2024학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가
수학영역 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 2023.06.05.(월)

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ④	03. ②	04. ②	05. ①
06. ④	07. ③	08. ③	09. ①	10. ②
11. ③	12. ⑤	13. ①	14. ③	15. ②
16. 3	17. 33	18. 6	19. 8	20. 39
21. 110	22. 380			

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}=(3^3)^{\frac{1}{3}}\times(2^2)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=3\times 2^{-1}$$
$$=3\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{3}{2}$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 다항함수의 미분과 미분계수의 정의를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^2-2x+3$

에서

$f'(x)=2x-2$

이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$$
$$=2\times 3-2$$
$$=4$$

정답 ④

3. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}3$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k+3\times 10$$
$$=2\sum_{k=1}^{10}a_k+30$$

따라서

$$2\sum_{k=1}^{10}a_k+30=60$$

이므로

$$2\sum_{k=1}^{10}a_k=30$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=15$$

정답 ②

4. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉,

$$\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$$

이므로

$$\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$$

에서

$f(1)=4-f(1)$

$2f(1)=4$
따라서 $f(1)=2$

정답 ②

5. 출제의도 : 함수의 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$g(x)=(x^3+1)f(x)$
이므로
$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$
이때 $f(1)=2$, $f'(1)=3$이므로
$g'(1)=3f(1)+2f'(1)$
$=3\times2+2\times3$
$=12$

정답 ①

6. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이해하여 사인함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
이므로
$\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$
에서
$\cos\theta=-7\sin\theta$
이때 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이므로
$\sin^2\theta+49\sin^2\theta=1$
$\sin^2\theta=\frac{1}{50}$
한편, $\cos\theta<0$이므로
$\sin\theta=-\frac{1}{7}\cos\theta>0$
따라서
$\sin\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}$

정답 ④

7. 출제의도 : 로그함수의 점근선을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선은 직선 $x=a$이다.
곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$와 직선 $x=a$가 만나는 점 A의 좌표는
$\left(a,\ \log_2\frac{a}{4}\right)$
곡선 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 직선 $x=a$가 만나는 점 B의 좌표는
$\left(a,\ \log_{\frac{1}{2}}a\right)$
한편, $a>2$에서
$\log_2\frac{a}{4}>\log_2\frac{2}{4}=-1$,
$\log_{\frac{1}{2}}a<\log_{\frac{1}{2}}2=-1$
이므로
$\log_2\frac{a}{4}>\log_{\frac{1}{2}}a$
이때,
$\overline{AB}=\log_2\frac{a}{4}-\log_{\frac{1}{2}}a$
$=(\log_2a-2)+\log_2a$
$=2\log_2a-2$
이고,
$\overline{AB}=4$

이므로

$2\log_2 a - 2 = 4$

$\log_2 a = 3$

따라서 $a = 2^3 = 8$

정답 ③

8. **출제의도** : 함수의 그래프의 개형을 이용하여 두 곡선이 두 점에서 만나도록 하는 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되려면

방정식 $2x^2-1=x^3-x^2+k$, 즉

$-x^3+3x^2-1=k$ ······ ㉠

이 서로 다른 두 실근을 가져야 한다.

방정식 ㉠이 서로 다른 두 실근을 가지려면 곡선 $y=-x^3+3x^2-1$과 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

$f(x)=-x^3+3x^2-1$이라 하면

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서

$x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

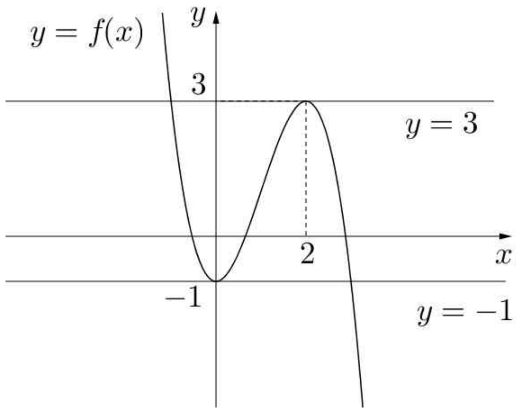
x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값

$f(0)=-1$을 갖고, $x=2$에서 극댓값

$f(2)=3$을 갖는다.

