$

$=\frac{5}{2}\times4=10$

2. [출제의도] 수를 계산하여 최대공약수를 구한다.

$2^2\times3$, $2\times3\times5$에서 공통인 소인수는 2와 3이다.
따라서 두 수 $2^2\times3$, $2\times3\times5$의 최대공약수는
두 수의 공통인 소인수 2, 3을 곱한 수이므로
최대공약수는 $2\times3=6$

3. [출제의도] 일차식을 계산하여 방정식의 해를 구한다.

$x+5=3(x-1)$

$x+5=3x-3$

$2x=8$, $x=4$

4. [출제의도] 일차함수의 그래프가 좌표축과 만나는 점의 좌표를 구한다.

일차함수 $y=2x+6$의 그래프의 y절편은 6이다.
$y=2x+6$에 $y=0$을 대입하면
$0=2x+6$, $x=-3$
따라서 x절편과 y절편의 합은
$-3+6=3$

5. [출제의도] 함수의 뜻을 이해하고 상수의 값을 구한다.

함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프가 점 $(3,4)$를 지나므로

$y=\frac{a}{x}$에 $x=3$, $y=4$를 대입하면

$4=\frac{a}{3}$, $a=12$

따라서 함수 $y=\frac{a}{x}$는 $y=\frac{12}{x}$이다.

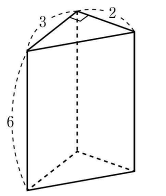
함수 $y=\frac{12}{x}$의 그래프가 점 $(6,b)$를 지나므로

$y=\frac{12}{x}$에 $x=6$, $y=b$를 대입하면

$b=\frac{12}{6}$, $b=2$

따라서 $a+b=14$

6. [출제의도] 전개도로 만들어지는 입체도형의 부피를 구한다.



주어진 전개도로 만들어지는 기둥은 그림과 같이 밑면이 직각삼각형인 삼각기둥이다.
이 삼각기둥의 밑면의 넓이는
$\frac{1}{2}\times2\times3=3$
이 삼각기둥의 높이는 6이므로 구하는 부피는
$3\times6=18$

7. [출제의도] 제곱근의 성질을 이용하여 주어진 식의 값을 구한다.

$\frac{1}{2}-12<0$이므로 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}-12\right)^2}=-\left(\frac{1}{2}-12\right)$

$\frac{1}{2}+10>0$이므로 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}+10\right)^2}=\frac{1}{2}+10$

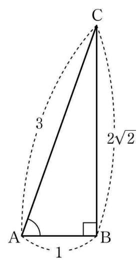
따라서

$\sqrt{\left(\frac{1}{2}-12\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+10\right)^2}=-\left(\frac{1}{2}-12\right)-\left(\frac{1}{2}+10\right)$

$=-\frac{1}{2}+12-\frac{1}{2}-10$

$=1$

8. [출제의도] 직각삼각형에서 삼각비의 뜻을 이해하여 그 값을 구한다.



$\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC에서

$\sin A=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이므로

$\overline{AC}=3$이라 하면 $\overline{BC}=2\sqrt{2}$이다.
피타고라스 정리에 의해
$\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2$에서
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2-\overline{BC}^2$
$=3^2-(2\sqrt{2})^2$
$=9-8=1$
따라서 $\overline{AB}=1$
그러므로 구하는 값은
$\cos A=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{1}{3}$

9. [출제의도] 편차의 성질을 이해하여 자료의 분산을 구한다.

편차의 합은 0이므로
$1+(-1)+(-5)+a+(a+1)=0$
$2a-4=0$
$a=2$
따라서 자료의 편차는
1, -1, -5, 2, 3
분산은 편차의 제곱의 평균이므로 구하는 값은
$\frac{1^2+(-1)^2+(-5)^2+2^2+3^2}{5}=\frac{40}{5}=8$

10. [출제의도] 연립방정식의 해를 구한다.

$\begin{cases}2x+y=7 & \cdots\cdots ㉠\\ 3x-2y=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

$2\times$㉠$+$㉡을 하면
$7x=14$
$x=2$ ⋯⋯ ㉢
㉢을 ㉠에 대입하면
$4+y=7$
$y=3$ ⋯⋯ ㉣
따라서 ㉢, ㉣에서 $a=2$, $b=3$이므로
$a+b=2+3=5$

[다른 풀이]

연립방정식

$\begin{cases}2x+y=7 & \cdots\cdots ㉠\\ 3x-2y=0 & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$

에서 ㉡의 등식을 변형하면

$3x=2y$, $y=\frac{3}{2}x$

$y=\frac{3}{2}x$를 ㉠에 대입하면

$2x+\frac{3}{2}x=7$

$\frac{7}{2}x=7$

$x=2$ ⋯⋯ ㉢

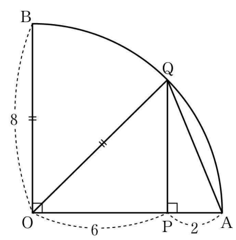
$x=2$를 $y=\frac{3}{2}x$에 대입하면

$y=3$ ⋯⋯ ㉣
따라서 ㉢, ㉣에서 $a=2$, $b=3$이므로
$a+b=2+3=5$

11. [출제의도] 주어진 상황을 이해하여 확률을 구한다.

숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드 중에서 2의 배수가 적혀 있는 카드는
2, 4, 6의 3가지이다.
따라서 1장의 카드를 임의로 뽑을 때 2의 배수가 적혀 있는 카드가 나올 확률은
$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
또 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6이 하나씩 적혀 있는 6장의 카드 중에서 5의 배수가 적혀 있는 카드는
5의 1가지이다.
따라서 1장의 카드를 임의로 뽑을 때 5의 배수가 적혀 있는 카드가 나올 확률은 $\frac{1}{6}$이다.
이 두 사건이 동시에 일어나는 경우는 없으므로
1장의 카드를 임의로 뽑을 때, 2의 배수 또는 5의 배수가 적혀 있는 카드가 나올 확률은
$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

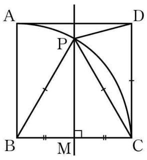
12. [출제의도] 피타고라스 정리를 이용하여 선분의 길이를 구한다.



