# • 수학 영역 •

## 수학(가형) 정답

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ③ | 2 | ④ | 3 | ① | 4 | ⑤ | 5 | ② |
| 6 | ④ | 7 | ⑤ | 8 | ① | 9 | ② | 10 | ④ |
| 11 | ③ | 12 | ⑤ | 13 | ② | 14 | ④ | 15 | ⑤ |
| 16 | ① | 17 | ④ | 18 | ① | 19 | ② | 20 | ③ |
| 21 | ③ | 22 | 84 | 23 | 2 | 24 | 59 | 25 | 18 |
| 26 | 440 | 27 | 50 | 28 | 960 | 29 | 12 | 30 | 26 |

## 해 설

**1. [출제의도] 평면벡터의 실수배와 뺄셈을 계산한다.**

$2\vec{a}-\vec{b}=(2,\ 4)-(-2,\ 5)=(4,\ -1)$

벡터 $2\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은 $4+(-1)=3$

**2. [출제의도] 로그함수의 극한값을 계산한다.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+8x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+8x)}{8x}\times 4\right\}$$

$$=4\times\lim_{x\to 0}\ln(1+8x)^{\frac{1}{8x}}$$

$$=4\times\ln e=4$$

**3. [출제의도] 좌표공간에서 삼각형의 무게중심의 좌표를 계산한다.**

세 점 $\mathrm{A}(2,\ 6,\ -3)$, $\mathrm{B}(-5,\ 7,\ 4)$, $\mathrm{C}(3,\ -1,\ 5)$에서

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가

$$\left(\frac{2+(-5)+3}{3},\ \frac{6+7+(-1)}{3},\ \frac{(-3)+4+5}{3}\right)$$

즉 $(0,\ 4,\ 2)$

따라서 $a=4$, $b=2$이므로 $a+b=4+2=6$

**4. [출제의도] 확률의 곱셈정리를 이해한다.**

두 사건 $A$, $B$가 서로 독립이므로

두 사건 $A$, $B^C$도 서로 독립이다.

$\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{3}$,

$\mathrm{P}(A\cap B^C)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{12}$

$\frac{1}{3}\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{12}$, $\mathrm{P}(B^C)=\frac{1}{4}$이므로

$\mathrm{P}(B)=1-\mathrm{P}(B^C)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

**5. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해한다.**

직선 $y=\frac{1}{2}x$가 쌍곡선 $\frac{x^2}{k}-\frac{y^2}{64}=1$의 한 점근선이고,

점근선 중 기울기가 양수인 점근선의 방정식이

$y=\frac{8}{\sqrt{k}}x$이므로 $\frac{8}{\sqrt{k}}=\frac{1}{2}$, $\sqrt{k}=16$

따라서 쌍곡선의 주축의 길이는 $2\sqrt{k}=32$이다.

**6. [출제의도] 지수에 미지수가 포함된 방정식을 이해한다.**

$2^x=t\ (t>0)$이라 하면 방정식 $t^2-2kt+16=0$에서 근과 계수의 관계에 의하여 두 근의 곱은 양수이므로 방정식 $t^2-2kt+16=0$은 양수인 중근을 갖는다.

이 방정식의 판별식을 $D$라 하면

$\frac{D}{4}=(-k)^2-16$

$=k^2-16=(k-4)(k+4)=0$

두 근의 합이 양수이므로 $k=4$

$2^x=4=2^2$에서 $\alpha=2$이므로 $k+\alpha=6$

**7. [출제의도] 좌표평면에서 점의 운동을 이해한다.**

$x=2t+\sin t$, $y=1-\cos t$에서

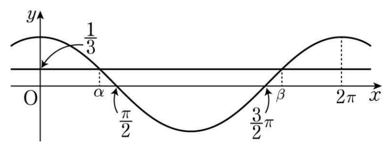
$\frac{dx}{dt}=2+\cos t$, $\frac{dy}{dt}=\sin t$

시각 $t=\frac{\pi}{3}$에서 속도 $\vec{v}$는 $\vec{v}=\left(\frac{5}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

