수학영역 나형 정답 및 풀이

*수정일 : 2021년 5월 20일

01. ⑤	02. ③	03. ⑤	04. ②	05. ②
06. ①	07. ②	08. ②	09. ④	10. ⑤
11. ③	12. ①	13. ③	14. ②	15. ④
16. ①	17. ②	18. ⑤	19. ④	20. ③
21. ①	22. 36	23. 5	24. 80	25. 8
26. 6	27. 3	28. 162	29. 84	30. 19

1. **출제의도** : 유리수 지수를 포함한 수의 연산을 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$5^0 \times 25^{\frac{1}{2}} = 1 \times (5^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$= 5$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9n^2+4n+1}}{2n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}}}{2+\frac{5}{n}}$$
$$= \frac{\sqrt{9+0+0}}{2+0}$$
$$= \frac{3}{2}$$

정답 ③

3. **출제의도** : 집합의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$9 \notin B$, $9 \in A \cup B$이므로

$9 \in A$이어야 한다.

따라서 $a=9$

정답 ⑤

4 **출제의도** : 함숫값과 역함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 그림으로부터

$f(1)=2$

또, $f^{-1}(3)=a$라 하면 $f(a)=3$

이때, 주어진 그림에서

$a=2$ 즉, $f^{-1}(3)=2$

따라서,

$f(1)+f^{-1}(3)=2+2=4$

정답 ②

5. **출제의도** : 충분조건이 되도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

$|x-4|=2$에서 $x-4=2$ 또는 $x-4=-2$

즉, $x=6$ 또는 $x=2$이므로

$P=\{2,\ 6\}$

$Q=\{x|\ x \geq a\}$

p가 q이기 위한 충분조건이므로

$P \subset Q$이어야 한다.

즉, $a \leq 2$이다.

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

정답 ②

6. **출제의도** : 확률의 성질을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$A \cup B = A \cup (A^C \cap B)$

이고, 두 사건 A, $A^C \cap B$는 서로 배반사건이므로

$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(A^C \cap B)$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A) &= \mathrm{P}(A \cup B) - \mathrm{P}(A^C \cap B) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

정답 ①

7. **출제의도** : 우극한값, 좌극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x \to -1+$일 때, $f(x) \to 0$이므로

$\lim_{x \to -1+} f(x) = 0$

또, $x \to 1-$일 때, $f(x) \to 2$이므로

$\lim_{x \to 1-} f(x) = 2$

따라서,

$\lim_{x \to -1+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x) = 0 + 2 = 2$

정답 ②

8. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 주어진 수를 주어진 문자로 나타낼 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2 5 = \dfrac{1}{\log_5 2}$이므로 $\log_5 2 = \dfrac{1}{a}$

$$\begin{aligned}\log_5 12 &= \log_5 (2^2 \times 3) \\ &= \log_5 2^2 + \log_5 3 \\ &= 2\log_5 2 + \log_5 3 \\ &= 2 \times \frac{1}{a} + b \\ &= \frac{2}{a} + b\end{aligned}$$

정답 ②

9. **출제의도** : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= -(-1)^n \times a_n + 2^n \\ &= (-1)^{n+1} \times a_n + 2^n\end{aligned}$$

이므로

$a_2 = (-1)^2 \times a_1 + 2^1 = 1 + 2 = 3$

$a_3 = (-1)^3 \times a_2 + 2^2 = -3 + 4 = 1$

$a_4 = (-1)^4 \times a_3 + 2^3 = 1 + 8 = 9$

따라서

$a_5 = (-1)^5 \times a_4 + 2^4 = -9 + 16 = 7$

정답 ④

10. **출제의도** : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

꺼낸 3개의 공 중에서 적어도 한 개가 검은 공인 사건을 A라 하면 A^C은 모두 흰 공인 사건이다.

따라서,

$\mathrm{P}(A) = 1 - \mathrm{P}(A^C)$

$$= 1 - \frac{{}_4C_3}{{}_7C_3}$$

$$= 1 - \frac{4}{35}$$

$$= \frac{31}{35}$$

정답 ⑤

11. **출제의도** : 급수와 수열의 극한 사이의 관계를 이용하여 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n - 3)$가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}(2a_n - 3) = 0$이다.