그림과 같이 두 점 O와 Q를 선분으로 연결하면
선분 OQ의 길이는 부채꼴 OAB의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{OQ}=8$
선분 PQ는 선분 OA와 수직이므로
두 삼각형 OPQ와 삼각형 AQP는 직각삼각형이다.
한편 직각삼각형 OPQ에서 피타고라스 정리에 의해

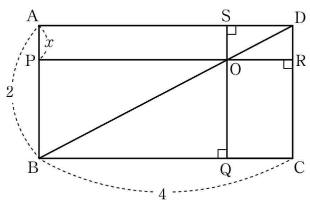
$\overline{OQ}^2=\overline{OP}^2+\overline{PQ}^2$
$8^2=6^2+\overline{PQ}^2$
$\overline{PQ}^2=8^2-6^2$
$\overline{PQ}=\sqrt{8^2-6^2}=2\sqrt{7}$
또 직각삼각형 AQP에서 피타고라스 정리에 의해
$\overline{AQ}^2=\overline{AP}^2+\overline{PQ}^2$
$\overline{AQ}^2=2^2+(2\sqrt{7})^2$
따라서 구하는 길이는
$\overline{AQ}=\sqrt{4+28}$
$=\sqrt{32}$
$=4\sqrt{2}$

13. [출제의도] 삼각형의 성질을 이용하여 각의 크기를 구한다.



그림과 같이 변 BC의 중점을 M이라 하면
$\overline{BM}=\overline{MC}$, $\angle PMB=\angle PMC=90°$, $\overline{PM}$은 공통이므로
두 삼각형 PBM, PCM은 서로 합동이다.
따라서 $\overline{PB}=\overline{PC}$
$\overline{BP}$와 $\overline{BC}$는 부채꼴 BCA의 반지름이므로
$\overline{BP}=\overline{BC}$
따라서 $\overline{BP}=\overline{BC}=\overline{PC}$이므로
삼각형 PBC는 정삼각형이다.
$\angle CPB=\angle BCP=60°$ ······ ㉠
$\angle PCD=\angle BCD-\angle BCP$
$=90°-60°$
$=30°$
한편 사각형 ABCD는 정사각형이므로
$\overline{PC}=\overline{BC}=\overline{CD}$
즉 삼각형 CDP는 $\overline{CP}=\overline{CD}$인 이등변삼각형이다.
따라서 $\angle CPD=\frac{1}{2}(180°-30°)=75°$ ······ ㉡
㉠, ㉡에서
$\angle BPD=\angle BPC+\angle CPD$
$=60°+75°$
$=135°$

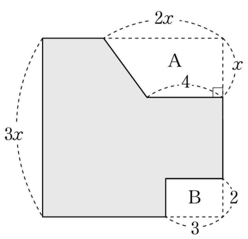
14. [출제의도] 주어진 상황에 맞는 이차방정식을 세워 선분의 길이를 구한다.



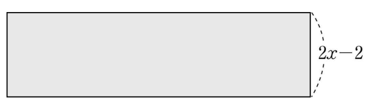
두 삼각형 ABD와 삼각형 SOD에서
$\angle DAB=\angle DSO=90°$, $\angle ADB$는 공통이므로
두 삼각형 ABD와 삼각형 SOD는 서로 닮음이다.
따라서 $\overline{AB}:\overline{AD}=\overline{SO}:\overline{SD}$
$\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=\overline{AD}=4$이므로
$\overline{SO}:\overline{SD}=1:2$
$\overline{AP}=x$라 하면
$\overline{SO}=\overline{AP}=x$
$\overline{SD}=2\overline{SO}=2x$
따라서 사각형 APOS의 넓이는
$\overline{AP}\times\overline{AS}=\overline{AP}\times(\overline{AD}-\overline{SD})$
$=x\times(4-2x)$
$=4x-2x^2$
사각형 OQCR의 넓이는
$\overline{OQ}\times\overline{OR}=(\overline{SQ}-\overline{SO})\times\overline{OR}$
$=(\overline{AB}-\overline{AP})\times\overline{SD}$
$=(2-x)\times 2x=4x-2x^2$
조건에서 사각형 APOS의 넓이와 사각형 OQCR의 넓이의 합이 3이므로
$4x-2x^2+4x-2x^2=3$
$4x^2-8x+3=0$
$(2x-3)(2x-1)=0$
$x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
조건에서 $\overline{AP}<\overline{PB}$이므로
$x<2-x$, $x<1$
따라서 $x=\frac{1}{2}$
그러므로 $\overline{AP}=\frac{1}{2}$

[다른 풀이]
사각형 APOS의 넓이와 사각형 OQCR의 넓이의 합은 직사각형 ABCD의 넓이에서 직사각형 PBQO의 넓이와 직사각형 SORD의 넓이를 뺀 것과 같다.
$\overline{AP}=x$라 할 때, 직사각형 PBQO의 넓이는 다음과 같이 x에 관한 식으로 나타낼 수 있다.
$\overline{PB}\times\overline{PO}=(\overline{AB}-\overline{AP})\times(\overline{AD}-\overline{SD})$
$=(2-x)(4-2x)$
$=2x^2-8x+8$
마찬가지로 직사각형 SORD의 넓이도 x에 관한 식으로 나타낼 수 있다.
$\overline{SO}\times\overline{SD}=\overline{AP}\times\overline{SD}$
$=x\times 2x$
$=2x^2$
조건에서 사각형 APOS의 넓이와 사각형 OQCR의 넓이의 합이 3이므로
$8-(2x^2-8x+8)-2x^2=3$
$4x^2-8x+3=0$
$(2x-3)(2x-1)=0$
$x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=\frac{1}{2}$
$x<1$이므로 $x=\frac{1}{2}$

15. [출제의도] 인수분해를 이용하여 직사각형의 한 변의 길이를 추론한다.



