정답 및 해설

수학 영역

가형 정답

1	⑤	2	③	3	②	4	②	5	①
6	⑤	7	⑤	8	④	9	③	10	②
11	③	12	③	13	⑤	14	④	15	④
16	①	17	②	18	①	19	④	20	⑤
21	②	22	200	23	99	24	64	25	8
26	72	27	120	28	18	29	60	30	95

가형 해설

1. [출제의도] 평면벡터 계산하기
$\vec{a}-\vec{b}=(1,\ 4)$ 이므로 모든 성분의 합은 5

2. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기
$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+2x}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{1}{3}\times\frac{3x}{e^{3x}-1}\times(x^2+2)\right\}$$
$$=\frac{1}{3}\times1\times2=\frac{2}{3}$$

3. [출제의도] 공간좌표의 외분점 계산하기
선분 AB 를 $1:2$ 로 외분하는 점의 좌표는
$$\left(\frac{1\times2-2\times1}{1-2},\ \frac{1\times0-2\times0}{1-2},\ \frac{1\times a-2\times2}{1-2}\right)$$
이므로 $a=4$

4. [출제의도] 사건의 독립 이해하기
두 사건 A, B가 서로 독립이므로
$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$\frac{7}{9}=\frac{2}{3}+\mathrm{P}(B)-\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)$, $\frac{1}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{9}$
따라서 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{3}$

5. [출제의도] 로그함수를 활용하여 부등식 계산하기
로그의 정의에 의하여 $x>3$ ……㉠
$\log_3(x-3)+\log_3(x+3)=\log_3(x^2-9)$
$\log_3(x^2-9)\le3$ 에서 $x^2-9\le27$ 이고
$x^2\le36$ 에서 $-6\le x\le6$ ……㉡
㉠, ㉡에 의하여 $3<x\le6$ 이므로
정수 x는 $x=4$ 또는 $x=5$ 또는 $x=6$
따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 15

6. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기
주사위를 5 번 던져서 나온 다섯 눈의 수의 곱이 짝수인 사건을 A 라 하면, 주사위를 5 번 던져서 나온 다섯 눈의 수의 곱이 홀수인 사건은
A^C 이므로 $\mathrm{P}(A^C)={}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$
따라서 $\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

7. [출제의도] 타원의 성질 이해하기
장축의 길이를 $2a$, 단축의 길이를 $2b$ 라 하면
타원의 정의에 의하여
$\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{AF'}}=2a$, $\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{BF'}}=2a$
이므로 $4a=52$에서 $a=13$
$a^2-b^2=25$ 에서 $b^2=144$ 이고 $b=12$
따라서 단축의 길이는 24

8. [출제의도] 음함수의 미분법 이해하기
음함수의 미분법에 의하여
$$y+x\frac{dy}{dx}-3y^2\frac{dy}{dx}\ln x-y^3\frac{1}{x}=0$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y^3}{x}-y}{x-3y^2\ln x}\ (\text{단, } x-3y^2\ln x\ne0\ )$$
$x=1$ 일 때 $y=2$ 이므로 $\frac{dy}{dx}=\frac{8-2}{1-0}=6$

9. [출제의도] 역함수의 미분법 이해하기
$g(e)=t$ 라 하면 $f(t)=e$
$e^{t^3+2t-2}=e$ 에서 $t=1$ 이므로 $g(e)=1$
$f'(x)=(3x^2+2)e^{x^3+2x-2}$
따라서 $g'(e)=\frac{1}{f'(g(e))}=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{5e}$

10. [출제의도] 정적분으로 나타내어진 함수 이해하기
$\int_a^x f(t)dt=(x+a-4)e^x$ 에서
$x=a$ 를 대입하면
$0=(2a-4)e^a$ 이므로 $a=2$
$\int_2^x f(t)dt=(x-2)e^x$
양변을 x 에 대하여 미분하면
$f(x)=(x-1)e^x$
따라서 $f(a)=f(2)=e^2$

11. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프 이해하기
$f^{-1}(x)=\log_3(x-k)+1$ 이므로
$g(x)=\log_3(x-k^2-k)+1$ 이다.
곡선 $y=f(x)$ 의 점근선은 $y=k$ 이고
곡선 $y=g(x)$ 의 점근선은 $x=k^2+k$ 이다.
두 점근선의 교점의 좌표는 $(k^2+k,\ k)$ 이고
직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위에 있으므로 $k=\frac{1}{3}(k^2+k)$
따라서 $k>0$ 이므로 $k=2$