따라서 시각 $t=\frac{\pi}{3}$ 에서 점 P의 속력 $|\vec{v}|$은

$|\vec{v}|=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25+3}{4}}=\sqrt{7}$

**8. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이해한다.**




$0<\alpha<\beta<2\pi$, $\cos\alpha=\cos\beta=\frac{1}{3}$ 이므로 그림에서

$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$

즉 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\sin\beta=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 이므로

$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$

$=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$

**9. [출제의도] 치환적분법을 이해하여 넓이를 구한다.**

모든 실수 $x$에 대하여 $f(x)>0$ 이므로 $f(2x+1)>0$

구하는 넓이는 $\int_1^2 f(2x+1)dx$

$2x+1=t$ 라 하면 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}$ 이고

$x=1$ 일 때 $t=3$, $x=2$ 일 때 $t=5$ 이므로

$\int_1^2 f(2x+1)dx=\int_3^5 \frac{f(t)}{2}dt$

$=\frac{1}{2}\int_3^5 f(t)dt=18$

**10. [출제의도] 독립시행의 확률을 이해한다.**

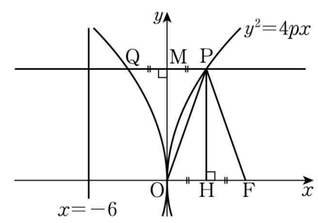
주사위를 던져서 나온 눈의 수와 앞면이 나온 동전의 개수가 모두 $n$ ($n=1, 2, 3, 4, 5, 6$)일 확률은

$\frac{1}{6}\times{}_6\mathrm{C}_n\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{6-n}=\frac{1}{6\times2^6}\times{}_6\mathrm{C}_n$

따라서 구하는 확률은

$\sum_{n=1}^{6}\left(\frac{1}{6\times2^6}\times{}_6\mathrm{C}_n\right)=\frac{1}{6\times2^6}\times(2^6-1)=\frac{21}{128}$

**11. [출제의도] 포물선의 성질을 이해한다.**




두 포물선 $y^2=4px$ 와 $y^2=-4px$ 는 $y$축에 대하여 대칭이므로 직선 QP와 $y$축이 만나는 점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{PM}}=3$ 이고, 점 P에서 $x$축에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{\mathrm{OH}}=\overline{\mathrm{PM}}=3$ 이므로 $p=6$

즉 포물선 $y^2=4px$ 의 준선의 방정식은 $x=-6$ 이다. 따라서 포물선의 정의에 의해

$\overline{\mathrm{PF}}=6+\overline{\mathrm{PM}}=6+3=9$

**12. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이해한다.**

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=2$ 에서

$x\to1$ 일 때 (분모)$\to0$ 이면 (분자)$\to0$ 이므로

$\lim_{x\to1}\{g(x)+1\}=g(1)+1=0$, $g(1)=-1$

$\lim_{x\to1}\frac{g(x)+1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=2$

$\lim_{x\to1}\frac{h(x)-2}{x-1}=12$ 에서

$x\to1$ 일 때 (분모)$\to0$ 이면 (분자)$\to0$ 이므로

$\lim_{x\to1}\{h(x)-2\}=h(1)-2=0$, $h(1)=2$

$\lim_{x\to1}\frac{h(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{h(x)-h(1)}{x-1}=h'(1)=12$

$h(x)=(f\circ g)(x)$에서 $x=1$ 일 때

$h(1)=f(g(1))=f(-1)=2$

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$에서 $x=1$ 일 때

$h'(1)=f'(g(1))g'(1)=f'(-1)\times2=12$

즉 $f'(-1)=6$

따라서 $f(-1)+f'(-1)=2+6=8$

**13. [출제의도] 표본평균의 분포를 이해한다.**

이 도시의 시민 한 명이 1년 동안 병원을 이용한 횟수를 확률변수 $X$라 하면, 확률변수 $X$는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 3.2^2)$을 따르므로 크기가 256인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 0.2^2)$을 따른다. 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-14}{0.2}$는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(13.7 \le \overline{X} \le 14.2) &= \mathrm{P}\left(\frac{13.7-14}{0.2} \le Z \le \frac{14.2-14}{0.2}\right)\\ &= \mathrm{P}(-1.5 \le Z \le 1) = \mathrm{P}(0 \le Z \le 1.5)+\mathrm{P}(0 \le Z \le 1)\\ &= 0.4332+0.3413=0.7745\end{aligned}$$