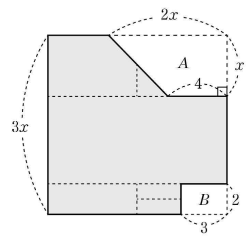
[그림 1]



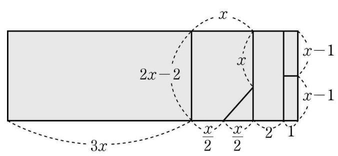
[그림 2]

[그림 1]의 색종이를 여러 조각으로 나누어 겹치지 않게 빈틈없이 붙여서 [그림 2]와 같은 모양을 만들었으므로 [그림 1]의 도형의 넓이는 [그림 2]의 도형의 넓이와 같아야 한다.
[그림 1]에서 A부분의 넓이는
$\frac{1}{2}\times(2x+4)\times x=x(x+2)$
[그림 1]에서 B부분의 넓이는
$2\times3=6$
[그림 1]의 넓이는 한 변의 길이가 $3x$인 정사각형에서 A부분과 B부분을 뺀 부분의 넓이와 같다.
따라서 [그림 1]의 도형의 넓이는
$(3x)^2-x(x+2)-6=8x^2-2x-6$
$=(4x+3)(2x-2)$ ······ ㉠
[그림 2]의 직사각형에서 가로의 길이를 L이라 하면 이 직사각형의 넓이는
$(2x-2)L$ ······ ㉡
[그림 1]과 [그림 2]의 두 넓이는 서로 같으므로
㉠, ㉡에서
$(2x-2)L=(4x+3)(2x-2)$
위 등식이 양변이 같아야 하므로
$L=4x+3$
따라서 직사각형의 가로의 길이는 $4x+3$이다.

[다른 풀이]
[그림 1]의 색종이를 다음과 같이 점선을 따라 잘라내어 여섯 개의 조각으로 나눈다.



이렇게 여러 조각으로 나누어진 색종이를 다음 그림과 같이 겹치지 않게 빈틈없이 붙이면 문제의 [그림 2]와 같이 세로의 길이가 $2x-2$인 직사각형을 만들 수 있다.
이때 가로의 길이는 $4x+3$이 된다.



따라서 구하는 길이는 $4x+3$이다.

16. [출제의도] 일차함수의 그래프의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.

점 C는 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$의 그래프가 x축과 만나는 점이므로
$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$에 $y=0$을 대입하면
$0=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2}$
$x=-1$
따라서 점 C의 좌표는 $(-1, 0)$
한편 두 점 $A(2, 6)$, $B(8, 0)$을 지나는 일차함수의 그래프의 기울기는
$\frac{0-6}{8-2}=-1$
이므로 일차함수의 식을
$y=-x+b$라 하자.
이 직선이 점 $A(2, 6)$을 지나므로
$x=2$, $y=6$을 대입하면
$6=-2+b$
$b=8$
따라서 두 점 A, B를 지나는 일차함수의 그래프를 나타내는 식은
$y=-x+8$
점 D는 일차함수 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$의 그래프와 일차함수

$y=-x+8$의 그래프의 교점이므로

$\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=-x+8$

$\frac{3}{2}x=\frac{15}{2}$

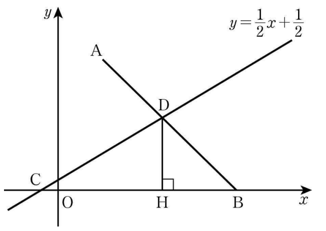
$3x=15$

$x=5$

이제 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$에 $x=5$를 대입하면

$y=\frac{1}{2}\times5+\frac{1}{2}=3$

따라서 점 D의 좌표는 (5, 3)



삼각형 CBD에서 선분 BC의 길이는

$\overline{BC}=8-(-1)=9$이고

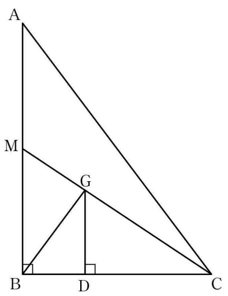
그림과 같이 점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{DH}=3$

따라서 삼각형 CBD의 넓이는

$\triangle CBD=\frac{1}{2}\times9\times3$

$=\frac{27}{2}$

17. [출제의도] 삼각형의 무게중심과 평행선의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구한다.



그림과 같이 삼각형 ABC에서 꼭짓점 C와 무게중심 G를 지나는 직선과 변 AB의 교점을 M이라 하자.

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

$\overline{CG}:\overline{GM}=2:1$

삼각형 CGD와 삼각형 CMB에서

$\angle MCB$는 공통이고 $\angle CDG=\angle CBM=90°$이므로

두 삼각형 CGD와 삼각형 CMB는 서로 닮음이다.

$\overline{CG}:\overline{GM}=2:1$이므로

$\overline{CG}:\overline{CM}=\overline{CG}:(\overline{CG}+\overline{GM})=2:3$

즉 두 삼각형 CGD와 CMB의 닮음비는 $2:3$이다.

따라서 $\overline{CD}:\overline{CB}=2:3$

그러므로 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$

두 삼각형 GBD, CGD에서 밑변을 각각 $\overline{BD}$와 $\overline{DC}$라 하면 높이가 $\overline{GD}$로 같고

$\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$이므로

$\triangle GBD:\triangle CGD=1:2$

$\triangle CGD=2\times\triangle GBD$

조건에서 삼각형 GBD의 넓이는 1이므로

삼각형 CGD의 넓이는 2이다.

삼각형 BCG의 넓이는 두 삼각형 GBD와 삼각형 CGD의 넓이의 합과 같으므로

$\triangle BCG=1+2=3$

두 삼각형 BCG, BGM에서 밑변을 각각 $\overline{CG}$와 $\overline{GM}$이라 하면 높이가 같고 $\overline{CG}:\overline{GM}=2:1$이므로

$\triangle BCG:\triangle BGM=2:1$

$\triangle BCG=2\times\triangle BGM$

$3=2\times\triangle BGM$

따라서 $\triangle BGM=\frac{3}{2}$

삼각형 BCM의 넓이는 삼각형 BGM과 삼각형 BCG의 넓이의 합과 같으므로

$\triangle BCM=\frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로

점 M은 변 AB의 중점이다.

