2023학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 22.9.2(금)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01.④	02.①	03.②	04.①	05.③
06.⑤	07.⑤	08.①	09.③	10.④
11.②	12.②	13.⑤	14.⑤	15.③
16. 7	17. 16	18. 13	19. 4	
20. 80	21. 220	22. 58		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{2^{\sqrt{3}}}{2}\right)^{\sqrt{3}+1}=\left(2^{\sqrt{3}-1}\right)^{\sqrt{3}+1}$$

$$=2^{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$

$$=2^{3-1}=2^2=4$$

정답 ④

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2+5$에서

$f'(x)=4x$

이므로

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$$

$$=4\times 2=8$$

정답 ①

3. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 탄젠트 함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$$

이므로

$$\sin\theta=\frac{5}{13}$$

이때

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

$$=1-\left(\frac{5}{13}\right)^2$$

$$=1-\frac{25}{169}$$

$$=\frac{144}{169}$$

$$=\left(\frac{12}{13}\right)^2$$

이고, 주어진 조건에 의하여 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\frac{12}{13}$$

따라서

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}$$

$$=-\frac{5}{12}$$

정답 ②

4. 출제의도 : 함수가 연속이 되도록 하는 모든 상수의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉,

$f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$

가 성립해야 한다.

$f(a)=-2a+a=-a$,

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(-2x+a)$

$=-2a+a=-a$,

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(ax-6)=a^2-6$

이므로 $f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$에서

$-a=a^2-6$,

$a^2+a-6=(a+3)(a-2)=0$

$a=-3$ 또는 $a=2$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$(-3)+2=-1$

정답 ①

5. **출제의도** : 등차수열의 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=2a_5=2(a_1+4d)$

$a_1+8d=0\cdots$㉠

$a_8+a_{12}=(a_1+7d)+(a_1+11d)$

$=2a_1+18d=-6$

$a_1+9d=-3\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $a_1=24$, $d=-3$ 이므로

$a_2=a_1+d=21$

정답 ③

6. **출제의도** : 도함수를 활용하여 다항함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x^2+k$에서

$f'(x)=3x^2-6x$

$=3x(x-2)$

이므로 $f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

주어진 조건에 의하여 함수 $f(x)$의 극댓값이 9이므로

$f(0)=k=9$

따라서

$f(x)=x^3-3x^2+9$

이고 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(2)$이므로

구하는 극솟값은

$f(2)=2^3-3\times2^2+9=5$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$S_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}S_k=\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right)$

$=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}$

한편,

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = S_{10} = \frac{1}{10\times 11} = \frac{1}{110}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k) = \sum_{k=1}^{10} S_k - \sum_{k=1}^{10} a_k$$

$$= \frac{10}{11} - \frac{1}{110} = \frac{99}{110} = \frac{9}{10}$$

정답 ⑤

[다른 풀이]

$k=1$**이면** $S_k - a_k = S_1 - a_1 = 0$

$k \geq 2$**이면** $S_k - a_k = S_{k-1} = \frac{1}{(k-1)k}$

이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(S_k - a_k) = (S_1 - a_1) + \sum_{k=2}^{10}(S_k - a_k)$$

$$= 0 + \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{(k-1)k}$$

$$= \sum_{k=2}^{10}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$

$$+ \cdots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

8. **출제의도** : 두 곡선에 동시에 접하는 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y = x^3 - 4x + 5$에서

$y' = 3x^2 - 4$

이므로 점 $(1,2)$에서의 접선의 방정식은

$y - 2 = -(x-1)$

$y = -x + 3 \cdots$㉠

또한, $y = x^4 + 3x + a$ 에서

$y' = 4x^3 + 3$

이고 곡선 $y = x^4 + 3x + a$와 직선 ㉠이 접하므로 접점의 x좌표는

$4x^3 + 3 = -1$, $x^3 = -1$

$x = -1$

따라서 접점의 좌표는 $(-1,4)$ 이고 이 점은 곡선 $y = x^4 + 3x + a$ 위의 점이므로

$4 = 1 - 3 + a$

$a = 6$

정답 ①

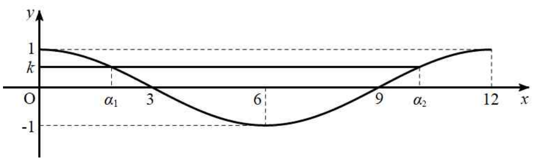
9. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = f(x)$의 주기는

$$\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$$

이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



위 그림과 같이 일반성을 잃지 않고

$\alpha_1 < \alpha_2$

라 하면

$\alpha_1 + \alpha_2 = 12$

주어진 조건에 의하여

$\alpha_2 - \alpha_1 = 8$

이므로

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 10$

그러므로

$k=\cos\left(\dfrac{\pi\times 2}{6}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$

한편,

$-3\cos\dfrac{\pi x}{6}-1=\dfrac{1}{2}$

에서

$\cos\dfrac{\pi x}{6}=-\dfrac{1}{2}$

$0\le x\le 12$에서 $0\le\dfrac{\pi x}{6}\le 2\pi$이므로

$\dfrac{\pi x}{6}=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $\dfrac{\pi x}{6}=\dfrac{4}{3}\pi$

즉, $x=4$ 또는 $x=8$

따라서

$|\beta_1-\beta_2|=|4-8|=4$

정답 ③

10. **출제의도** : 정적분을 이용하여 두 점 사이의 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$t=2$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2(3t^2+at)dt$$
$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^2$$
$$=8+2a$$

점 $\mathrm{P}(8+2a)$와 점 $\mathrm{A}(6)$ 사이의 거리가 10이려면 $|(8+2a)-6|=10$, 즉

$2a+2=\pm 10$

이어야 하므로 양수 a의 값은

$2a+2=10$에서

$a=4$

정답 ④

11. **출제의도** : 실수인 거듭제곱근을 이해하고 조건을 만족시키는 $f(n)$의 값을 지수법칙을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{3}^{f(n)}$의 네제곱근 중 실수인 것은