**14. [출제의도] 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결한다.**

두 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$와 $y=(\sqrt{2})^x+a$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이고, 직선 AB는 직선 $y=x$에 수직이므로 두 점 A, B는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(2t,\ t)$ $(t>0)$이라 하면 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(t,\ 2t)$이므로 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}t$이다.

선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\mathrm{M}\left(\frac{3}{2}t,\ \frac{3}{2}t\right)$

삼각형 OAB는 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$인 이등변삼각형이므로

삼각형 OAB의 넓이는

$$6=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}t\times\frac{3\sqrt{2}}{2}t=\frac{3}{2}t^2$$

이므로 $t=2$

즉 $\mathrm{A}(4,\ 2)$가 곡선 $y=\log_{\sqrt{2}}(x-a)$ 위의 점이므로

$2=\log_{\sqrt{2}}(4-a)$, $(\sqrt{2})^2=4-a$

따라서 구하는 상수 $a$의 값은 2이다.

**15. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 문제를 해결한다.**

모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_3=56$이다.

$a+b+c$가 짝수인 사건을 $A$, $a$가 홀수인 사건을 $B$라 하면 사건 $A$는 세 수 $a$, $b$, $c$가 모두 짝수이거나 하나만 짝수인 사건이다.

세 수 $a$, $b$, $c$가 모두 짝수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3=4$, 하나만 짝수인 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=24$이므로

$$\mathrm{P}(A)=\frac{4+24}{56}=\frac{1}{2}$$

사건 $A\cap B$는 $a+b+c$가 짝수이면서 $a$가 1, 3, 5 중 하나인 사건이다. $a=1$인 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=12$, $a=3$인 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1=6$, $a=5$인 경우의 수는 ${}_1\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=2$이므로 $\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{12+6+2}{56}=\dfrac{5}{14}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{5}{14}}{\frac{1}{2}}=\frac{5}{7}$$

**16. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 삼각함수의 극한값을 추론한다.**

$\overline{\mathrm{AB}}=2$이므로 직각삼각형 ABP에서 $\overline{\mathrm{BP}}=2\sin\theta$

두 선분 BP, BQ는 모두 원 $C_2$의 반지름이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{BQ}}=2\sin\theta$

$\overline{\mathrm{OB}}=1$이므로 피타고라스 정리에 의해

직각삼각형 OBQ에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\sqrt{1-4\sin^2\theta}$

즉 $S(\theta)=2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}$

따라서 구하는 극한값은

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin\theta\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\theta}=2$$

**17. [출제의도] 합성함수 미분법을 이용하여 함수를 추론한다.**

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로 $x=0$에서 연속이다. 조건 (가)에서

$$f(0)=\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(axe^{2x}+bx^2)=0$$

조건 (나)에서 임의의 $x_1$ $(x_1<0)$에 대하여

$$f'(x_1)=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=\lim_{x\to x_1}3=3$$

이므로 $x<0$일 때 $f'(x)=3$이고

$f(x)=\int 3dx=3x+C$ ($C$는 적분상수)

$\lim\limits_{x\to0-}f(x)=C=f(0)=0$이므로

$x<0$일 때 $f(x)=3x$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}&=\lim_{x\to0+}\frac{axe^{2x}+bx^2}{x}\\&=\lim_{x\to0+}(ae^{2x}+bx)=a\end{aligned}$$

$$\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0-} \frac{3x}{x} = 3$$

이므로 $a=3$이다.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3e}{2} + \frac{b}{4} = 2e$에서 $b=2e$이므로

$f(x) = \begin{cases} 3x & (x \le 0) \\ 3xe^{2x} + 2ex^2 & (x > 0) \end{cases}$이고