$\overline{MA}:\overline{MB}=1:1$

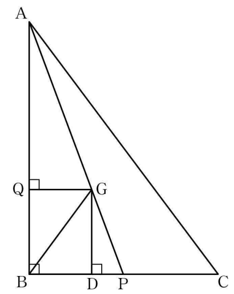
$\triangle AMC=\triangle BCM$

삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 AMC와 삼각형 BCM의 넓이의 합과 같으므로

$\triangle ABC=\triangle AMC+\triangle BCM$

$=\frac{9}{2}\times2=9$

[다른 풀이]



그림과 같이 꼭짓점 A와 무게중심 G를 지나는 직선과 변 BC의 교점을 P라 하고, 무게중심 G에서 변 AB에 내린 수선의 발을 Q라 하자.

점 G는 삼각형 ABC의 무게중심이므로 두 선분 AG와 GP의 길이의 비는 $2:1$이다.

선분 QG와 BP는 평행하므로 두 직각삼각형 AQG와 ABP는 서로 닮음이고 닮음비는 $2:3$이다.

선분 GD와 AB는 평행하므로

$\angle PGD=\angle PAB$

$\overline{AG}:\overline{GP}=2:1$이므로 두 직각삼각형 AQG와 GDP는 서로 닮음이고 닮음비가 $2:1$이다.

삼각형 GBD의 넓이와 삼각형 GQB의 넓이는 1로 같고 두 삼각형 GAQ, GQB에서 밑변을 각각 $\overline{AQ}$와 $\overline{BQ}$라 하면 높이가 같고

$\overline{AQ}:\overline{BQ}=2:1$이므로

$\triangle AQG:\triangle GQB=2:1$

따라서 삼각형 AQG의 넓이는 2이다.

삼각형 AQG와 GDP의 닮음비가 $2:1$이므로

삼각형 AQG의 넓이와 삼각형 GDP의 넓이의 비는

$2^2:1^2=4:1$

따라서 삼각형 GDP의 넓이는 $\frac{1}{2}$이다.

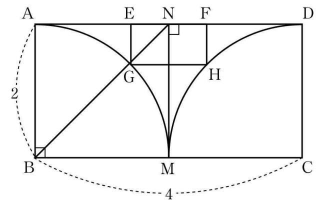
따라서 삼각형 ABP의 넓이는 $2+1+1+\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$이다.

점 P가 변 BC의 중점이므로 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABP의 넓이의 2배이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{9}{2}\times2=9$

18. [출제의도] 피타고라스 정리를 이용하여 직사각형의 넓이를 구한다.



그림과 같이 점 M에서 변 AD에 내린 수선의 발을 N이라 하자.

조건에 의해 $\overline{EG}:\overline{GH}=1:2$이므로 점 N은 변 EF의 중점이 되고 선분 MN은 사각형 EGHF를 두 개의 합동인 정사각형으로 나눈다.

$\overline{AB}=2$이므로 사각형 ABMN은 한 변의 길이가 2인 정사각형이다.

점 G는 이 정사각형의 대각선 BN 위에 있고,

직각삼각형 BMN에서 피타고라스 정리에 의해

$\overline{BN}^2=\overline{BM}^2+\overline{MN}^2$

$\overline{BN}^2=2^2+2^2=8$

$\overline{BN}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$\overline{GN}=\overline{BN}-\overline{BG}$

$=2\sqrt{2}-2$

한편 사각형 ABCD와 사각형 EGHF는 각각 가로와 세로의 길이의 비가 $2:1$인 직사각형이므로 서로 닮은 도형이다.

두 사각형 ABCD와 EGHF의 닮음비는 선분 BN과 선분 GN의 길이의 비와 같으므로

$\overline{BN}:\overline{GN}=2\sqrt{2}:2(\sqrt{2}-1)$

$=\sqrt{2}:(\sqrt{2}-1)$

따라서 넓이의 비는

$(\sqrt{2})^2:(\sqrt{2}-1)^2=2:(3-2\sqrt{2})$

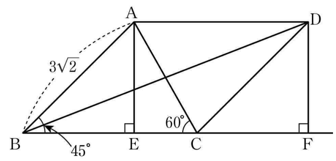
$=1:\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$

조건에서 사각형 ABCD의 넓이가 8이므로

구하는 사각형 EGHF의 넓이는

$8\times\frac{3-2\sqrt{2}}{2}=12-8\sqrt{2}$

19. [출제의도] 피타고라스 정리를 이용하여 삼각비를 구한다.



그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 E라 하자.

또 점 D에서 변 BC의 연장선에 내린 수선의 발을 F라 하자.

$\angle ABC=45°$이므로 직각삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이고 $\overline{AE}=\overline{BE}=3$이다.

$\angle ACB=60°$이므로 직각삼각형 AEC에서

$\tan60°=\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}$

$=\frac{3}{\overline{CE}}$

$\overline{CE}=\frac{3}{\tan60°}$

$=\frac{3}{\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}$

두 선분 AB와 CD는 서로 평행하므로

$\angle ABE=\angle DCF=45°$ ……㉠

평행사변형에서 대변의 길이는 서로 같으므로

$\overline{AB}=\overline{CD}$ ……㉡

㉠, ㉡에 의해 두 직각삼각형 ABE와 DCF는

합동이므로 $\overline{CF}=\overline{DF}=3$

따라서 직각삼각형 DBF에서 선분 BF의 길이는

$\overline{BF}=\overline{BE}+\overline{EC}+\overline{CF}$

$=3+\sqrt{3}+3$

$=6+\sqrt{3}$

그러므로 구하는 값은 직각삼각형 BFD에서

$\tan(\angle CBD)=\dfrac{\overline{DF}}{\overline{BF}}$

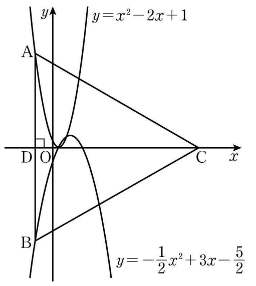
$=\dfrac{3}{6+\sqrt{3}}$

$=\dfrac{3(6-\sqrt{3})}{(6+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})}$

$=\dfrac{3(6-\sqrt{3})}{36-3}$

$=\dfrac{6-\sqrt{3}}{11}$

20. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이용하여 정삼각형의 한 변의 길이를 구하는 과정을 추론한다.