12. [출제의도] 합성함수의 미분법 이해하기
조건 (나)에서 $h(1)=5$, $h'(1)=12$
$h(1)=g(f(1))=g(2)=5$
$h(x)=g(f(x))$ 에서
$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$
$h'(1)=g'(f(1))f'(1)=3g'(2)=12$
$g'(2)=4$
따라서 $g(2)+g'(2)=5+4=9$

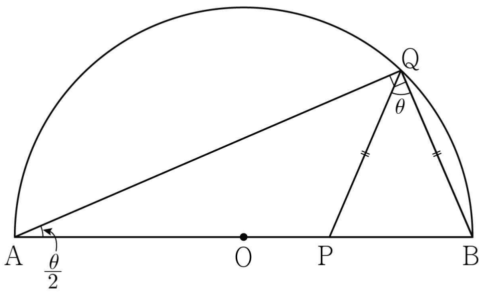
13. [출제의도] 조건부 확률을 활용하여 문제해결하기
주머니에서 임의로 2 개의 공을 동시에 꺼내는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2=6$
꺼낸 2 개의 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 경우는 (1 과 2), (1 과 4), (2 와 3), (3 과 4) 4 가지이다.
주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼냈을 때, 적혀 있는 숫자의 합이 소수일 확률은 $\frac{2}{3}$ 이다.
동전의 앞면이 2 번 나오는 사건을 X, 꺼낸 2 개의 공에 적혀 있는 숫자의 합이 소수인 사건을 Y 라 하자.
$$\mathrm{P}(X)=\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$\mathrm{P}(X\cap Y)=\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\mathrm{P}(Y|X)=\frac{\mathrm{P}(X\cap Y)}{\mathrm{P}(X)}$$
$$=\frac{\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{2}{3}\times{}_2\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\times{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{4}{7}$$

14. [출제의도] 정적분과 곡선의 넓이 이해하기
$x\ge1$ 이면 $f(x)\ge0$ 이고
$x<1$ 이면 $f(x)<0$ 이므로
영역 A 의 넓이는
$$\int_0^1|f(x)|dx=-\int_0^1 f(x)dx$$
영역 B의 넓이는
$$\int_1^3|f(x)|dx=\int_1^3 f(x)dx$$
영역 A 의 넓이와 영역 B의 넓이의 합은
$$-\int_0^1\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx+\int_1^3\frac{2x-2}{x^2-2x+2}dx$$
$$=-\left[\ln(x^2-2x+2)\right]_0^1+\left[\ln(x^2-2x+2)\right]_1^3$$
$$=\ln2+\ln5=\ln10$$

15. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 활용하여 문제해결하기
$\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$ 에서 $\tan\alpha=-\frac{5}{12}$ 이므로
$\sin\alpha=-\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$
$$\sin(x+\alpha)=\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha$$
$$=\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x$$
$\cos x\le\frac{12}{13}\sin x-\frac{5}{13}\cos x\le2\cos x$
양변을 $\cos x$ 로 나누면
$1\le\frac{12}{13}\tan x-\frac{5}{13}\le2$
$\frac{3}{2}\le\tan x\le\frac{31}{12}$ 에서 최댓값은 $\frac{31}{12}$, 최솟값은 $\frac{3}{2}$
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 $\frac{49}{12}$

16. [출제의도] 정규분포의 성질을 활용하여 문제해결하기
함수 $f(t)$ 는 $t=4$ 에서 최댓값을 가지므로
$f(4)=\mathrm{P}(4\le X\le6)$ 에서 확률변수 X 의 평균 m 은 5 이다.
$$f(5)=\mathrm{P}(5\le X\le7)$$
$$=\mathrm{P}\left(0\le Z\le\frac{7-5}{\sigma}\right)$$
$$=0.3413$$
$\frac{7-5}{\sigma}=1$ 에서 $\sigma=2$
$$f(7)=\mathrm{P}(7\le X\le9)$$
$$=\mathrm{P}\left(\frac{7-5}{2}\le Z\le\frac{9-5}{2}\right)$$
$$=\mathrm{P}(1\le Z\le2)$$
$$=\mathrm{P}(0\le Z\le2)-\mathrm{P}(0\le Z\le1)$$
$$=0.1359$$