$f'(x) = \begin{cases} 3 & (x \le 0) \\ 3e^{2x} + 6xe^{2x} + 4ex & (x > 0) \end{cases}$

이므로 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 3e + 3e + 2e = 8e$

**18. [출제의도] 합의 법칙을 이용하여 경우의 수를 추론한다.**

(ⅰ) 1, 2가 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우

이 두 카드를 한 묶음으로 생각하여 나열하는 경우의 수는 $4!$이고, 두 카드의 자리를 바꾸는 경우의 수는 2이므로 1, 2가 적힌 두 카드가 이웃하도록 5장의 카드를 나열하는 경우의 수는

$4! \times 2 = \boxed{48}$이다.

(ⅱ) 1, 3이 적힌 두 카드가 서로 이웃하는 경우

(ⅰ)과 마찬가지로 경우의 수는 $\boxed{48}$이다.

(ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)가 동시에 일어나는 경우

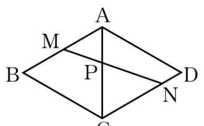
1, 2, 3이 적힌 세 카드를 한 묶음으로 생각하여 나열하는 경우의 수는 $3!$이고, 세 카드 중 1이 적힌 카드가 가운데에 위치하도록 세 카드를 나열하는 경우의 수는 2이므로 5장의 카드를 나열하는 경우의 수는 $3! \times 2 = \boxed{12}$이다.

5장의 카드를 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는 $5! = 120$이므로 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의해 구하는 경우의 수는 $120 - (48+48-12) = \boxed{36}$이다.

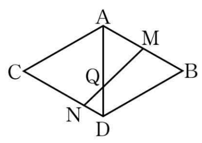
따라서 $p=48$, $q=12$, $r=36$이므로

$p+q+r = 48+12+36 = 96$

**19. [출제의도] 정사영의 성질을 이용하여 공간도형 문제를 해결한다.**



[그림 1]



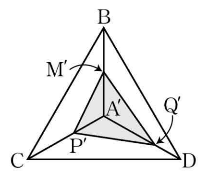
[그림 2]

[그림 1]과 같이 네 점 A, B, C, D가 한 평면에 있도록 전개하면 조건을 만족하는 점 P는 선분 AC와 선분 MN이 만나는 점이다.

사각형 ABCD는 평행사변형이므로 $\overline{AB} // \overline{CD}$이다.

따라서 삼각형 AMP와 삼각형 CNP는 닮음이고 $\overline{AM} = \frac{1}{2}$, $\overline{CN} = \frac{3}{4}$이므로 점 P는 선분 AC를 $2:3$으로 내분하는 점이다.

같은 방법으로 [그림 2]에서 점 Q는 선분 AD를 $2:1$로 내분하는 점임을 알 수 있다.




네 점 A, M, P, Q의 평면 BCD 위로의 정사영을 각각 A', M', P', Q'이라 하면 점 M'은 선분 A'B의 중점이고, 점 P'은 선분 A'C를 $2:3$으로 내분하는 점이고, 점 Q'은 선분 A'D를 $2:1$로 내분하는 점이다.

이때 점 A'은 정삼각형 BCD의 무게중심이므로

$\overline{A'B} = \overline{A'C} = \overline{A'D}$

$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{BC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

이고, $\overline{A'M'} = \frac{1}{2}\overline{A'B} = \frac{\sqrt{3}}{6}$,

$\overline{A'P'} = \frac{2}{5}\overline{A'C} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$, $\overline{A'Q'} = \frac{2}{3}\overline{A'D} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

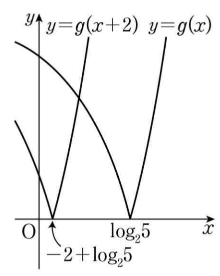
삼각형 M'P'Q'의 넓이 $S$는 세 삼각형

A'M'P', A'P'Q', A'Q'M'의 넓이의 합이므로

$$S = \frac{1}{2} \times \sin\frac{2}{3}\pi \times \left( \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{2\sqrt{3}}{15} + \frac{2\sqrt{3}}{15} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{15}$$

**20. [출제의도] 정적분으로 정의된 함수를 이용하여 최솟값에 대한 문제를 해결한다.**

$g(x) = |2^x - 5|$라 하면 함수 $y=g(x+2)$의 그래프와 함수 $y=g(x)$의 그래프의 교점의 $x$좌표는 그림과 같이 $-2+\log_2 5$보다 크고 $\log_2 5$보다 작다.