두 점 A, B를 지나는 직선의 방정식을

$x=t$라 하면

두 점 A, B의 x좌표는 t이므로

이차함수 $y=x^2-2x+1$에 $x=t$를 대입하여

점 A의 좌표를 구하면 다음과 같다.

$A(t,\ t^2-2t+1)$

마찬가지로 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-\frac{5}{2}$에 $x=t$를 대입하여 점 B의 좌표를 구하면 다음과 같다.

$B\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{5}{2}\right)$

삼각형 ABC가 정삼각형이 되기 위해서는 직선 CD가 선분 AB를 수직이등분해야 하므로

두 점 A, B에서 점 D를 잇는 두 선분의 길이가 서로 같아야 한다.

따라서 $\overline{AD}=\overline{BD}$

선분 $\overline{AD}$의 길이는

$\overline{AD}=t^2-2t+1$

선분 $\overline{BD}$의 길이는

$\overline{BD}=-\left(-\frac{1}{2}t^2+3t-\frac{5}{2}\right)$

$=\frac{1}{2}t^2-3t+\frac{5}{2}$

두 선분의 길이가 같아야 하므로

$t^2-2t+1=\frac{1}{2}t^2-3t+\frac{5}{2}$

정리하면

$\frac{1}{2}t^2+t-\frac{3}{2}=0$

양변에 2를 곱하면

$t^2+\boxed{2t-3}=0$

$(t-1)(t+3)=0$

따라서 $t=1$ 또는 $t=\boxed{-3}$

(ⅰ) $t=1$인 경우

$\overline{AD}=1^2-2+1=0$이므로 $\overline{BD}=\overline{AD}=0$이 되어 삼각형이 만들어지지 않는다.

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $t=-3$인 경우

$\overline{AD}=(-3)^2-2\times(-3)+1=16$이므로

정삼각형 ABC의 한 변의 길이는

$16\times2=32$

정삼각형 ABC의 높이는

$\frac{\sqrt{3}}{2}\times32=16\sqrt{3}$

이때, 점 C의 x좌표는

$-3+16\sqrt{3}$ 또는 $-3-16\sqrt{3}$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의해

양수 k의 값은 $\boxed{-3+16\sqrt{3}}$이다.

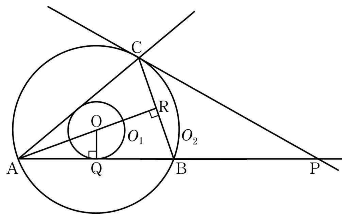
$f(t)=2t-3,\ a=-3,\ b=-3+16\sqrt{3}$이므로

구하는 값은

$f(a)+b=2\times(-3)-3+(-3+16\sqrt{3})$

$=-12+16\sqrt{3}$

21. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 주어진 <보기>의 참, 거짓을 추론하여 판별한다.



ㄱ. 그림과 같이 직선 AB가 원 O_1과 접하는 점을 Q라 하면

직각삼각형 OAQ에서 선분 AQ의 길이는

$\overline{AQ}^2=\overline{OA}^2-\overline{OQ}^2$

$=3^2-1^2$

$=8$

$\overline{AQ}=2\sqrt{2}$

원의 중심 O에서 현 AB에 내린 수선은 그 현을 이등분하므로 점 Q는 현 AB의 중점이다.

따라서 $\overline{AB}=2\overline{AQ}=4\sqrt{2}$ (참)

ㄴ. 점 A에서 현 BC에 내린 수선의 발을 R라 하면 선분 AR는 원의 중심 O를 지난다.

삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형이고

선분 AR는 변 BC를 이등분하므로

$\overline{BR}=\overline{RC}$

삼각형 AQO와 삼각형 ARB에서

$\angle OQA=\angle BRA=90°$이고

$\angle OAQ$는 공통이므로

두 삼각형 AQO와 ARB는 서로 닮음이다.

조건에 의해

$\overline{AO}:\overline{OQ}=3:1=\overline{AB}:\overline{BR}$

$\overline{AB}=\overline{AC},\ \overline{CB}=2\overline{BR}$이므로

$\overline{AC}:\overline{CB}=3:2$이다.

삼각형 ACP와 삼각형 CBP에서

원주각의 성질에 의해

$\angle CAP=\angle BCP$

$\angle BPC$는 공통이므로

두 삼각형 ACP와 CBP는 서로 닮음이다.

따라서

$\overline{AP}:\overline{CP}=\overline{AC}:\overline{CB}=3:2$ (거짓)

ㄷ. $\overline{BP}=x$라 하면

$\overline{AP}=4\sqrt{2}+x$

두 삼각형 ACP와 CBP는 서로 닮음이므로

$\overline{CP}:\overline{AC}=\overline{BP}:\overline{CB}$

$\overline{CP}:4\sqrt{2}=x:\frac{8\sqrt{2}}{3}$에서

$\overline{CP}=\frac{3}{2}x$

ㄴ에서 $\overline{AP}:\overline{CP}=3:2$이므로

$(4\sqrt{2}+x):\frac{3}{2}x=3:2$

$8\sqrt{2}+2x=\frac{9}{2}x$

$x=\frac{16\sqrt{2}}{5}$

따라서 $\overline{BP}=\frac{16\sqrt{2}}{5}$ (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

22. [출제의도] 일차식을 계산하여 식을 간단히 한다.

주어진 식을 정리하면

$\frac{1}{2}(4x+3)+4(x-1)=2x+\frac{3}{2}+4x-4$

$=6x-\frac{5}{2}$

따라서 x의 계수는 6이다.

23. [출제의도] 이차방정식이 중근을 갖도록 하는 상수의 값을 계산한다.

이차방정식 $x^2-8x+a=0$이 중근을 가지려면

이차식 x^2-8x+a가 완전제곱식이 되어야 한다.