$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}$, $-\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}$

이므로

$\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}\times\left(-\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(n)}}\right)$

$=-\sqrt{3}^{\frac{1}{4}f(n)}\times\sqrt{3}^{\frac{1}{4}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{8}f(n)}\times 3^{\frac{1}{8}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{8}f(n)+\frac{1}{8}f(n)}$

$=-3^{\frac{1}{4}f(n)}=-9$

따라서,

$3^{\frac{1}{4}f(n)}=3^2$

이므로

$\dfrac{1}{4}f(n)=2$, $f(n)=8\cdots$㉠

이때, 이차함수 $f(x)=-(x-2)^2+k$의 그래프의 대칭축은 $x=2$이므로 ㉠을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2이기 위해서는 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(1,8)$을 지나야 한다.

$f(1)=-1+k=8$

$k=9$

정답 ②

12. **출제의도** : 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 주어진 선분의 길이를 t에 대한 식으로 나타낸 후, 함수의 극한에 대한 기본 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A, B의 좌표를 각각

$A(a,\ a^2)$, $B(b,\ b^2)$

이라 하면 x에 대한 이차방정식

$x^2-x-t=0$

의 두 근이 a, b이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$a+b=1$, $ab=-t$

그러므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AH}}&=a-b\\&=\sqrt{(a-b)^2}\\&=\sqrt{(a+b)^2-4ab}\\&=\sqrt{1+4t}\end{aligned}$$

또, 점 C의 좌표가 $C(-a,\ a^2)$이므로

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CH}}&=b-(-a)\\&=b+a=1\end{aligned}$$

따라서

$$\lim_{t\to0+}\frac{\overline{\mathrm{AH}}-\overline{\mathrm{CH}}}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+4t}-1}{t}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(\sqrt{1+4t}-1)(\sqrt{1+4t}+1)}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{(1+4t)-1}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4t}{t(\sqrt{1+4t}+1)}$$

$$=\lim_{t\to0+}\frac{4}{\sqrt{1+4t}+1}$$

$$=\frac{4}{1+1}=2$$

정답 ②

13. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 두 선분의 길이의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 CDE에서 $\angle\mathrm{CED}=\frac{\pi}{4}$이므로

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CD}}^2&=\overline{\mathrm{CE}}^2+\overline{\mathrm{ED}}^2-2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{ED}}\times\cos\frac{\pi}{4}\\&=4^2+(3\sqrt{2})^2-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\\&=10\end{aligned}$$

이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$

$\angle\mathrm{CDE}=\theta$라 하면 삼각형 CDE에서

코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{\overline{\mathrm{ED}}^2+\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{CE}}^2}{2\times\overline{\mathrm{ED}}\times\overline{\mathrm{CD}}}\\&=\frac{(3\sqrt{2})^2+(\sqrt{10})^2-4^2}{2\times3\sqrt{2}\times\sqrt{10}}\\&=\frac{1}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

이므로

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{5}}\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AC}}=x$, $\overline{\mathrm{AE}}=y$라 하면 삼각형 ACE에서

코사인법칙에 의하여

$x^2=y^2+4^2-2\times y\times4\times\cos\frac{3}{4}\pi$,

$x^2=y^2+16-2\times y\times4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$x^2=y^2+4\sqrt{2}y+16$ ⋯ ㉠

한편, 삼각형 ACD의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 사인법칙에 의하여

$\frac{x}{\sin\theta}=2R$, 즉 $\frac{x}{\frac{2}{\sqrt{5}}}=2R$

에서

$$2R=\frac{\sqrt{5}}{2}x$$

삼각형 ABC는 직각삼각형이므로

$\angle\mathrm{CAB}=\alpha$라 하면

$$\cos\alpha=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}=\frac{x}{\frac{\sqrt{5}}{2}x}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

이등변삼각형 AOC에서

$\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{CAO}=\alpha$

이므로 삼각형 ACE에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{x}{\sin\frac{3}{4}\pi}=\frac{y}{\sin\alpha},\ \text{즉}\ \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{y}{\frac{\sqrt{5}}{5}}\text{에서}$$

$\sqrt{2}x=\sqrt{5}y$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$$\frac{5}{2}y^2=y^2+4\sqrt{2}y+16,$$

$$\frac{3}{2}y^2-4\sqrt{2}y-16=0,$$

$$3y^2-8\sqrt{2}y-32=0$$

$(3y+4\sqrt{2})(y-4\sqrt{2})=0$에서

$y=4\sqrt{2}$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=x=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times4\sqrt{2}=4\sqrt{5}$$

따라서

$\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}}=4\sqrt{5}\times\sqrt{10}=20\sqrt{2}$

정답 ⑤

[다른 풀이]

삼각형 CED에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{CD}}^2=\overline{\mathrm{CE}}^2+\overline{\mathrm{DE}}^2-2\times\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{DE}}\times\cos\frac{\pi}{4}$$

$$=16+18-2\times4\times3\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=34-24=10$$

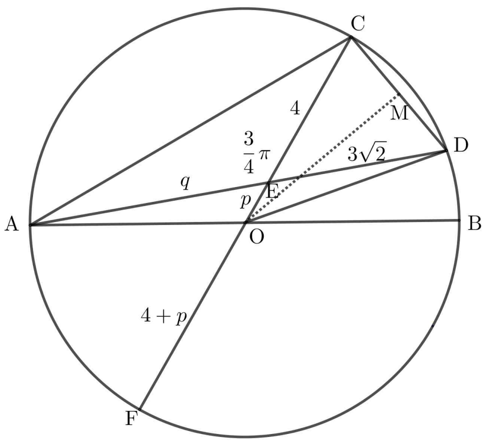
이므로

$$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{10}$$

직선 OC가 원과 만나는 점 중 C가 아닌 점을 F라 하고, $\overline{\mathrm{OE}}=p$, $\overline{\mathrm{AE}}=q$라 하면