17. [출제의도] 도형의 성질을 활용하여 삼각함수의 극한 문제해결하기



삼각형 QPB 는 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{QBP} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$

삼각형 ABQ 는 $\angle \mathrm{Q} = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형이므로

$\angle \mathrm{QAB} = \frac{\theta}{2}$

$\overline{\mathrm{QB}} = \overline{\mathrm{QP}} = 2\sin\frac{\theta}{2}$

$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{QB}} \times \overline{\mathrm{QP}} \times \sin\theta$

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^3} = \lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}\sin\theta}{\theta^3}$$

$$= \lim_{\theta\to0+}\left\{2\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sin\theta}{\theta}\right\}$$

$$= 2\times1\times\frac{1}{4}\times1 = \frac{1}{2}$$

18. [출제의도] 확률변수의 평균을 구하는 과정 추론하기

꺼낸 3 장의 카드의 앞면에 적혀 있는 수를 차례로 α, β, γ라 할 때, 이를 순서쌍 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$와 같이 나타내자.

$X=0$ 인 사건은

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 모두 같은 경우이므로 (1, 2, 3)의 1 가지

$\mathrm{P}(X=0) = \frac{1}{60}$

$X=1$ 인 사건은

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 2 인 경우이다.

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1 과 2 로 같은 경우는 (1, 2, 4), (1, 2, 5)의 2 가지,

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1 과 3 또는 2 와 3 으로 같은 경우도 각각 2 가지이므로

$\mathrm{P}(X=1) = \frac{2\times3}{60} = \boxed{\frac{1}{10}}$

$X=2$ 인 사건은

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 서로 같은 카드의 개수가 1 인 경우이다.

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 1 로 같은 경우는 (1, 3, 2), (1, 3, 4), (1, 3, 5), (1, 4, 2), (1, 4, 5), (1, 5, 2), (1, 5, 4)의 7 가지,

앞뒤 양쪽 면에 적혀 있는 숫자가 2 또는 3 으로 같은 경우도 각각 7 가지이므로

$\mathrm{P}(X=2) = \frac{7\times3}{60} = \boxed{\frac{7}{20}}$

$X=3$ 인 사건의 경우에는

$\mathrm{P}(X=3) = 1 - \left(\frac{1}{60}+\frac{1}{10}+\frac{7}{20}\right) = \frac{8}{15}$

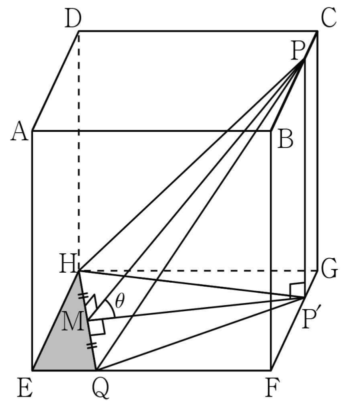
$\mathrm{E}(X) = 0\times\frac{1}{60} + 1\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{7}{20} + 3\times\frac{8}{15}$

$= \boxed{\frac{12}{5}}$

$a = \frac{1}{10}$, $b = \frac{7}{20}$, $c = \frac{12}{5}$

따라서 $10a + 20b + 5c = 20$

19. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제해결하기



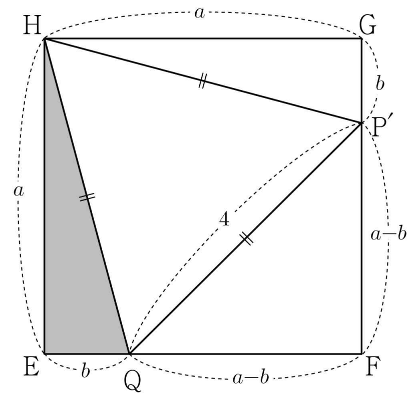
점 P 에서 평면 EFGH 에 내린 수선의 발을 P′, 점 P′ 에서 선분 HQ 에 내린 수선의 발을 M 이라 하면

$\overline{\mathrm{PP'}} \perp$ (평면 EFGH) 이고 $\overline{\mathrm{P'M}} \perp \overline{\mathrm{HQ}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PM}} \perp \overline{\mathrm{HQ}}$

$\overline{\mathrm{PP'}} = \sqrt{15}$, $\overline{\mathrm{P'M}} = 2\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PM}} = 3\sqrt{3}$

$\angle \mathrm{PMP'} = \theta$ 라 하면 $\cos\theta = \frac{2}{3}$



$\overline{\mathrm{EH}} = a$, $\overline{\mathrm{EQ}} = b$ 라 하자.