$x^2-8x+a=(x-4)^2-16+a$

즉, $-16+a=0$

따라서 구하는 값은

$a=16$

24. [출제의도] 순환소수의 표현을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

분수 $\frac{15}{22}$를 소수로 나타내면

$\frac{15}{22}=15\div22$

$=0.681818181\cdots$

$=0.6\dot{8}\dot{1}$

따라서 $a=8,\ b=1$이므로 구하는 값은

$10a+b=10\times8+1=81$

[다른 풀이]

$x=\frac{15}{22}$라 하면

$\frac{15}{22}=0.6\dot{a}\dot{b}$이므로

$1000x-10x=600+10a+b-6$

$990x=600+10a+b-6$

x에 $\frac{15}{22}$를 대입하면

$675=600+10a+b-6$

$10a+b=81$

[참고]

$0.6\dot{a}\dot{b}=\frac{6\times100+a\times10+b-6}{990}$

$\frac{15}{22}=0.6\dot{a}\dot{b}$이므로

$\frac{6\times100+a\times10+b-6}{990}=\frac{15}{22}$

이 식을 정리하면

$6\times100+a\times10+b=681$

따라서 구하는 값은

$10a+b=10\times8+1$

$=81$

25. [출제의도] 제곱근의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

$\sqrt{\frac{288}{n}}=\sqrt{\frac{2^5\times3^2}{n}}$이 1보다 큰 자연수가 되도록 하려면 $\frac{2^5\times3^2}{n}$이 어떤 자연수의 제곱이어야 한다.

따라서 n은 $2^5\times3^2$의 약수이고, n의 값이 최대가 되려면 $\frac{2^5\times3^2}{n}$이 어떤 자연수의 제곱인 수 중에서 최소가 되어야 한다.

$2^5\times3^2$의 약수 중에서 1이 아닌 가장 작은 제곱인 수는 2^2이므로

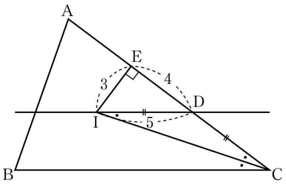
$\dfrac{2^5\times3^2}{n}=2^2$

따라서 구하는 n의 값은

$n=2^3\times3^2$

$=72$

26. [출제의도] 삼각형의 내심의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구한다.



삼각형 IDE가 직각삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해

$\overline{ID}^2=\overline{EI}^2+\overline{DE}^2$

$5^2=3^2+\overline{DE}^2$

$\overline{DE}^2=5^2-3^2$

$\overline{DE}=\sqrt{5^2-3^2}=\sqrt{16}=4$

그림과 같이 두 점 I와 C를 연결하는 선분을 그리면 직선 ID가 변 BC에 평행하므로

$\angle DIC=\angle ICB$ ……㉠

점 I는 삼각형 ABC의 내심이므로

직선 CI는 $\angle C$를 이등분한다.

즉 $\angle DCI=\angle ICB$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$\angle DIC=\angle DCI$

따라서 삼각형 DIC는 이등변삼각형이므로

$\overline{DI}=\overline{CD}=5$

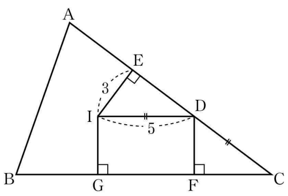
따라서

$\overline{CE}=\overline{CD}+\overline{DE}$

$=5+4$

$=9$

[다른 풀이]



그림과 같이 두 점 D, I에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 F, G라 하자.

$\angle IED=\angle DFC=90°$

선분 ID와 선분 BC는 평행하므로

$\angle EDI=\angle DCF$

점 I가 내심이므로

$\overline{IE}=\overline{IG}=\overline{DF}=3$

따라서 두 삼각형 IDE와 DCF는 서로 합동이므로

$\overline{ID}=\overline{CD}=5$

직각삼각형 IDE에서 피타고라스 정리에 의해

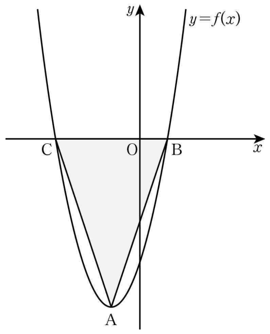
$\overline{DE}=4$

따라서

$\overline{CE}=\overline{DE}+\overline{CD}$

$=4+5=9$

27. [출제의도] 이차함수의 그래프를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.



$y=-x^2-2x-7$

$=-(x+1)^2-6$

이차함수 $y=-x^2-2x-7$의 그래프의 꼭짓점의 좌표는 $(-1, -6)$이다.

따라서 점 A의 좌표는 $(-1, -6)$이다.

이차함수 $y=f(x)$를

$f(x)=a(x+1)^2-6$ (단, a는 상수)

이라 하자.

조건 (나)에서 삼각형 ABC의 넓이가 12이고

꼭짓점의 y좌표가 -6이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times6=12$에서

변 BC의 길이는 4이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=-1$에 대하여 대칭이므로 두 점 B, C의 좌표 중에 하나는 $(1, 0)$, 다른 하나는 $(-3, 0)$이다.

즉, $f(1)=0$에서

$4a-6=0$

$a=\dfrac{3}{2}$

$f(x)=\dfrac{3}{2}(x+1)^2-6$이므로

$f(3)=18$

[참고]

<이차함수 $y=ax^2$의 그래프>

① 원점을 꼭짓점으로 하고, y축을 축으로 하는 포물선이다.

② $a>0$일 때 아래로 볼록하고, $a<0$일 때 위로 볼록하다.

③ a의 절댓값이 클수록 포물선의 폭이 좁아진다.

④ 이차함수 $y=ax^2$의 그래프와 $y=-ax^2$의 그래프는 x축에 대칭이다.

<이차함수 $y=a(x-p)^2+q$의 그래프>

① 이차함수 $y=ax^2$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동한 것이다.

② 직선 $x=p$를 축으로 하고, 점 (p, q)를 꼭짓점으로 하는 포물선이다.

28. [출제의도] 대푯값을 이해하여 자료를 추측하고 자료의 평균을 구한다.

자료는 각 자율 동아리의 회원의 수로 구성되어 있으므로 주어진 자료는 6개의 자연수로 이루어져 있다.

자료를 작은 값부터 크기 순서대로 나열하였을 때

a, b, c, d, e, f

가 된다고 하자.

조건 (가)에 의해

$a=8$, $f=13$

자료의 개수가 짝수이고

조건 (나)에서 중앙값은 10이므로

자료 c와 d의 평균이 중앙값이다.