$\overline{\mathrm{EF}}=\overline{\mathrm{EO}}+\overline{\mathrm{OF}}=\overline{\mathrm{EO}}+\overline{\mathrm{OC}}$

$=p+(p+4)=2(p+2)$



따라서 원의 성질에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}}\times\overline{\mathrm{FE}}=\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{DE}}$

이므로

$4\times2(p+2)=q\times3\sqrt{2}$ ⋯ ㉠

한편,

$\angle\mathrm{CAD}$는 호 CD의 원주각이고, $\angle\mathrm{COD}$는 호 CD의 중심각이므로 $\angle\mathrm{CAD}=\theta$라 하면

$\angle\mathrm{COD}=2\times\angle\mathrm{CAD}=2\theta$

$\overline{\mathrm{CO}}=\overline{\mathrm{DO}}$이므로 선분 CD의 중점을 M이

라 하면

$$\angle \mathrm{COM} = \frac{1}{2}\times\angle \mathrm{COD} = \frac{1}{2}\times 2\theta=\theta$$

직각삼각형 OMC에서

$$\sin\theta = \frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{OC}}} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{2}}{p+4} = \frac{\sqrt{10}}{2(p+4)}$$

따라서 삼각형 AEC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CE}}}{\sin\theta} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\frac{3}{4}\pi},\ 즉$$

$$\frac{4}{\frac{\sqrt{10}}{2(p+4)}} = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}} = \frac{8(p+4)}{\sqrt{10}}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4(p+4)}{\sqrt{5}} \quad \cdots ㉡$$

삼각형 AEC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AE}}^2+\overline{\mathrm{CE}}^2 - 2\times\overline{\mathrm{AE}}\times\overline{\mathrm{CE}}\times\cos\frac{3}{4}\pi$$

$$= q^2+16-2\times q\times 4\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$= q^2+4\sqrt{2}q+16 \quad \cdots ㉢$$

㉡, ㉢에서

$$\left\{\frac{4(p+4)}{\sqrt{5}}\right\}^2 = q^2+4\sqrt{2}q+16$$

이때 ㉠에서

$$4(p+2) = \frac{3\sqrt{2}}{2}q$$

이므로

$$\left(\frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}q+8}{\sqrt{5}}\right)^2 = q^2+4\sqrt{2}q+16,$$

$$\frac{9}{2}q^2+24\sqrt{2}q+64 = 5(q^2+4\sqrt{2}q+16),$$

$$9q^2+48\sqrt{2}q+128 = 10q^2+40\sqrt{2}q+160,$$

$$q^2-8\sqrt{2}q+32=0,$$

$$(q-4\sqrt{2})^2=0$$

$$q=4\sqrt{2}$$

그러므로 ㉢에서

$$\overline{\mathrm{AC}}^2 = 32+32+16=80$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

따라서

$$\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{CD}} = 4\sqrt{5}\times\sqrt{10} = 20\sqrt{2}$$

14. **출제의도** : 함수의 그래프를 이해하고 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$를

$f(x)=x(x-1)(x-a)$ (a는 상수)$\cdots$㉠

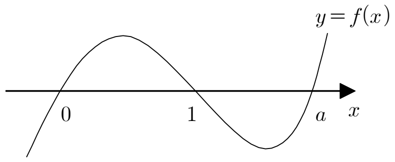
라 하자.

ㄱ. $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx=0$

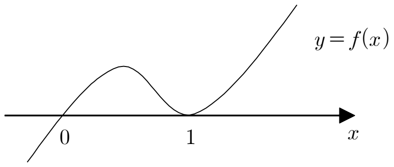
$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 |f(x)|dx$$

따라서 $0\le x\le 1$일 때 $f(x)\ge 0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.

(i) $a>1$일 때



(ii) $a=1$일 때



(i), (ii)에 의하여

$$\int_{-1}^{0} f(x)dx < 0$$

이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx < 0$$

이다. (참)

ㄴ. $g(-1) > 0$이면 $0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$ 이므로

$$g(-1) = \int_{-1}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$
$$= \int_{-1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} f(x)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x(x-1)(x-a)dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\}dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} \{-(a+1)x^2\}dx$$
$$= 2\left[-\frac{a+1}{3}x^3\right]_0^1$$
$$= -\frac{2(a+1)}{3} > 0$$

즉, $a < -1$ 이므로 $f(k) = 0$을 만족시키는 $k < -1$인 실수 k가 존재한다. (참)

ㄷ. $g(-1) = -\frac{2(a+1)}{3} > 1$ 에서

$$a < -\frac{5}{2}$$

$0 \le x \le 1$일 때 $f(x) \le 0$ 이므로

$$g(0) = \int_{0}^{1} f(x)dx - \int_{0}^{1} |f(x)|dx$$
$$= \int_{0}^{1} f(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} f(x)dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} \{x^3 - (a+1)x^2 + ax\}dx$$
$$= 2\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{a+1}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2\right]_0^1$$
$$= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{a+1}{3} + \frac{a}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{3}a - \frac{1}{6} < -1 \quad \text{(참)}$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

정답 ⑤

15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항과 조건을 만족시키는 항의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 의하여 $a_4 = r$, $a_8 = r^2$

조건 (나)에 의하여

$a_4 = r$이고 $0 < |r| < 1$에서 $|a_4| < 5$이므로

$a_5 = r + 3$

$|a_5| < 5$이므로

$a_6 = a_5 + 3 = r + 6$

$|a_6| \ge 5$이므로

$a_7 = -\frac{1}{2}a_6 = -\frac{r}{2} - 3$

$|a_7| < 5$이므로

$a_8 = a_7 + 3 = -\frac{r}{2}$

그러므로

$r^2 = -\frac{r}{2}$

$r \neq 0$이므로 $r=-\frac{1}{2}$

즉, $a_4=-\frac{1}{2}$

이때 $|a_3|<5$이면 $a_3=-\frac{1}{2}-3=-\frac{7}{2}$이고 이것은 조건을 만족시키며, $|a_3| \geq 5$이면 $a_3=-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=1$인데 이것은 조건을 만족시키지 않으므로