$2a_n - 3 = b_n$이라 하면

$\lim_{n=\infty} b_n = 0$이고 $a_n = \frac{1}{2}(b_n + 3)$이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(b_n + 3) = \frac{1}{2}\times(0+3) = \frac{3}{2}$

즉, $r = \frac{3}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+2}-1}{r^n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n+2}-1}{\left(\frac{3}{2}\right)^n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{9}{4}-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$= \frac{\frac{9}{4}-0}{1+0} = \frac{9}{4}$$

정답 ③

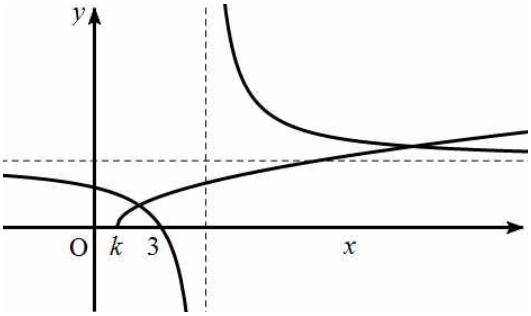
12. **출제의도** : 유리함수와 무리함수의 그래프를 그릴 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = \frac{6}{x-5} + 3$의 점근선은

직선 $x = 5$, 직선 $y = 3$

이고, $y = 0$일 때 $x = 3$이므로 그래프는 다음과 같다.



위 그림에서 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나려면 $k \le 3$이어야 함을 알 수 있다.

따라서 구하는 실수 k의 최댓값은 3

정답 ①

13. **출제의도** : 등차수열에 관련된 문제를 등차중항을 이용하여 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

x에 대한 이차방정식

$x^2 - nx + 4(n-4) = 0$

을 풀면

$(x-4)(x-n+4) = 0$

$x = 4$ 또는 $x = n-4$

한편, 세 수 $1, \alpha, \beta$가 등차수열을 이루므로

$2\alpha = \beta + 1$ ------㉠

이때, 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $\alpha=4$ 이고 $\beta=n-4$인 경우

이때, $\alpha<\beta$이므로

$n>8$

또, ㉠에서

$8=(n-4)+1$

$n=11$

그러므로 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $\alpha=n-4$이고 $\beta=4$

이때, $\alpha<\beta$이므로

$n<8$

또, ㉠에서

$2(n-4)=4+1$

$n=\dfrac{13}{2}$

n은 자연수가 아니므로 조건을 만족시키지 못한다.

따라서, (ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 자연수 n의 값은 11이다.

정답 ③

14. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^3의 계수는

$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)$에서 x^2의 계수 1과 $\left(x+\dfrac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x의 계수를 곱한 것과

$\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)$에서 $\dfrac{1}{x}$의 계수 -1과 $\left(x+\dfrac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^4의 계수를 곱한 것의 합과 같다.

$\left(x+\dfrac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 일반항은

${}_4\mathrm{C}_r\, x^{4-r}\left(\dfrac{a}{x^2}\right)^r={}_4\mathrm{C}_r\, a^r x^{4-r-2r}={}_4\mathrm{C}_r\, a^r x^{4-3r}$

x항은 $4-3r=1$, 즉, $r=1$이므로

x의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_1 a^1=4a$

x^4항은 $4-3r=4$, 즉, $r=0$이므로

x^4의 계수는 ${}_4\mathrm{C}_0 a^0=1$

즉, $\left(x^2-\dfrac{1}{x}\right)\left(x+\dfrac{a}{x^2}\right)^4$의 전개식에서 x^3의 계수는 $1\times4a+(-1)\times1=4a-1$

따라서 $4a-1=7$이므로 $a=2$

정답 ②

15. 출제의도 : 함수의 연속을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$는 $x=0$에서만 불연속이고, 함수 $g(x)$는 $x=a$에서만 불연속이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$, $x=a$에서만 연속이면 실수 전체의 집합에서 연속이다.