따라서 $\dfrac{c+d}{2}=10$에서

$c+d=20$ ……㉠

여기서 $c=8$, $d=12$이거나 $c=10$, $d=10$일 때는 최빈값이 9가 될 수 없다.

따라서 조건 (나)에 의해 ㉠을 만족시키는 c, d로 가능한 값은

$c=9$, $d=11$

조건 (나)에서 최빈값은 9이므로 자료 중 9의 개수는 2이상이 되어야 한다.

따라서 $b=c=9$ ……㉡

한편 $e=11$ 또는 $e=13$이면 조건 (나)에서 최빈값이 9라는 조건에 맞지 않으므로

$e=12$

그러므로 자료의 평균 m은

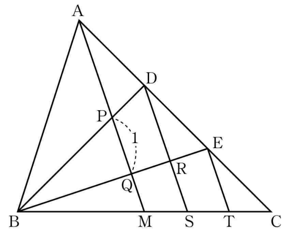
$m=\dfrac{8+9+9+11+12+13}{6}$

$=\dfrac{62}{6}$

$=\dfrac{31}{3}$

따라서 $12m=12\times\dfrac{31}{3}=124$

29. [출제의도] 삼각형의 닮음을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



그림과 같이 점 D를 지나고 선분 AM과 평행한 직선이 두 선분 BE, BC와 만나는 점을 각각 R, S라 하자.

점 E를 지나고 선분 AM과 평행한 직선이 선분 BC와 만나는 점을 T라 하자.

두 점 D, E가 변 AC를 삼등분하는 점이므로

$\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{EC}$이고 따라서

$\overline{MS}=\overline{ST}=\overline{TC}$

$\overline{BM}=\overline{MC}$이므로

$\overline{BM}:\overline{BS}=3:4$

$\overline{AM}$과 $\overline{DS}$는 서로 평행하므로

두 삼각형 BMQ와 BSR는 서로 닮음이고,

두 삼각형 BPQ와 BDR는 서로 닮음이다.

이때 닮음비는 모두 $3:4$이므로

$\overline{BQ}:\overline{BR}=\overline{PQ}:\overline{DR}=3:4$

$\overline{PQ}=1$이므로 $\overline{DR}=\dfrac{4}{3}$

$\overline{AQ}$와 $\overline{DR}$는 서로 평행하므로

두 삼각형 AQE와 DRE는 서로 닮음이다.

$\overline{AD}=\overline{DE}$이므로 닮음비는 $2:1$이고

$\overline{AQ}=2\overline{DR}=\dfrac{8}{3}$ ……㉠

$\overline{AM}$과 $\overline{ET}$는 서로 평행하므로

두 삼각형 BMQ와 BTE는 서로 닮음이다.

닮음비는 $\overline{BM}:\overline{BT}=3:5$이므로

$\overline{QM}:\overline{ET}=3:5$

$\overline{QM}=x$라 하면 $\overline{ET}=\dfrac{5}{3}x$

$\overline{AM}$과 $\overline{ET}$는 서로 평행하므로

두 삼각형 CAM과 CET는 서로 닮음이다.

닮음비는 $\overline{CM}:\overline{CT}=3:1$이므로

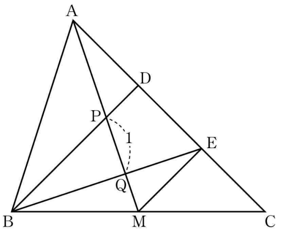
$\overline{AM}=3\overline{ET}=3\times\dfrac{5}{3}x=5x$

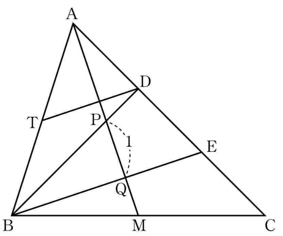
$\overline{AQ}=\overline{AM}-\overline{QM}=4x$ ……㉡

㉠, ㉡에서

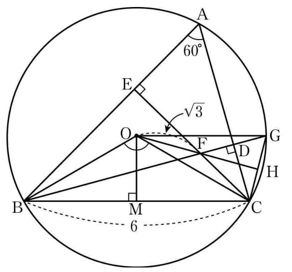
$4x=\dfrac{8}{3}$, $x=\dfrac{2}{3}$

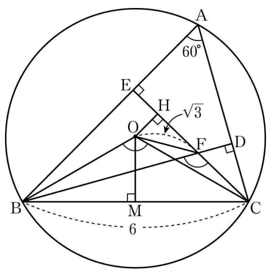
따라서

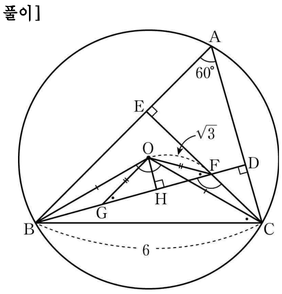
$\overline{AM}=5x=\frac{10}{3}$
따라서 구하는 값은
$p=3,\ q=10$ 이므로 $p+q=13$
[다른 풀이]


그림과 같이 두 점 M과 E를 선분으로 연결하면
점 M은 선분 BC의 중점이고
점 E는 선분 CD의 중점이다.
삼각형의 중점연결정리에 의해
$\overline{BD}$ 와 $\overline{ME}$ 는 서로 평행이고
$\overline{ME}:\overline{BD}=1:2$
삼각형 AME에서 점 D는 선분 AE의 중점이므로
삼각형의 중점연결정리에 의해
점 P는 선분 AM의 중점이고
$\overline{PD}:\overline{ME}=1:2$
$\overline{BP}$ 와 $\overline{ME}$ 는 서로 평행하므로
두 삼각형 BPQ와 EMQ는 서로 닮음이다.
$\overline{BP}:\overline{ME}=3:2$ 이므로
$\overline{PQ}:\overline{QM}=3:2$
$\overline{PQ}=1$ 이므로 $\overline{QM}=\frac{2}{3}$
그러므로 두 선분 $\overline{PM}$과 $\overline{AM}$의 길이는
$\overline{PM}=\overline{PQ}+\overline{QM}$
$=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$
$\overline{AM}=2\overline{PM}$
$=2\times\frac{5}{3}=\frac{10}{3}$
따라서 구하는 값은
$p=3,\ q=10$ 에서 $p+q=13$
[참고]


그림과 같이 점 D를 지나고 선분 BE에 평행한 선분을 그어 같은 방법으로 해결할 수도 있다.