$a_3=-\frac{7}{2}$

또, $|a_2|<5$이면 $a_2=-\frac{7}{2}-3=-\frac{13}{2}$인데 이것은 조건을 만족시키지 않고, $|a_2| \geq 5$이면 $a_2=-2\times\left(-\frac{7}{2}\right)=7$이고 이것은 조건을 만족시키므로

$a_2=7$

또, $|a_1|<5$이면 $a_1=7-3=4$이고, $|a_1| \geq 5$이면 $a_1=-2\times 7=-14$인데 조건 (나)에 의하여 $a_1<0$이므로

$a_1=-14$

따라서

$a_1=-14$, $a_2=7$, $a_3=-\frac{7}{2}$, $a_4=-\frac{1}{2}$,

$a_5=-\frac{1}{2}+3$, $a_6=-\frac{1}{2}+6$, $a_7=\frac{1}{4}-3$, $a_8=\frac{1}{4}$,

$a_9=\frac{1}{4}+3$, $a_{10}=\frac{1}{4}+6$, $a_{11}=-\frac{1}{8}-3$, $a_{12}=-\frac{1}{8}$,

…

이와 같은 과정을 계속하면

$|a_1| \geq 5$이고, 자연수 k에 대하여 $|a_{4k-2}| \geq 5$임을 알 수 있다.

그러므로 $|a_m| \geq 5$를 만족시키는 100이하의 자연수 m은

1, 2, 6, 10, …, 98

이고, $2=4\times1-2$, $98=4\times25-2$이므로

$p=1+25=26$

따라서

$p+a_1=26+(-14)=12$

정답 ③

16. **출제의도** : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

진수 조건에서

$x-4>0$이고 $x+2>0$이어야 하므로

$x>4$ … ㉠

$\log_3(x-4)=\log_{3^2}(x-4)^2=\log_9(x-4)^2$

이므로 주어진 방정식은

$\log_9(x-4)^2=\log_9(x+2)$,

$(x-4)^2=x+2$,

$x^2-8x+16=x+2$,

$x^2-9x+14=(x-2)(x-7)=0$

따라서 $x=2$ 또는 $x=7$

㉠에서 구하는 실수 x의 값은 7이다.

정답 7

17. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\int(6x^2-4x+3)dx$$
$$=2x^3-2x^2+3x+C$$

(단, C는 적분상수)

이므로

$f(1)=2-2+3+C=3+C=5$

에서

$C=2$

따라서

$f(2)=16-8+6+2=16$

정답 16

18. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = c\sum_{k=1}^{5} a_k$$
$$= c\times 10 = 10c$$

이고

$$\sum_{k=1}^{5} c = 5c$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{5} ca_k = 65 + \sum_{k=1}^{5} c$$

에서

$10c = 65 + 5c$

$5c = 65$

따라서

$c = 13$

정답 13

19. **출제의도** : 사차방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$이라 하면

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$= 12x(x^2 - x - 2)$

$= 12x(x+1)(x-2)$

이므로 $f'(x) = 0$에서

$x = 0$ 또는 $x = -1$ 또는 $x = 2$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	극소	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

따라서 사차함수 $f(x)$는

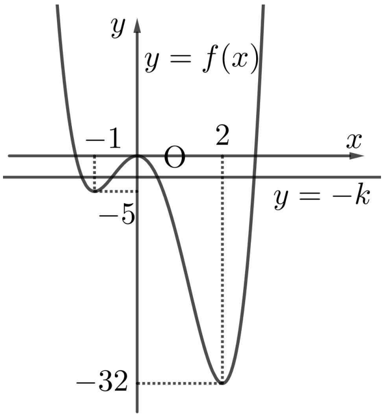
$x = 0$에서 극댓값 $f(0) = 0$을 갖고,

$x = -1$, $x = 2$에서 각각 극솟값

$f(-1) = 3 + 4 - 12 = -5$,

$f(2) = 48 - 32 - 48 = -32$

를 갖는다.



주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = -k$의 교점의 개수와 같으므로 주어진 방정식이 서로 다른 네 실근을 가질 조건은 위의 그래프에서

$-5 < -k < 0$, 즉 $0 < k < 5$

이어야 한다.

따라서 구하는 자연수 k의 개수는 4이다.

정답 4

20. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+x^2-x$ 에서

$f'(x)=3x^2+2x-1$

$\quad=(3x-1)(x+1)$

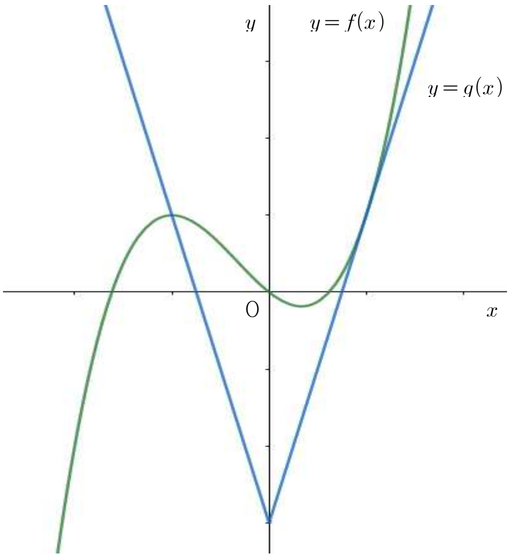
이므로 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=\dfrac{1}{3}$

이때 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값이 $f(-1)=1$, $x=\dfrac{1}{3}$에서 극솟값이 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{5}{27}$ 이므로 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$의 그래프가 만나는 점의 개수가 2이기 위해서는 그림과 같이 $x>0$인 부분에서 두 함수 $f(x)=x^3+x^2-x$, $g(x)=4|x|+k$의 그래프가 접해야 한다.