$\overline{\mathrm{GP'}} = b$, $\overline{\mathrm{FP'}} = \overline{\mathrm{FQ}} = a - b$

$\overline{\mathrm{HQ}} = \overline{\mathrm{QP'}} = 4$ 이므로

$a - b = 2\sqrt{2}$, $a^2 + b^2 = 16$ 에서 $ab = 4$

평면 EQH 와 평면 PHQ 가 이루는 예각의 크기가 θ 이므로

삼각형 EQH 의 넓이를 S, 삼각형 EQH 의 평면 PHQ 위로의 정사영의 넓이를 S' 이라 하면

$S' = S\cos\theta$ 이다.

따라서 $S' = \frac{1}{2}ab\cos\theta = \frac{1}{2}\times4\times\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 함수 추론하기

ㄱ. $f(2+x) = f(2-x) = f(1+(1-x))$

$= f(1-(1-x)) = f(x)$

$f(x+2) = f(x)$ (참)

ㄴ. $\int_2^5 f'(x)dx = [f(x)]_2^5$

$= f(5) - f(2) = 4$ 이고

ㄱ에 의하여 $f(5) = f(1)$ 이고

$f(2) = f(0)$ 이므로 $f(1) - f(0) = 4$ (참)

ㄷ. $f(0) = a$ 라 하면 $f(1) = a + 4$

$f(x) = t$ 라 치환하면 $\frac{dt}{dx} = f'(x)$ 이므로

$\int_0^1 f(f(x))f'(x)dx = \int_{f(0)}^{f(1)} f(t)dt = 6$

ㄱ, ㄴ에 의하여

$\int_a^{a+4} f(t)dt = 6 = 2\int_a^{a+2} f(t)dt$ 에서

$\int_0^2 f(t)dt = 3$

$\int_0^{10} f(x)dx = 5\int_0^2 f(x)dx = 15$

$f(1+x) = f(1-x)$ 이므로

$\int_0^1 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{2}$

$\int_1^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$

$= 15 - \frac{3}{2} = \frac{27}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. [출제의도] 미분법을 활용하여 문제해결하기

점 P 를 P$(\alpha,\ t)$라 하면 $\sin\alpha = t$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-t^2}$ 이다.

접선의 방정식은 $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$ 이고

$y - \sin\alpha = \cos\alpha(x-\alpha)$에서

$-\sin\alpha = \cos\alpha(g(t)-\alpha)$

$g(t) = \alpha - \tan\alpha$ 이다.

$\sin\alpha = t$ 의 양변을 t에 대하여 미분하면

$\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} = 1$ 이므로 $\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{\cos\alpha}$

$g'(t) = \frac{d\alpha}{dt} - \sec^2\alpha\frac{d\alpha}{dt}$

$= \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{\cos^3\alpha}$

$= \frac{\cos^2\alpha - 1}{\cos^3\alpha}$

$= \frac{-t^2}{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}$

따라서 $g'\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -24$

22. [출제의도] 순열과 조합 계산하기

${}_5\mathrm{P}_2 = 20$, ${}_5\mathrm{C}_2 = 10$ 이므로 ${}_5\mathrm{P}_2 \times {}_5\mathrm{C}_2 = 200$

23. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ 이므로 $\tan^2\theta = 99$

24. [출제의도] 이항분포의 평균과 분산 이해하기

확률변수 X는 이항분포 B$(72,\ p)$를 따르므로

$\mathrm{E}(X) = 72p$ 이다.

$\mathrm{E}(2X-3) = 2\mathrm{E}(X) - 3$

$= 144p - 3 = 45$

$p = \frac{1}{3}$ 이므로

$\mathrm{V}(X) = 72\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = 16$

따라서 $\mathrm{V}(2X-3) = 4\mathrm{V}(X) = 64$

25. [출제의도] 평면운동의 속도 이해하기

$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt} = t + 1$ 이고

$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$ 에서 $t = 1$ 이다.