$f'(x)=g(x+2)-g(x)$ 이므로 $f'(x)=0$에서
$f'(x)=2^{x+2}-5-(-2^x+5)=0$, $5\times2^x=10$, $x=1$
$x<1$에서 $f'(x)<0$이고, $x>1$에서 $f'(x)>0$이므로
함수 $y=f(x)$는 $x=1$에서 극소이면서 최소이다.

$$\begin{aligned} f(1)&=\int_1^3|2^t-5|dt \\ &=\int_1^{\log_2 5}(-2^t+5)dt+\int_{\log_2 5}^3(2^t-5)dt \\ &=\left[-\frac{2^t}{\ln2}+5t\right]_1^{\log_2 5}+\left[\frac{2^t}{\ln2}-5t\right]_{\log_2 5}^3 \\ &=\left(-\frac{3}{\ln2}+5\log_2 5-5\right)+\left(\frac{3}{\ln2}+5\log_2 5-15\right)=10\log_2 5-20 \end{aligned}$$

따라서 $m=10\log_2 5-20=\log_2\left(\frac{5}{4}\right)^{10}$이므로

$2^m=2^{\log_2\left(\frac{5}{4}\right)^{10}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{10}$

**21. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 접선의 개수를 추론한다.**

점 $(a,0)$에서 그은 접선이 곡선 $y=(x-n)e^x$과 만나는 점의 좌표를 $(t,(t-n)e^t)$라 하자.
$y'=e^x+(x-n)e^x=(x-n+1)e^x$이므로 점 $(t,(t-n)e^t)$에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은
$y=(t-n+1)e^t(x-t)+(t-n)e^t$
이 직선이 점 $(a,0)$을 지나므로
$0=(t-n+1)e^t(a-t)+(t-n)e^t$
$t^2-(n+a)t+an+n-a=0$
이 방정식의 판별식을 $D$라 하면
$D=(n+a)^2-4(an+n-a)=(n-a)(n-a-4)$

ㄱ. $a=0$일 때 $n=4$이면 $D=0$이므로 점 $(0,0)$에서
곡선 $y=(x-4)e^x$에 그은 접선의 개수는 1이다.
따라서 $f(4)=1$ (참)

ㄴ. $D=(n-a)(n-a-4)=0$에서
$n=a$ 또는 $n=a+4$이므로
$f(n)=1$인 정수 $n$의 개수는 항상 2이다. (거짓)

ㄷ. 정수 $a$에 대하여 $f(n)$은

$$f(n)=\begin{cases}0 & (a<n<a+4)\\ 1 & (n=a \text{ 또는 } n=a+4)\\ 2 & (n<a \text{ 또는 } n>a+4)\end{cases}$$

이므로 $f(n)$이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이다. 이때 $\sum_{n=1}^{5}f(n)=5$이므로 가능한 경우는 다음과 같다.

( i ) $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=2$,
$f(5)=2$ 인 경우는 $3=a+4$, $a=-1$

( ii ) $f(1)=2$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=0$,
$f(5)=0$ 인 경우는 $3=a$, $a=3$

따라서 $a=-1$ 또는 $a=3$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

**22. [출제의도] 중복조합을 계산한다.**

${}_7\mathrm{H}_3={}_{7+3-1}\mathrm{C}_3={}_9\mathrm{C}_3=84$

**23. [출제의도] 삼각함수에서 미분계수를 계산한다.**

$f(x)=\sin x-\sqrt{3}\cos x$에서
$f'(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$이므로