$x>0$일 때 $g(x)=4x+k$이므로

$f'(x)=3x^2+2x-1=4$

에서

$3x^2+2x-5=0$, $(3x+5)(x-1)=0$

즉, $x=1$ 이므로 접점의 좌표는 $(1,1)$이고

$g(1)=4+k=1$

따라서, $k=-3$

또한, $x<0$일 때 $g(x)=-4x-3$이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표는

$x^3+x^2-x=-4x-3$, $x^3+x^2+3x+3=0$

$(x+1)(x^2+3)=0$

$x=-1$

따라서 구하는 넓이 S는

$$S=\int_{-1}^{0}(x^3+x^2+3x+3)dx+\int_{0}^{1}(x^3+x^2-5x+3)dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+3x\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_{0}^{1}$$

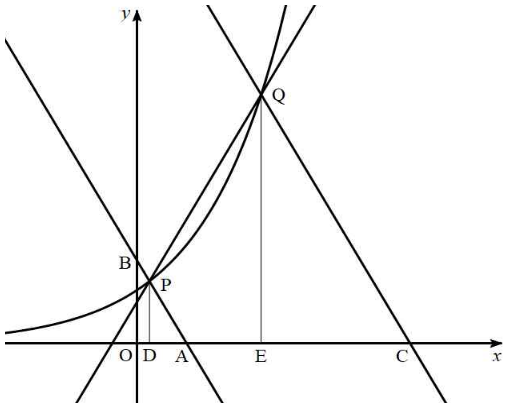
$$=\frac{19}{12}+\frac{13}{12}=\frac{8}{3}$$

$30\times S=30\times\dfrac{8}{3}=80$

정답 80

21\. **출제의도** : 지수함수의 그래프를 이용하여 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



위 그림과 같이 두 점 P, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하자.

$\overline{\mathrm{PB}}=k$라 하면

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}&=\overline{\mathrm{AB}}-\overline{\mathrm{PB}}\\&=4\overline{\mathrm{PB}}-\overline{\mathrm{PB}}\\&=3\overline{\mathrm{PB}}=3k\end{aligned}$$

이고,

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{CQ}}&=3\overline{\mathrm{AB}}\\&=3\times4\overline{\mathrm{PB}}\\&=12\overline{\mathrm{PB}}=12k\end{aligned}$$

이므로 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{CQ}}=3k:12k=1:4$

이때 $\triangle\mathrm{PDA}\backsim\triangle\mathrm{QEC}$이므로

$\overline{\mathrm{PD}}:\overline{\mathrm{QE}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{CQ}}=1:4$

즉, $2^a:2^b=1:4$이므로

$2^b=4\times2^a=2^{a+2}$

에서

$b=a+2$

즉,

$$\begin{aligned}m&=\frac{2^b-2^a}{b-a}\\&=\frac{2^{a+2}-2^a}{(a+2)-a}\\&=\frac{3\times2^a}{2}\\&=3\times2^{a-1}\end{aligned}$$

이므로 직선 AB의 방정식은

$y-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$ ……㉠

㉠에 $y=0$을 대입하면

$-2^a=-3\times2^{a-1}(x-a)$

$x-a=\dfrac{2}{3}$

$x=a+\dfrac{2}{3}$

즉, 점 A의 x좌표가 $a+\dfrac{2}{3}$이다.

이때 원점 O에 대하여 $\triangle\mathrm{APD}\backsim\triangle\mathrm{ABO}$이므로

$\overline{\mathrm{AO}}:\overline{\mathrm{DO}}=\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{PB}}=4:1$

즉, $a+\dfrac{2}{3}:a=4:1$

$a+\dfrac{2}{3}=4a$

$a=\dfrac{2}{9}$

$b=a+2=\dfrac{2}{9}+2=\dfrac{20}{9}$

따라서

$$\begin{aligned}90\times(a+b)&=90\times\left(\frac{2}{9}+\frac{20}{9}\right)\\&=90\times\frac{22}{9}\\&=220\end{aligned}$$

정답 220

22. 출제의도 : 삼차함수의 그래프와 함수의 연속성을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

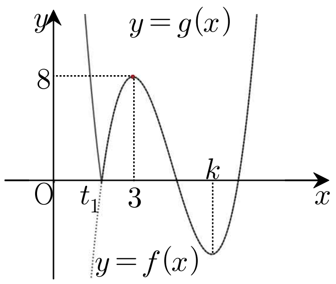
$$g(x)=\begin{cases}f(x) & (x\geq t)\\-f(x)+2f(t) & (x<t)\end{cases}$$

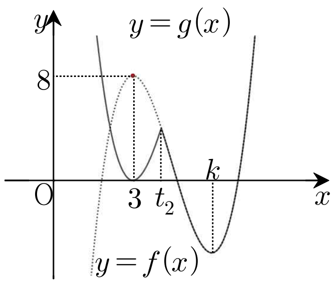
에서

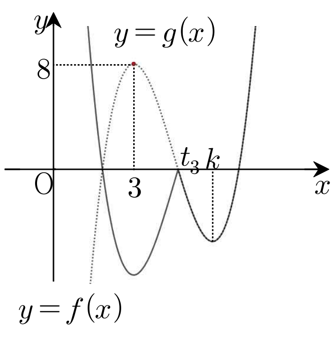
$\displaystyle\lim_{x\to t-}g(x)=\lim_{x\to t+}g(x)=g(t)=f(t)$