$t = 1$ 일 때, $\vec{v} = (2,\ 2)$이므로

$|\vec{v}| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

따라서 $|\vec{v}|^2 = 8$

26. [출제의도] 부분적분법을 활용하여 문제해결하기

$\dfrac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)'=xe^x$

$\dfrac{f(x)}{x}=(x-1)e^x+C$ (C는 적분상수)

$f(1)=0$ 이므로 $C=0$

$f(x)=x(x-1)e^x$

$f(3)=6e^3$, $f(-3)=12e^{-3}$

따라서 $f(3)\times f(-3)=72$

27. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제해결하기

8개의 레인 번호 중 어느 두 번호도 연속되지 않도록 선택한 3개의 레인 번호를 각각 X, Y, $Z\,(X<Y<Z)$라 하자.

X, Y, Z를 선택하는 경우의 수는 다음과 같다.

X보다 작은 레인 번호의 개수를 a,

X보다 크고 Y보다 작은 레인 번호의 개수를 b,

Y보다 크고 Z보다 작은 레인 번호의 개수를 c,

Z보다 큰 레인 번호의 개수를 d라 하면

$a+b+c+d=5\;(a\ge 0,\ b\ge 1,\ c\ge 1,\ d\ge 0)$

$b=b'+1$, $c=c'+1$

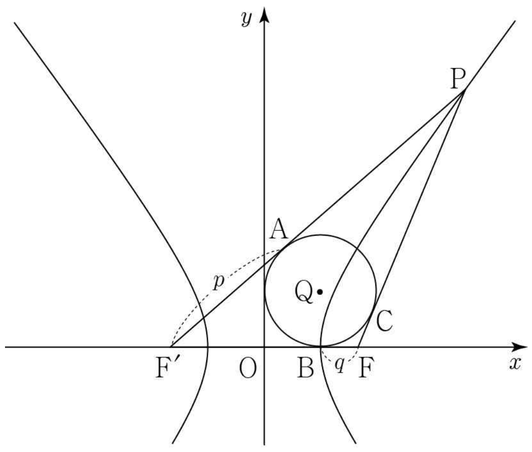
$a+b'+c'+d=3\;(a\ge 0,\ b'\ge 0,\ c'\ge 0,\ d\ge 0)$

${}_4\mathrm{H}_3={}_6\mathrm{C}_3=20$

3개의 레인 번호 X, Y, Z를 3명의 학생이 선택하는 경우의 수는 $3!$

따라서 $20\times 3!=120$

28. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제해결하기



주어진 쌍곡선의 두 초점 F′, F의 좌표는 F′$(-5,\ 0)$, F$(5,\ 0)$이다.

그림과 같이 삼각형 PF′F에 내접하는 원과 삼각형의 세 변의 접점을 각각 A, B, C라 하자.

$\overline{\mathrm{AF'}}=\overline{\mathrm{F'B}}=p$, $\overline{\mathrm{BF}}=\overline{\mathrm{FC}}=q$라 하면

$\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}=p-q=6$

$\overline{\mathrm{F'B}}+\overline{\mathrm{BF}}=p+q=10$

$p=8$이므로 점 B의 좌표는 $(3,\ 0)$이다.

삼각형 PF′F에 내접하는 원의 중심 Q의 좌표는 $(3,\ 3)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{OQ}}^2=18$

29. [출제의도] 평면벡터의 내적을 활용하여 삼각형의 넓이 추론하기

세 점 A, B, C는 원 위의 점이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$

$x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ 에서

$x^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+10x(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})+25|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$

$=9|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$

$x^2+10x(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})+25=9$ 이고

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{-x^2-16}{10x}=-\dfrac{1}{10}\left(x+\dfrac{16}{x}\right)$

$x>0$ 이므로

$x+\dfrac{16}{x}\ge 2\sqrt{x\times\dfrac{16}{x}}=8$

(등호는 $x=4$일 때 성립한다.)