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{3}\right)&=\cos\frac{\pi}{3}+\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} \\ &=\frac{1}{2}+\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2 \end{aligned}$$

**24. [출제의도] 이항분포를 따르는 확률변수의 평균과 분산을 이해한다.**

확률변수 $X$가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\frac{1}{3}\right)$을 따르므로
$\mathrm{V}(X)=n\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2n}{9}$이고 $\mathrm{V}(2X-1)=80$이므로
$\mathrm{V}(2X-1)=4\times\frac{2n}{9}=80$, 즉 $n=90$

$$\begin{aligned} \text{따라서 } \mathrm{E}(2X-1)&=2\mathrm{E}(X)-1 \\ &=2\times90\times\frac{1}{3}-1=59 \end{aligned}$$

**25. [출제의도] 타원의 접선의 방정식을 이해한다.**

접점의 좌표를 $(x_1,y_1)$이라 하면 접점은 타원 위의 점이므로 $\frac{x_1^2}{12}+\frac{y_1^2}{16}=1$ …… ㉠
접점 $(x_1,y_1)$에서의 접선의 방정식은

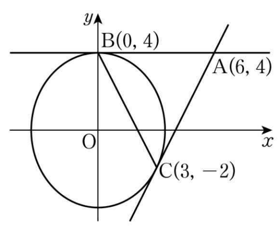
$\frac{x_1 x}{12}+\frac{y_1 y}{16}=1$

이 접선이 점 $(6, 4)$를 지나므로 $\frac{x_1}{2}+\frac{y_1}{4}=1$에서

$y_1=4-2x_1$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $x_1^2-3x_1=0$, $x_1=0$ 또는 $x_1=3$

이때 두 접점 $(0, 4)$, $(3, -2)$를 각각 B, C라 하자.




$\overline{AB}=6-0=6$이고, 직선 AB는 $x$축에 평행하므로 점 C와 직선 AB사이의 거리는 $4-(-2)=6$이다.

따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 6\times 6=18$

**26. [출제의도] 모비율의 신뢰구간을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.**

$n$명 중 이 영화를 재관람한 사람의 표본비율을 $\hat{p}$이라 하면 모비율 $p$에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $0.0706\le p\le 0.1294$이므로

$\hat{p}-1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}}=0.0706$ …… ㉠

$\hat{p}+1.96\times\sqrt{\frac{\hat{p}\times(1-\hat{p})}{n}}=0.1294$ …… ㉡

㉠과 ㉡을 더하면

$2\hat{p}=0.0706+0.1294=0.2$이므로

$\hat{p}=0.1$을 ㉠에 대입하면

$0.1-1.96\times\sqrt{\frac{0.1\times 0.9}{n}}=0.0706$, $\sqrt{n}=20$

$n=400$이고, $\hat{p}=\frac{m}{n}=0.1$이므로 $m=40$

따라서 $m+n=440$

**27. [출제의도] 원의 접선을 이용하여 평면벡터의 내적에 대한 문제를 해결한다.**

선분 AB의 중점을 O라 하면 점 Q가 선분 AB를 $5:1$로 외분하는 점이고, $\overline{BQ}=\sqrt{3}$이므로

$\overline{AO}=\overline{OB}=\overline{OP}=2\sqrt{3}$

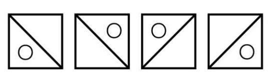
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}&=\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}\right)\cdot\overrightarrow{AQ}\\&=\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{OP}\cdot\left(\frac{5}{3}\overrightarrow{OQ}\right)\\&=\left|\overrightarrow{AO}\right|\times\left|\overrightarrow{AQ}\right|+\frac{5}{3}\times\left|\overrightarrow{OP}\right|^2=2\sqrt{3}\times 5\sqrt{3}+\frac{5}{3}\times\left(2\sqrt{3}\right)^2=50\end{aligned}$$

**28. [출제의도] 곱의 법칙을 이용하여 경우의 수에 대한 문제를 해결한다.**

◇가 그려진 조각으로 채울 정사각형을 택하는 경우의 수는 ${}_4C_1=4$이고,

이 각각에 대하여 ○가 그려진 조각으로 채울 정사각형을 택하는 경우의 수는 ${}_3C_1=3$

택한 정사각형에 ○가 그려진 조각을 채우는 경우는 다음의 4가지이다.