만일 $a<0$이면

$f(0)g(0)=2\times(-1)=-2$

$\displaystyle\lim_{x\to0+}f(x)g(x)=2\times(-1)=-2$

$\displaystyle\lim_{x\to0-}f(x)g(x)=3\times(-1)=-3$

이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 불연속이다.

즉, $a\geq0$이다.

이때 $x=a$에서 함수 $f(x)g(x)$의 연속성을 조사하면

$f(a)g(a)=(-2a+2)(2a-1)$

$$\lim_{x\to a+} f(x)g(x) = (-2a+2)(2a-1)$$

$$\lim_{x\to a-} f(x)g(x) = (-2a+2)\times 2a$$

이므로 함수 $f(x)g(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$(-2a+2)(2a-1) = (-2a+2)\times 2a$

이어야 한다.

따라서 $a=1$

정답 ④

16. 출제의도 : 확률을 확률의 정의와 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a\times b\times c\times d = 12$에서

$a\times b\times c\times d = 2^2\times 3$

이므로 a, b, c, d는 $6, 2, 1, 1$ 또는 $4, 3, 1, 1$ 또는 $3, 2, 2, 1$이다.

따라서, 구하는 확률은

$$\frac{\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}+\frac{4!}{2!}}{6^4}$$

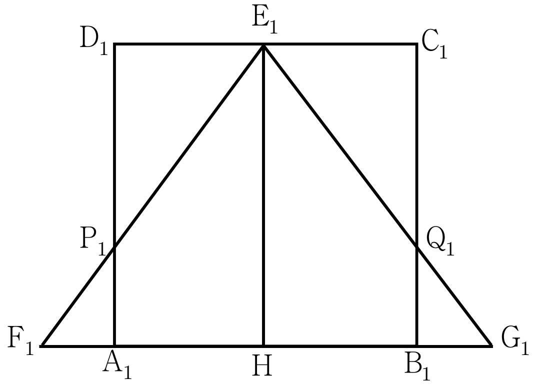
$$=\frac{12+12+12}{6^4}=\frac{1}{36}$$

정답 ①

17. 출제의도 : 등비급수의 합을 이용하여 도형의 넓이에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

그림 R_1의 점 E_1에서 변 A_1B_1에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{E_1D_1}=\frac{1}{2}\overline{D_1C_1}=\frac{1}{2}\times 4=2$

$\overline{E_1H}=\overline{D_1A_1}=4$

$\overline{E_1F_1}=5a$라 놓으면 $\overline{E_1F_1}:\overline{F_1G_1}=5:6$이므로 $\overline{F_1G_1}=6a$

즉, $\overline{F_1H}=\frac{1}{2}\overline{F_1G_1}=3a$

직각삼각형 E_1F_1H에서

$(5a)^2=4^2+(3a)^2$

즉, $16a^2=16$에서 $a>0$이므로 $a=1$

$\overline{F_1H}=3$이고 $\overline{A_1H}=2$이므로

$\overline{F_1A_1}=3-2=1$

삼각형 $D_1P_1E_1$과 삼각형 $A_1P_1F_1$이 닮음이고 $\overline{D_1E_1}=2$, $\overline{A_1F_1}=1$이므로 닮음비는 $2:1$

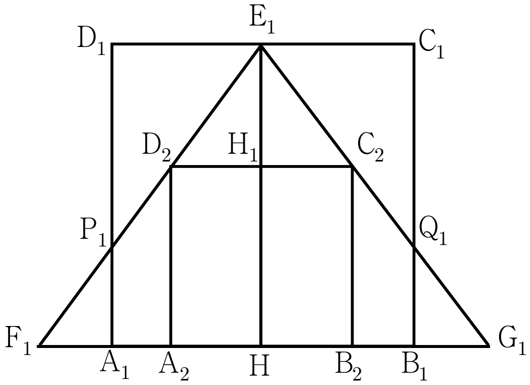
즉, $\overline{D_1P_1}=\frac{2}{3}\times 4=\frac{8}{3}$, $\overline{A_1P_1}=\frac{1}{3}\times 4=\frac{4}{3}$