30. [출제의도] 원의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.


그림과 같이 선분 BF의 연장선이 원과 만나는 점을 G, 선분 OF의 연장선이 선분 CG와 만나는 점을 H라 하자.
호 BC에 대한 원주각의 크기는 일정하므로
$\angle BGC=\angle A=60°$
사각형 AEFD의 내각의 합은 $360°$이고
$\angle AEF=\angle ADF=90°$이므로
$\angle EFD=180°-\angle A=180°-60°=120°$
$\angle CFD=180°-\angle EFD=60°$
따라서 삼각형 CGF는 정삼각형이고
$\overline{CF}=\overline{FG}$
호 BC에 대한 중심각의 크기는
원주각의 크기의 2배이므로
$\angle BOC=2\angle BAC=120°$
삼각형 OBC는 이등변삼각형이므로 변 BC의 중점을 M이라 하면 직각삼각형 OBM에서
$\angle BOM=\frac{1}{2}\angle BOC=60°$
$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=3$
$\sin 60°=\frac{\overline{BM}}{\overline{OB}}$
$\overline{OB}=\frac{\overline{BM}}{\sin 60°}$
$=3\times\frac{2}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3}$
즉 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
두 선분 $\overline{OC}$, $\overline{OG}$ 는 모두 원의 반지름이므로
$\overline{OC}=\overline{OG}=2\sqrt{3}$
$\overline{OF}$ 는 공통이므로 삼각형 OFC와 삼각형 OFG는 합동이고
$\angle COF=\angle GOF$
즉 선분 OH는 $\angle COG$의 이등분선이고 삼각형 OCG는 이등변삼각형이므로
$\angle CHO=90°$
$\overline{CF}=x$ 라 하면 $\overline{CH}=\frac{1}{2}x$, $\overline{FH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$
직각삼각형 OCH에서 피타고라스 정리에 의해
$\overline{OC}^2=\overline{CH}^2+\overline{OH}^2$
$(2\sqrt{3})^2=\left(\frac{1}{2}x\right)^2+\left(\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2$
$12=x^2+3x+3$
$x^2+3x-9=0$
근의 공식에 의해
$x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$
$x>0$ 이므로 $x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$
$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{3}{2}$
따라서 구하는 값은
$20(a^2+b^2)=20\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)$
$=90$
[다른 풀이]


호 BC에 대한 중심각의 크기는 원주각의 크기의 2배이므로
$\angle BOC=2\angle BAC=120°$
삼각형 OBC는 이등변삼각형이고
$\angle COB=120°$ 이므로
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
한편 사각형 AEFD의 내각의 합은 $360°$이고
$\angle AEF=\angle ADF=90°$이므로
$\angle EFD=180°-\angle A=180°-60°=120°$
맞꼭지각의 크기는 같으므로
$\angle BFC=\angle EFD=120°$
따라서 $\angle BFC=\angle BOC=120°$이고
네 점 B, O, F, C는 한 원 위에 있다.
한 원에서 같은 호에 대한 원주각의 크기는 같으므로
$\angle BCO=\angle BFO=30°$
점 O에서 선분 CE에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\angle OFH=180°-(30°+120°)=30°$
직각삼각형 OHF에서
$\overline{HF}=\overline{OF}\times\cos 30°$
$=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}$
$\overline{OH}=\overline{OF}\times\sin 30°$
$=\sqrt{3}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\overline{CF}=x$ 라 하면 직각삼각형 OCH에서 피타고라스 정리에 의해
$\overline{OC}^2=\overline{OH}^2+\overline{CH}^2$
$(2\sqrt{3})^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}+x\right)^2$
$12=3+3x+x^2$
$x^2+3x-9=0$
근의 공식에 의해
$x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$
$x>0$ 이므로 $x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$
$a=-\frac{3}{2},\ b=\frac{3}{2}$
따라서 구하는 값은
$20(a^2+b^2)=20\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)$
$=90$
[다른 풀이]


삼각형 OBC는 이등변삼각형이고
$\angle COB=120°$ 이므로
삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$ 이다.
$\angle CFB=\angle COB=120°$ 이므로
네 점 B, O, F, C는 한 원 위에 있다.
$\angle BCO=\angle BFO=30°$
선분 BF 위에 $\overline{OF}=\overline{OG}=\sqrt{3}$ 이 되도록 점 G를 잡으면 삼각형 OGF는 이등변삼각형이므로
$\angle GOF=180°-2\angle OFG=120°$
$\angle BOG=\angle BOC-\angle GOC$
$=120°-\angle GOC$
$=\angle GOF-\angle GOC$
$=\angle COF$
또 $\overline{OB}=\overline{OC}$, $\overline{OG}=\overline{OF}$ 이므로
두 삼각형 OBG와 OCF는 서로 합동이다.
따라서 $\overline{BG}=\overline{CF}$
점 O에서 선분 BF에 내린 수선의 발을 H라 하면
직각삼각형 OGH에서
$\angle OGH=30°$, $\overline{OG}=\sqrt{3}$ 이므로

$\overline{\mathrm{OH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\overline{\mathrm{GH}}=\frac{3}{2}$

$\overline{\mathrm{CF}}=\overline{\mathrm{BG}}=x$ 라 하면 직각삼각형 OBH 에서
피타고라스 정리에 의해

$\overline{\mathrm{OB}}^2=\overline{\mathrm{OH}}^2+\overline{\mathrm{BH}}^2$

$(2\sqrt{3})^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}+x\right)^2$

$12=3+3x+x^2$

$x^2+3x-9=0$

근의 공식에 의해

$x=\frac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}$

$x>0$ 이므로 $x=\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}$

$a=-\frac{3}{2}$, $b=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 값은

$20(a^2+b^2)=20\left(\frac{9}{4}+\frac{9}{4}\right)$