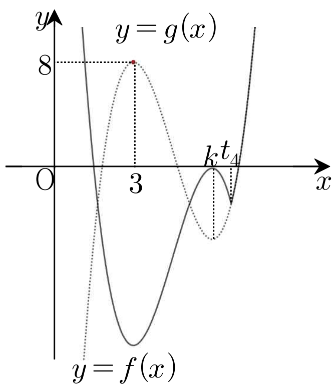
이므로 함수 $g(t)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

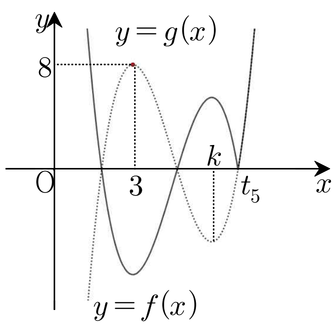
함수 $f(x)$가 $x=k$에서 극솟값을 갖는다고 하자.
이때 함수 $y=-f(x)+2f(t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 $2f(t)$만큼 평행이동한 것이다.
방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=g(x)$의 그래프와 x축과의 교점의 개수와 같으므로 $f(k)$의 값에 따라 나누어 생각할 수 있다.
우선, $f(k)<0$인 경우를 생각해보면 함수 $y=g(x)$가 불연속일 때의 그래프는 다음과 같다.



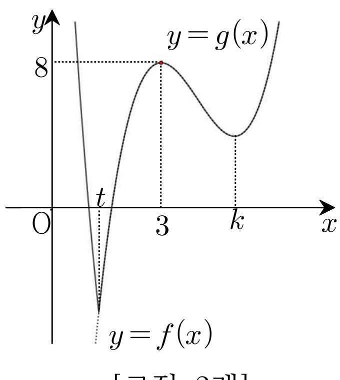




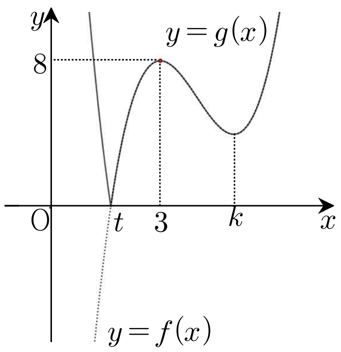




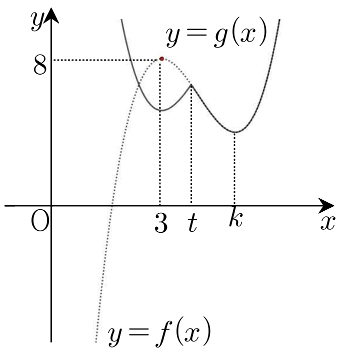
따라서 함수 $h(t)$는
$t=t_i$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$에서 불연속이므로 주어진 조건에 위배된다.
위와 같은 방법으로 함수 $y=f(x)$의 그래프에 따라 함수 $y=g(x)$의 그래프를 그려보면 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개인 경우는 다음과 같이 $t=k$일 때 $g(3)=0$이 되는 경우뿐이다.



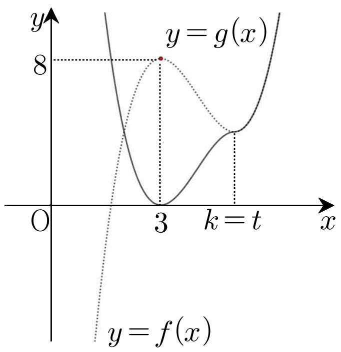
[교점 2개]



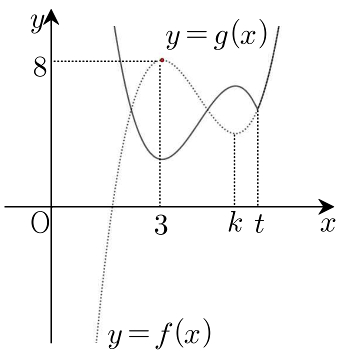
[교점 1개]



[교점 0개]



[교점 1개]



[교점 0개]

$t=k$일 때

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq k) \\ -f(x)+2f(k) & (x<k) \end{cases}$$

이고 이때 $g(3)=0$에서

$-f(3)+2f(k)=0$, 즉 $-8+2f(k)=0$

에서

$f(k)=4$

한편, 최고차항의 계수가 1인 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 극댓값을 가지므로 $x=k$에서 극솟값을 가지므로 $k>3$이고

$$f'(x)=3(x-3)(x-k)$$
$$=3x^2-3(3+k)x+9k$$

따라서

$f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+C$ (C는 적분상수)

이고 $f(3)=8$이므로

$$27-\frac{27}{2}(3+k)+27k+C=8,$$

$$C=\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k$$

따라서

$$f(x)=x^3-\frac{3}{2}(3+k)x^2+9kx+\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k$$

이때 $f(k)=4$이므로

$$k^3-\frac{3}{2}(3+k)k^2+9k^2+\frac{43}{2}-\frac{27}{2}k=4,$$

$$-\frac{k^3}{2}+\frac{9}{2}k^2-\frac{27}{2}k+\frac{35}{2}=0,$$

$$k^3-9k^2+27k-35=0,$$

$$(k-5)(k^2-4k+7)=0$$

모든 실수 k에 대하여 $k^2-4k+7>0$이므로

$k=5$

따라서

$f(x)=x^3-12x^2+45x-46$

이므로

$f(8)=512-768+360-46=58$

정답 58

■ [선택: 미적분]
23. ① 24. ② 25. ⑤ 26. ③ 27. ③
28. ④ 29. 3 30. 283

23. **출제의도** : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x-2^x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(4^x-1)-(2^x-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{x}$$

$$=\ln 4-\ln 2$$

$$=\ln\frac{4}{2}=\ln 2$$

정답 ①

24. **출제의도** : 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$이므로

$$\int_0^{\pi} x\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi} x\sin x dx$$

$$=[-x\cos x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(-\cos x)dx$$

$$=(\pi-0)+[\sin x]_0^{\pi}$$

$$=\pi$$

정답 ②

25. **출제의도** : 수열의 극한의 성질을 이용하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+2}{2}=6$에서