$\overline{E_1F_1}=\overline{E_1G_1}$이므로

삼각형 $D_1P_1E_1$과 삼각형 $C_1Q_1E_1$이 합동이고 삼각형 $A_1P_1F_1$과 삼각형 $B_1Q_1G_1$이 합동이므로

$S_1=2\times\frac{1}{2}\times 2\times\frac{8}{3}+2\times\frac{1}{2}\times 1\times\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$

그림 R_2의 점 E_1에서 변 D_2C_2에 내린 수선의 발을 H_1이라 하자.



정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 한 변의 길이를 x라 놓으면

$\overline{D_2H_1}=\frac{x}{2}$, $\overline{E_1H_1}=4-x$

삼각형 E_1F_1H와 삼각형 $E_1D_2H_1$은 닮음이므로

$3:4=\frac{x}{2}:4-x$ 즉, $2x=12-3x$에서

$x=\frac{12}{5}$

정사각형 $A_1B_1C_1D_1$과

정사각형 $A_2B_2C_2D_2$의 닮음비는

$4:\frac{12}{5}=1:\frac{3}{5}$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{20}{3}$이고, 공비가 $\left(\frac{3}{5}\right)^2$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{20}{3}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{125}{12}$$

정답 ②

18. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수에 대하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이때 함수 $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & (x<0)\\ f(x) & (x\ge 0)\end{cases}$이 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$f(0)=\frac{1}{2}$, $f'(0)=0$

이어야 한다.

즉, $c=\frac{1}{2}$, $b=0$이므로

$f(x)=x^3+ax^2+\frac{1}{2}$

ㄱ. $g(0)+g'(0)=f(0)+f'(0)$

$=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$ (참)

ㄴ. $f'(x)=3x^2+2ax=x(3x+2a)=0$

이므로 $x=0$, $x=-\frac{2a}{3}$에서 극값을 갖는다. 만일 $-\frac{2a}{3}<0$이면 함수 $g(x)$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다. 즉, $-\frac{2a}{3}>0$이므로 $a<0$이다.

이때

$g(1)=f(1)=1+a+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}+a$

이므로

$g(1)<\frac{3}{2}$ (참)

ㄷ. 함수 $g(x)$는 $x=-\frac{2a}{3}$에서 최솟값을 갖고, 최솟값은

$$g\left(-\frac{2a}{3}\right)=f\left(-\frac{2a}{3}\right)$$
$$=-\frac{8}{27}a^3+\frac{4}{9}a^3+\frac{1}{2}$$
$$=\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}$$

이므로

$$\frac{4}{27}a^3+\frac{1}{2}=0$$

에서

$$a^3=-\frac{27}{8}$$

즉, $a=-\frac{3}{2}$

따라서

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

이므로

$$g(2)=f(2)=8-6+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\ (참)$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

19. **출제의도** : 독립에 관련된 내용을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

A_k는 k번째 자리에 k이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, k번째 자리를 제외한 7개의 자리에 나머지 7장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A_k)=\boxed{\frac{k}{8}}$$

이다.

$A_m\cap A_n(m<n)$은 m번째 자리에 m이하의 자연수 중 하나가 적힌 카드가 놓여 있고, n번째 자리에 n이하의 자연수 중 m번째 자리에 놓인 카드에 적힌 수가 아닌 자연수가 적힌 카드가 놓여 있고, m번째와 n번째 자리를 제외한 6개의 자리에 나머지 6장의 카드가 놓여 있는 사건이므로

$$\mathrm{P}(A_m\cap A_n)=\frac{m}{8}\times\frac{n-1}{7}$$
$$=\boxed{\frac{m(n-1)}{56}}$$

이다.

한편, 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이기 위해서는

$$\mathrm{P}(A_m\cap A_n)=\mathrm{P}(A_m)\mathrm{P}(A_n)$$

을 만족시켜야 한다.