따라서 ◇가 그려진 조각과 ○가 그려진 조각으로 정사각형을 채우는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4\times 3\times 4=48$ …… ㉠

(ⅰ) ☆가 그려진 조각으로, ○가 그려진 조각이

채워져 있는 정사각형을 채우는 경우

◎가 그려진 네 개의 조각으로 도형의 남아 있는 부분을 채우는 경우의 수는

2개의 정사각형 각각에서 2개의 방법이 있으므로

$2\times 2=4$

(ⅱ) ☆가 그려진 조각으로, ○가 그려진 조각이

채워져 있지 않은 정사각형을 채우는 경우

☆가 그려진 조각이 채울 정사각형을 택하는 경우의 수는 2,

택한 정사각형에 ☆가 그려진 조각을 채우는 경우의 수는 4,

◎가 그려진 네 개의 조각으로 도형의 남아 있는 부분을 채우는 경우의 수는 2이므로

$2\times 4\times 2=16$

따라서 ☆가 그려진 조각과 ◎가 그려진 조각으로 정사각형을 채우는 경우의 수는 $4+16=20$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$48\times 20=960$

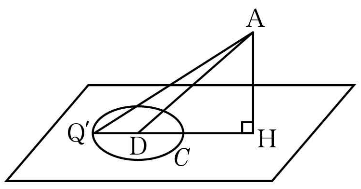
**29. [출제의도] 공간벡터의 성분과 내적을 이용하여 벡터의 크기에 대한 문제를 해결한다.**

점 P는 점 A가 중심이고 반지름의 길이가 2인 구 위의 임의의 점이므로

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{PQ}\right|&=\left|\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}\right|\\&\le\left|\overrightarrow{PA}\right|+\left|\overrightarrow{AQ}\right|=2+\left|\overrightarrow{AQ}\right|\end{aligned}$$

따라서 $\left|\overrightarrow{AQ}\right|$가 최대일 때 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|$도 최대가 되므로

$\overrightarrow{PA}$와 $\overrightarrow{AQ}$는 평행하다.
점 Q의 좌표를 $(x, y, z)$라 하면 원점 O에 대하여
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (1,\ \sqrt{3},\ 0)$
$\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OC} = (x-3,\ y,\ z)$ 이므로
$|\overrightarrow{CQ}|^2 = (x-3)^2 + y^2 + z^2 = 12$
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CQ} = (1,\ \sqrt{3},\ 0) \cdot (x-3,\ y,\ z)$
$= (x-3) + \sqrt{3}y + 0 = 6$
따라서 점 Q는 구 $(x-3)^2 + y^2 + z^2 = 12$와
평면 $x + \sqrt{3}y - 9 = 0$이 만나서 생기는 원 위의 점이다. 이 원을 $C$, 원 $C$의 중심을 D라 하자.
두 벡터 $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CQ}$가 이루는 각의 크기를 $\theta$라 하면
$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CQ} = |\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CQ}|\cos\theta$에서
$6 = 2 \times 2\sqrt{3} \times \cos\theta$
이므로 $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 이고 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 이다.
$\overrightarrow{CD}$는 평면 $x + \sqrt{3}y - 9 = 0$의 법선벡터 $\overrightarrow{BC}$와 평행하고 $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CQ}|\cos\theta = 2\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3$이므로
$\overrightarrow{CD} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$,
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \left(\dfrac{9}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$
점 A에서 평면 $x + \sqrt{3}y - 9 = 0$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $|\overrightarrow{AH}| = \dfrac{|-1+0-9|}{\sqrt{1+3}} = 5$이고,
$|\overrightarrow{AQ}|^2 = |\overrightarrow{AH}|^2 + |\overrightarrow{HQ}|^2 = 25 + |\overrightarrow{HQ}|^2$ 이므로
$|\overrightarrow{HQ}|$가 최대일 때 $|\overrightarrow{AQ}|$도 최대가 된다.
$|\overrightarrow{HQ}|$가 최대인 경우는 직선 HQ가 원 $C$의 중심 D를 지날 때이고 이때 점 Q의 위치를 Q′이라 하면
$|\overrightarrow{HQ'}| = |\overrightarrow{HD}| + |\overrightarrow{DQ'}|$