$\frac{a_n+2}{2}=b_n$

이라 하면

$a_n=2b_n-2$이고 $\lim_{n\to\infty}b_n=6$

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+1}{a_n+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(2b_n-2)+1}{(2b_n-2)+2n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2b_n-2+\frac{1}{n}}{\frac{2b_n}{n}-\frac{2}{n}+2}$$

$$=\frac{2\times 6-2+0}{0-0+2}$$

$$=5$$

정답 ⑤

26. **출제의도** :
입체도형의 부피를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{\dfrac{kx}{2x^2+1}}$ 이므로 정사각형의 넓이는

$$\left(\sqrt{\frac{kx}{2x^2+1}}\right)^2 = \frac{kx}{2x^2+1}$$

그러므로 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^2 \frac{kx}{2x^2+1}dx \quad ---㉠$$

이때, $2x^2+1=t$로 놓으면

$$4x = \frac{dt}{dx}$$

또, $x=1$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=9$이므로 ㉠은

$$\int_3^9 \frac{k}{4}\times\frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{k}{4}\int_3^9 \frac{1}{t}dt$$

$$=\frac{k}{4}\times[\ln t]_3^9$$

$$=\frac{k}{4}\times(\ln 9-\ln 3)$$

$$=\frac{k}{4}\ln 3$$

이 값이 $2\ln 3$이므로

$$\frac{k}{4}\ln 3 = 2\ln 3$$

$$k=8$$

정답 ③

27. 출제의도 : 등비급수를 이용하여 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 $A_1B_1D_1$에서

$$\overline{B_1D_1} = \sqrt{\overline{A_1B_1}^2+\overline{A_1D_1}^2}$$
$$=\sqrt{4^2+1^2}$$
$$=\sqrt{17}$$

이므로

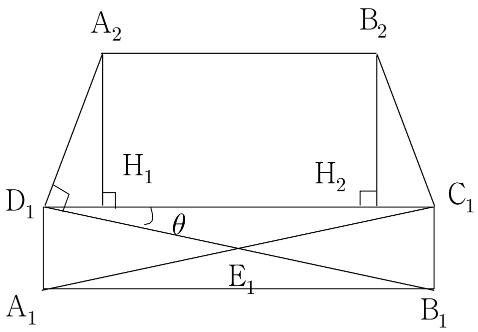
$$\overline{D_1E_1} = \frac{1}{2}\times\overline{B_1D_1} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

그러므로

$$S_1 = 2\times(\triangle A_2D_1E_1)$$
$$=2\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$$
$$=\frac{17}{4}$$

한편, 직각삼각형 $D_1B_1C_1$에서 $\angle C_1D_1B_1=\theta$라 하면

$$\sin\theta = \frac{\overline{B_1C_1}}{\overline{D_1B_1}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$$



또, A_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_1라 하면

$$\angle A_2D_1H_1 = \frac{\pi}{2}-\theta$$

이므로

$$\overline{D_1H_1} = \overline{A_2D_1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$
$$=\overline{A_2D_1}\sin\theta$$
$$=\frac{\sqrt{17}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{17}}=\frac{1}{2}$$

또, 점 B_2에서 선분 D_1C_1에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$$\overline{A_2B_2}=\overline{H_1H_2}$$
$$=4-2\times\overline{D_1H_1}$$
$$=4-2\times\frac{1}{2}=3$$

이때, $\overline{A_1B_1}=4$, $\overline{A_2B_2}=3$에서 길이의 비가 $\frac{3}{4}$이므로 넓이의 비는 $\frac{9}{16}$이다.

따라서,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{17}{4}}{1-\frac{9}{16}}$$
$$=\frac{17\times4}{16-9}=\frac{68}{7}$$

정답 ③

28\. **출제의도** : 도형의 넓이에 활용된 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{AP}=\overline{PC}$이므로 삼각형 OPC에서

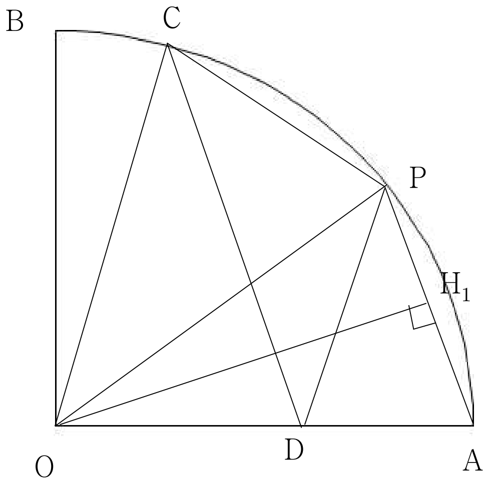
$$\angle COP=\angle POA=\theta$$

또, 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면

$$\angle H_1OA=\frac{\theta}{2}$$

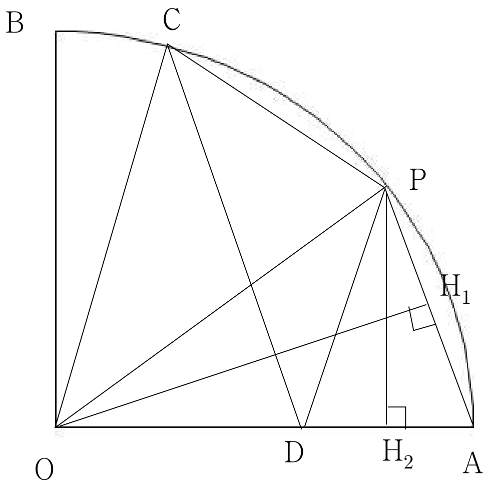
이므로

$$\overline{AP}=2\overline{AH_1}$$
$$=2\times\overline{OA}\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=2\sin\frac{\theta}{2}\qquad\text{------㉠}$$