그러므로

$$\frac{m(n-1)}{56}=\frac{m}{8}\times\frac{n}{8}$$

$$m(n-8)=0$$

이때, $m\neq 0$이므로

$$n=8$$

또, $m<n$이므로 m의 값은

$$1, 2, 3, \cdots, 7$$

따라서, 두 사건 A_m과 A_n이 서로 독립이 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)은 $(1, 8), (2, 8), \cdots, (7, 8)$이므로 그 개수는 $\boxed{7}$이다.

이때, (가)에 알맞은 식은 $\frac{k}{8}$이므로

$$p=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

또, (나)에 알맞은 식은 $\frac{m(n-1)}{56}$이므로

$$q=\frac{3\times(5-1)}{56}=\frac{3}{14}$$

또, $r=7$

따라서,

$$p\times q\times r=\frac{1}{2}\times\frac{3}{14}\times 7$$
$$=\frac{3}{4}$$

정답 ④

20. **출제의도** : 함수의 극한의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 다항함수를 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $n=1$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^2+1}=6,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=4$$

를 만족시키려면

$f(x)=4x^3+3x^2+ax$ (a는 상수)

의 꼴이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}(4x^2+3x+a)=a$$

이므로 $a=4$

즉, $f(x)=4x^3+3x^2+4x$이므로

$f(1)=4+3+4=11$

(ⅱ) $n=2$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^3+1}=6,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=4$$

를 만족시키려면

$f(x)=10x^3+bx^2$ (b는 상수)

의 꼴이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}(10x+b)=b$$

이므로 $b=4$

즉, $f(x)=10x^3+4x^2$이므로

$f(1)=10+4=14$

(ⅲ) $n\geq 3$일 때,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)-4x^3+3x^2}{x^{n+1}+1}=6,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=4$$

를 만족시키려면

$f(x)=6x^{n+1}+cx^n$ (c는 상수)

의 꼴이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}(6x+c)=c$$

이므로 $c=4$

즉, $f(x)=6x^{n+1}+4x^n$이므로

$f(1)=6+4=10$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 $f(1)$의 최댓값은 14

정답 ③

21. **출제의도** : 조건을 만족시키는 함수 $g(x)$를 추론하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로

$-4\leq x\leq 0$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래

프는 $0 \le x \le 4$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭 이동시킨 그래프와 같다. 또한 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-8)$이므로 $4 \le x \le 12$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $-4 \le x \le 4$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 8만큼 평행이동 시킨 그래프와 같다. 이와 마찬가지로 정수 k에 대하여

$-4+8k \le x \le 4+8k$에서의

함수 $y=f(x)$의 그래프는 $-4 \le x \le 4$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $8k$만큼 평행 이동시킨 그래프와 같다.

한편,

$x>0$에서 $\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1$이고

$x<0$에서 $\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$이므로

$$g(x)=\begin{cases} n+1 & (x>0) \\ n & (x=0) \\ n-1 & (x<0) \end{cases}$$

즉, 함수 $g(x)$의 치역은 $\{n-1,\ n,\ n+1\}$

실수 전체의 집합에서 함수 $(f \circ g)(x)$가 상수함수이려면

$f(n-1)=f(n)=f(n+1)$을 만족시켜야 한다.

즉, 연속인 세 정수에 대하여 함수 f의 값이 같은 경우는 다음과 같다.

(i) $(f \circ g)(x)=2$가 되는 경우

$-2+8k \le n-1$ 이고 $n+1 \le 2+8k$ (k는 정수)

즉, $8k-1 \le n \le 8k+1$ (k는 정수)

① $k<0$이면 $8k+1<0$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

② $k=0$이면 $-1 \le n \le 1$이므로 조건을 만족시키는 자연수 n은 1

③ $1 \le k \le 7$이면 $8k-1 \le n \le 8k+1$ (k는 정수)이므로 조건을 만족시키는 60 이하의 자연수 n은 $8k-1$, $8k$, $8k+1$

④ $k \ge 8$이면 $8k-1 \ge 63$이므로 조건을 만족시키는 60 이하의 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $(f \circ g)(x)=0$이 되는 경우