$\overrightarrow{AD} = \left(\dfrac{11}{2},\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ -6\right)$에서
$|\overrightarrow{HD}| = \sqrt{|\overrightarrow{AD}|^2 - |\overrightarrow{AH}|^2} = \sqrt{73-25} = 4\sqrt{3}$이고,
$|\overrightarrow{DQ'}|$은 원 $C$의 반지름의 길이 $\sqrt{3}$과 같으므로
$|\overrightarrow{HQ'}| = |\overrightarrow{HD}| + |\overrightarrow{DQ'}| = 4\sqrt{3} + \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$
$|\overrightarrow{AQ'}|^2 = |\overrightarrow{AH}|^2 + |\overrightarrow{HQ'}|^2 = 25 + 75 = 100$
따라서 $|\overrightarrow{AQ}|$의 최댓값은 10이고,
$|\overrightarrow{PQ}|$의 최댓값은 12이다.

**30. [출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분에 대한 문제를 해결한다.**

(나)에서 $x=0$일 때 $g(1)=0$
$g(x+1) = \displaystyle\int_0^x \{f(t+1)e^t - f(t)e^t + g(t)\}dt$의 양변을
$x$에 대하여 미분하여 정리하면
$f(x+1) - f(x) = \{g'(x+1) - g(x)\}e^{-x}$
임의의 실수 $t$에 대하여
$\displaystyle\int_0^t \{f(x+1) - f(x)\}dx = \int_0^t \{g'(x+1) - g(x)\}e^{-x}dx$
(좌변) $= \displaystyle\int_0^t f(x+1)dx - \int_0^t f(x)dx$
$= \displaystyle\int_1^{t+1} f(x)dx - \int_0^t f(x)dx = \int_t^{t+1} f(x)dx - \int_0^1 f(x)dx$ …… ㉠
(우변) $= \displaystyle\int_0^t \{g'(x+1) - g(x)\}e^{-x}dx$
$= \displaystyle\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx - \int_0^t g(x)e^{-x}dx$
$\displaystyle\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx$에서
$\displaystyle\int_0^t g'(x+1)e^{-x}dx = \Big[g(x+1)e^{-x}\Big]_0^t + \int_0^t g(x+1)e^{-x}dx$
(우변) $= \Big[g(x+1)e^{-x}\Big]_0^t + \displaystyle\int_0^t \{g(x+1) - g(x)\}e^{-x}dx$
$= g(t+1)e^{-t} - g(1) - \displaystyle\int_0^t \pi(e+1)\sin(\pi x)dx$
$= g(t+1)e^{-t} + \Big[(e+1)\cos(\pi x)\Big]_0^t$
$= g(t+1)e^{-t} + (e+1)\cos(\pi t) - (e+1)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$$\int_t^{t+1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + g(t+1)e^{-t} + (e+1)\cos(\pi t) - (e+1)$$

$g(x+1) = g(x) - \pi(e+1)\sin(\pi x)e^x$ 에서

$g(0) = g(1) = g(2) = \cdots = g(9) = 0$

$$\int_1^{10} f(x)dx = \sum_{n=1}^{9} \int_n^{n+1} f(x)dx$$

$$= \sum_{n=1}^{9} \left\{ \int_0^1 f(x)dx + g(n+1)e^{-n} + (e+1)\cos(\pi n) - (e+1) \right\}$$

$$= 9\int_0^1 f(x)dx + 0 + (e+1)\sum_{n=1}^{9} \{\cos(\pi n) - 1\}$$

$$= 9\left(\frac{10}{9}e + 4\right) + (e+1) \times (-10) = 26$$