한편, 점 P에서 선분 DA에 내린 수선의 발을 H_2라 하면

$$\angle APD=2\angle APH_2$$
$$=2\times\{\pi-(\angle PH_2A+\angle H_2AP)\}$$
$$=2\times\left[\pi-\left\{\frac{\pi}{2}+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)\right\}\right]$$
$$=\theta$$



또,

$$\angle APO=\angle OPC=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$$

이므로

$$\angle DPC=\angle APO+\angle OPC-\angle APD$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)+\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)-\theta$$
$$=\pi-2\theta\qquad\text{---㉡}$$

그러므로 ㉠과 ㉡으로부터

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PD}\times\overline{PC}\times\sin(\pi-2\theta)$$
$$=\frac{1}{2}\times\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta$$
$$=2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta$$

또, ㉠으로부터 삼각형 APD에서

$$\overline{DA}=2\overline{AP}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=2\times2\sin\frac{\theta}{2}\times\sin\frac{\theta}{2}$$
$$=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$$

이때, 두 삼각형 OAP, DAE는 닮음 삼각형이고 $\overline{OA}=1$, $\overline{DA}=4\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2$이므로

$$g(\theta)=\triangle DAE$$
$$=4^2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\triangle OAP$$
$$=16\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\sin\theta$$
$$=8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta$$

따라서,

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta^2\times f(\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{8\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^4\times\sin\theta}{\theta^2\times2\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2\times\sin\theta}{\theta^2\times\sin2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\times\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{1}{4}}{\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

정답 ④

29. 출제의도 :

합성함수의 미분법과 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $P(s, f(s))$와 점 $Q(t, 0)$에 대하여 점 P에서의 접선과 직선 PQ는 수직이어야 한다.

이때, $f(x)=e^x+x$에서

$$f'(x)=e^x+1$$

이므로

$$f'(s)=e^s+1 \quad \text{-----㉠}$$

또, 직선 PQ의 기울기는

$$\frac{f(s)-0}{s-t}=\frac{e^s+s}{s-t} \quad \text{---㉡}$$

㉠과 ㉡으로부터

$$(e^s+1)\times\frac{e^s+s}{s-t}=-1$$
$$(e^s+1)(e^s+s)=t-s$$
$$t=(e^s+1)(e^s+s)+s \quad \text{---㉢}$$

한편, $f(s)$의 값이 $g(t)$이므로

$$g(t)=e^s+s \quad \text{----㉣}$$

또, 함수 $g(t)$의 역함수가 $h(t)$이므로

$h(1)=k$

라 하면

$g(k)=1$

㉣에서

$e^s+s=1$

$s=0$

이 값을 ㉢에 대입하면

$k=2\times1+0=2$

$g(h(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(h(t))\times h'(t)=1$

$$h'(t)=\frac{1}{g'(h(t))}$$

이때, $t=1$을 대입하면

$$h'(1)=\frac{1}{g'(2)}$$

한편, ㉣의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$g'(t)=(e^s+1)\frac{ds}{dt}$$

이때, ㉢의 양변을 t에 대하여 미분하면

$$1=\{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1\}\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1}$$

이므로

$$g'(t)=\frac{e^s+1}{e^s(e^s+s)+(e^s+1)^2+1}$$

이때, $s=0$일 때, $t=2$이므로

$$g'(2)=\frac{2}{1+2^2+1}$$

$$=\frac{1}{3}$$

따라서,

$$h'(1)=\frac{1}{g'(2)}=3$$

정답 3

30. 출제의도 :

도함수를 이용하여 함수의 식을 구할 수 있고, 치환적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건(가)에서 함수 $f(x)$는 구간 $(-\infty, -3)$에서 감소하는 함수이다.

또, 조건 (나)에서 $x>-3$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x+3)\{f(x)-f(0)\}^2=f'(x)$ ---㉠

이고 함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 $g(x)\geq 0$이므로 ㉠의 좌변은 0이상인 실수이다.

그러므로 구간 $(-3,\infty)$에서

$f'(x)\geq 0$

또, ㉠에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=0$

이때, 함수 $f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 4차 함수이므로

$f'(x)=4x^2(x+3)$

즉,

$f'(x)=4x^3+12x^2$

이때,

$f(x)=x^4+4x^3+C$ (C는 상수)

이 식을 ㉠에 대입하면

$g(x+3)\times(x^4+4x^3)^2=4x^3+12x^2$--㉡

한편,

$\int_4^5 g(x)dx$ ---㉢

에서 구간 $[4,5]$에서의 $g(x)$가 가지는

값은 구간 $[1, 2]$에서의 $g(x+3)$가 가지는 값과 같다.

한편 ㉡의 좌변의 식 x^4+4x^3은 구간 $[1, 2]$에서

$$x^4+4x^3 \neq 0$$

이므로

$$g(x+3)=\frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}$$

또, ㉢에서

$$x-3=t$$

로 놓으면 $\frac{dx}{dt}=1$이고 $x=4$일 때 $t=1$, $x=5$일 때 $t=2$이므로

$$\int_4^5 g(x)dx$$

$$=\int_1^2 g(x+3)dx$$

$$=\int_1^2 \frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}dx \quad \text{---㉣}$$

이때, $x^4+4x^3=s$로 놓으면

$$4x^3+12x^2=\frac{ds}{dx}$$

이고 $x=1$일 때 $s=5$, $x=2$일 때 $s=48$이므로 ㉣은

$$\int_1^2 \frac{4x^3+12x^2}{(x^4+4x^3)^2}dx$$

$$=\int_5^{48}\frac{1}{s^2}ds$$

$$=\left[-\frac{1}{s}\right]_5^{48}$$

$$=\left(-\frac{1}{48}\right)+\frac{1}{5}$$

$$=\frac{43}{240}$$

따라서, $p=240$, $q=43$이므로

$$p+q=240+43=283$$

정답 283