$3+8t \le n-1$이고 $n+1 \le 5+8t$ (t는 정수)

즉, $4+8t \le n \le 4+8t$에서

$n=4+8t$ (t는 정수)

$1 \le 4+8t \le 60$에서 $-\dfrac{3}{8} \le t \le 7$

이므로 $0 \le t \le 7$

즉, 조건을 만족시키는 60 이하의 자연수 n의 개수는 4, 12, 20, 28, 36, 44, 52, 60의 8

(i), (ii)에서

조건을 만족시키는 60 이하의 자연수 n의 개수는 $(1+3\times7)+8=30$

정답 ①

22. 출제의도 : 조합의 수를 조합의 성질을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} {}_9C_7 &= {}_9C_{9-7} \\ &= {}_9C_2 \\ &= \frac{9\times8}{2\times1} \\ &= 36 \end{aligned}$$

정답 36

23. 출제의도 : 유리함수의 그래프의 성질을 이용하여 미지수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행 이동시킨 그래프는 함수 $y-4=\frac{2}{x}$ 즉, 함수 $y=\frac{2}{x}+4$의 그래프와 같다.

이 그래프가 점 $(2,\ a)$를 지나므로

$a=\frac{2}{2}+4=1+4=5$

정답 5

24. **출제의도** : 등비수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$\frac{a_5}{a_3}=r^2=9$

에서 $r>0$이므로

$r=3$

따라서

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = \sum_{k=1}^{4}(2\times 3^{k-1})$$

$$=\frac{2(3^4-1)}{3-1}$$

$$=80$$

정답 80

25. **출제의도** : 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 t에서의 위치가

$x=t^3-5t^2+6t$

이므로 시각 t에서의 속도를 v라 하면

$v=3t^2-10t+6$

또, 시각 t에서의 가속도를 a라 하면

$a=6t-10$

따라서, $t=3$에서의 가속도는

$6\times 3-10=8$

정답 8

26. **출제의도** : 집합의 연산, 두 집합 사이의 포함관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 집합의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2-4x+3=(x-3)(x-1)=0$이므로

$x=1$ 또는 $x=3$

즉, $B=\{1,\ 3\}$이므로

$A-B=\{2,\ 4,\ 8,\ 16\}$

$X-(A-B)=\varnothing$이므로 $X\subset(A-B)$

$n(X)=2$이므로

집합 X는 집합 $A-B$의 원소의 개수가 2인 부분 집합이다.

즉, 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 집합 $A-B$의 원소 2, 4, 8, 16 중 2개의 원소를 택하는 경우의 수 ${}_4\mathrm{C}_2=\frac{4\times 3}{2}=6$과 같다.

따라서 조건을 만족시키는 집합 X의 개수는 6

정답 6

27. **출제의도** : 도함수를 이용하여 부등식이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(x)=f(x)-3g(x)$라 하면

$h(x)=x^3-3x^2-9x+30-k$

이고, 닫힌 구간 $[-1, 4]$에서

$f(x) \geq 3g(x)$

이므로 $h(x) \geq 0$이어야 한다.

이때

$h'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

이므로 닫힌 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$의 증가, 감소를 조사하면 함수 $h(x)$는 $x=3$에서 극소이면서 최소임을 알 수 있다. 즉, 닫힌 구간 $[-1, 4]$에서 함수 $h(x)$의 최솟값은

$h(3)=3-k$

이므로 닫힌 구간 $[-1, 4]$에서 $h(x) \geq 0$ 이려면

$3-k \geq 0$

즉, $k \leq 3$이어야 한다.