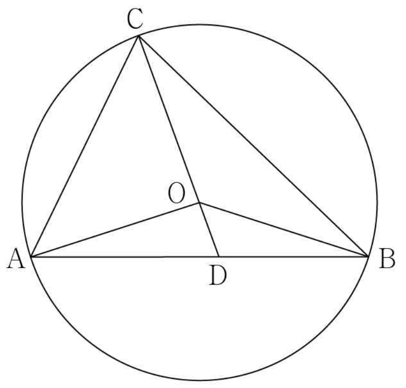
$-\dfrac{1}{10}\left(x+\dfrac{16}{x}\right)\le -\dfrac{4}{5}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$는 $x=4$일 때 최댓값 $-\dfrac{4}{5}$를 갖는다.

$x=4$일 때 주어진 식은

$4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}+3\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$

$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{9}$



선분 AB를 $5:4$로 내분하는 점을 D라 하면

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{4\overrightarrow{\mathrm{OA}}+5\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{9}$ 이다.

$\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ 에서 $\overline{\mathrm{CO}}:\overline{\mathrm{OD}}=3:1$ 이므로

$\overline{\mathrm{CD}}:\overline{\mathrm{OD}}=4:1$ ……㉠

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta$ 에서

$\cos\theta=-\dfrac{4}{5}$ 이므로 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$

삼각형 OAB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}\times\sin\theta=\dfrac{3}{10}$

㉠에 의하여 삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{6}{5}$

따라서 $50S=60$

30. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수 추론하기

$f(x)\ne 0$일 때

$g'(x)=\dfrac{\pi(\sin\pi x)f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$

$f(0)\ne 0$이면 $g'(0)=0$이 되어 조건 (가)에 모순이므로

$f(0)=0$ 이고 $g(0)=\dfrac{7}{128}\pi^2$

함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이므로

$\displaystyle\lim_{x\to 0}g(x)=\dfrac{7}{128}\pi^2$ ……㉠

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\pi x}{f(x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\pi x}{f(x)(1+\cos\pi x)}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\left\{\left(\dfrac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2\times\dfrac{(\pi x)^2}{f(x)}\times\dfrac{1}{1+\cos\pi x}\right\}$

$=\dfrac{7}{128}\pi^2$

이므로 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $h(x)$에 대하여 $f(x)=kx^2h(x)$ ……㉡

(k는 $k\ne 0$인 상수, $h(0)\ne 0$)이라 하자.

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 가지므로

$f'(a)=0$이다.

$f(a)=0$이라 가정하면 $f(x)=kx^2(x-a)^2$이고 $k>0$일 때 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극솟값을 가지므로 모순이고,

$k<0$일 때 $f(1)\le 0$이므로 $g(1)=\dfrac{2}{7}$라는 조건에 모순이다.

그러므로 $f(a)\ne 0$이다.

함수 $g(x)$가 $x=a$에서 극값을 가지므로

$g'(a)=\dfrac{\pi(\sin a\pi)f(a)}{\{f(a)\}^2}=0$

$\sin a\pi=0$이고

$\sin 2a\pi=0$, $\cos 2a\pi=1$ ……㉢

$f(2a)\ne 0$이면

$g'(x)=\dfrac{\pi(\sin\pi x)f(x)-(1-\cos\pi x)f'(x)}{\{f(x)\}^2}$ 에서

$g'(2a)=0$이 되어 조건 (가)에 모순이므로

$f(2a)=0$이다.

㉡에서 $f(x)=kx^2(x-2a)(x-b)$라 하면

$f'(a)=ka^2(b-2a)=0$이므로

$b=2a$이고 $f(x)=kx^2(x-2a)^2$

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이므로 $k>0$

㉠에서 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos\pi x}{kx^2(x-2a)^2}=\dfrac{7}{128}\pi^2$

$ka^2=\dfrac{16}{7}$ ……㉣

$g(1)=\dfrac{2}{7}$ 에서 $k(1-2a)^2=7$ ……㉤

㉣, ㉤에서 $\dfrac{7a^2}{16}=\dfrac{(1-2a)^2}{7}$ 이므로

$a=\dfrac{4}{15}$ 또는 $a=4$

㉢에 의하여 $a=4$이고 $k=\dfrac{1}{7}$이다.

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{7(1-\cos\pi x)}{x^2(x-8)^2} & (x\ne 0\ \text{이고}\ x\ne 8)\\[2mm] \dfrac{7}{128}\pi^2 & (x=0\ \text{또는}\ x=8)\end{cases}$$

$g(-1)=\dfrac{14}{81}$

따라서 $p+q=95$