따라서 구하는 k의 최댓값은 3

정답 3

28. **출제의도** : 등비수열의 일반항과 등비수열의 합을 이용하여 특정 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r (r는 정수)라 하면

첫째항이 2이므로 $a_n=2r^{n-1}$

$a_2=2r$, $a_3=2r^2$이므로

조건 (가)에서

$4<2r+2r^2 \leq 12$ 즉, $2<r+r^2 \leq 6$

$r^2+r>2$에서

$r^2+r-2=(r+2)(r-1)>0$이므로

$r<-2$ 또는 $r>1$ ----㉠

$r^2+r \leq 6$에서

$r^2+r-6=(r+3)(r-2) \leq 0$이므로

$-3 \leq r \leq 2$ ----㉡

㉠, ㉡에서

$-3 \leq r<-2$ 또는 $1<r \leq 2$

r는 정수이므로 $r=-3$ 또는 $r=2$

(i) $r=2$인 경우

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}(2\times 2^{k-1})$$
$$=\frac{2(2^m-1)}{2-1}$$
$$=2(2^m-1)$$

$2(2^m-1)=122$에서

$2^m-1=61$, $2^m=62$

이때 $2^m=62$를 만족시키는 m의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $r=-3$인 경우

조건 (나)에서

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=\sum_{k=1}^{m}\{2\times(-3)^{k-1}\}$$
$$=\frac{2\{1-(-3)^m\}}{1-(-3)}$$
$$=\frac{1-(-3)^m}{2}$$

$\frac{1-(-3)^m}{2}=122$에서

$1-(-3)^m=244$

$(-3)^m=-243$

즉, $(-3)^m=(-3)^5$이므로 $m=5$

i), (ii)에 의하여 $r=-3$, $m=5$이므로

$a_m=a_5=2\times(-3)^4=162$

정답 162

29. **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에 의하여

$x_1 \le x_2-2$, $x_2 \le x_3-2$

이고, 조건 (나)에 의하여

$x_3 \le 10$

이므로

$0 \le x_1 \le x_2-2 \le x_3-4 \le 6$

이때 $x_2-2=x_2{}'$, $x_3-4=x_3{}'$이라 하면

$0 \le x_1 \le x_2{}' \le x_3{}' \le 6$ ……㉠

이고 주어진 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, x_2, x_3의 모든 순서쌍 (x_1, x_2, x_3)의 개수는 ㉠을 만족시키는 음이 아닌 정수 x_1, $x_2{}'$, $x_3{}'$의 모든 순서쌍 $(x_1, x_2{}', x_3{}')$의 개수와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 0, 1, 2, …, 6의 7개에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_7\mathrm{H}_3={}_{7+3-1}\mathrm{C}_3$$
$$={}_9\mathrm{C}_3$$
$$=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}$$
$$=84$$

정답 84

30. 출제의도 : 조건을 만족시키는 유리함수와 삼차함수를 구할 수 있는가?

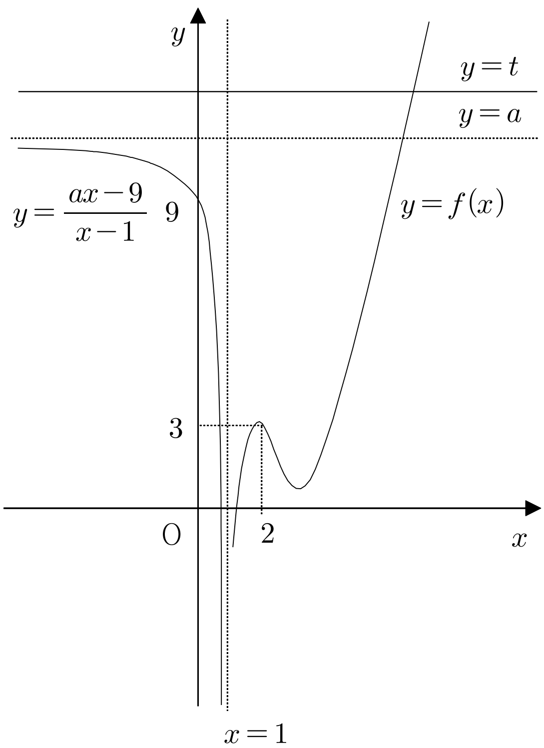
정답풀이 :
$x<1$일 때, 함수 $g(x)$는

$$y=\frac{ax-9}{x-1}$$
$$=\frac{a(x-1)+a-9}{x-1}$$
$$=\frac{a-9}{x-1}+a$$

이 그래프는 함수 $y=\frac{a-9}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동시킨 것이다.

그러므로 $a-9$의 부호에 따라 나누면 다음과 같다.

(i) $a-9>0$ 즉, $a>9$일 때,



이때, 직선 $y=t$가 $t>9$일 때는 곡선 $y=\frac{a-9}{x-1}+a$와 만나지 않는다.

또, t가 충분히 크면 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와는 직선 $y=t$와 한 점에서 만난다.

그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a-9=0$ 즉, $a=9$일 때,

$$y=\frac{a-9}{x-1}+a=9$$

이 경우에도 직선 $y=t$가 $t>9$이고 충분히 크면 직선 $y=t$와 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프와 한 점에서만 만난다.

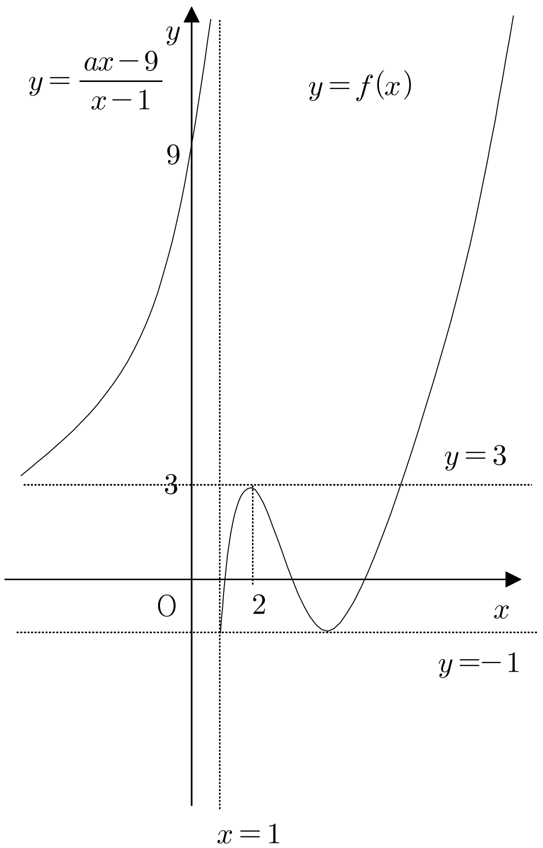
그러므로 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅲ) $a-9<0$ 즉, $a<9$일 때,

조건을 만족시키려면 유리함수 $y=\frac{a-9}{x-1}+a$의 그래프의 점근선은 $y=3$이어야 한다. 즉,

$a=3$

또, 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프는 두 직선 $y=3$, $y=-1$에 접하고 $f(1)\le -1$이어야 한다.



이때, 삼차함수 $f(x)$의 최고차항이 1이므로

$$f(x)=(x-2)^2(x-k)+3 \qquad (k>2)$$

로 놓으면

$$\begin{aligned} f'(x)&=2(x-2)(x-k)+(x-2)^2 \\ &=(x-2)(3x-2k-2) \\ &=3(x-2)\left(x-\frac{2k+2}{3}\right) \end{aligned}$$

이때, $f'(x)=0$에서

$x=2$ 또는 $x=\frac{2k+2}{3}$

이때, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2k+2}{3}$에서 극솟값 -1을 가져야 하므로

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2k+2}{3}\right)&=\left(\frac{2k+2}{3}-2\right)^2\left(\frac{2k+2}{3}-k\right)+3 \\ &=-\frac{4}{27}(k-2)^3+3=-1 \end{aligned}$$

$(k-2)^3=27$

$k=5$

그러므로

$f(x)=(x-2)^2(x-5)+3$

따라서,

$$g(x)=\begin{cases} \frac{3x-9}{x-1} & (x<1) \\ (x-2)^2(x-5)+3 & (x\ge 1) \end{cases}$$

이므로

$$\begin{aligned} (g\circ g)(-1)&=g(g(-1)) \\ &=g(6) \\ &=19 \end{aligned}$$

정답 19

EBS