이때 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 양수 k의 값은 3이다.

정답 ③

9. **출제의도** : 주어진 조건을 이용하여 분수꼴로 나타낸 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$에서

$n=1$일 때

$\dfrac{1}{a_1}=3$이므로

$a_1=\dfrac{1}{3}$

$n\geq 2$일 때

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)a_k}$$
$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$
$$=2n+1$$

이므로 $(2n-1)a_n=\dfrac{1}{2n+1}$에서

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

이때 $n=1$일 때 $a_1 = \frac{1}{3}$이므로

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \ (n \geq 1)$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots + \left(\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\times\frac{20}{21}$$
$$= \frac{10}{21}$$

정답 ①

10. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선과 좌표축으로 둘러싸인 두 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$ 또는 $x=3$이므로 두 점 P, Q의 좌표는 각각 $(2, 0)$, $(3, 0)$이다.

이때

$$(A\text{의 넓이}) = \int_0^2 f(x)dx,$$

$$(B\text{의 넓이}) = \int_2^3 \{-f(x)\}dx$$

이므로

$(A$의 넓이$)-(B$의 넓이$)$

$$= \int_0^2 f(x)dx - \int_2^3 \{-f(x)\}dx$$
$$= \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx$$
$$= \int_0^3 f(x)dx = 3$$

이어야 한다.

이때

$$\int_0^3 f(x)dx = k\int_0^3 (x^3-5x^2+6x)dx$$
$$= k\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3$$
$$= k\left(\frac{81}{4} - 45 + 27\right)$$
$$= \frac{9}{4}k$$

이므로

$$\frac{9}{4}k = 3$$

따라서

$$k = \frac{4}{3}$$

정답 ②

11. **출제의도** : 도함수를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 좌표를 (s, s^2)이라 하면 점 P에서 곡선 $y=x^2$에 접하는 직선의 기울기가 $2t$가 되어야 한다.

$f(x)=x^2$이라 하면

$f'(x)=2x$

이므로

$2s=2t$
에서
$s=t$
즉, $\mathrm{P}(t,\ t^2)$
이때 직선 OP의 방정식은 $y=tx$이므로
$tx=2tx-1$
에서
$x=\dfrac{1}{t}$
즉, 점 Q의 좌표는
$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{t},\ 1\right)$
따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 1-}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}&=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}\\&=\lim_{t\to 1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}\\&=\lim_{t\to 1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}\\&=2\sqrt{2}\end{aligned}$$

정답 ③

12. 출제의도 : 등차수열의 정의와 성질을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 등차수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq 0)$이라 하자.
$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})\\&=a_{n+2}-a_n\\&=2d\end{aligned}$$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.
(i) $d>0$일 때,
$a_1=a_2-d=-4-d<0$
$a_2=-4<0$
이므로
$b_1=a_1+a_2=-8-d<a_1$
$n(A\cap B)=3$이려면
$b_2=a_1$ 또는 $b_3=a_1$
이어야 한다.
① $b_2=a_1$일 때,
$b_3=a_3,\ b_4=a_5$
이므로
$n(A\cap B)=3$
이다.
한편, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로
$b_2=a_1$에서
$-8+d=-4-d$
$2d=4$
$d=2$
따라서

$$\begin{aligned}a_{20}&=a_2+18d\\&=-4+18\times 2\\&=32\end{aligned}$$

② $b_3=a_1$일 때,
$b_4=a_3,\ b_5=a_5$
이므로
$n(A\cap B)=3$
이다.
한편, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로
$b_3=a_1$에서
$-8+3d=-4-d$
$4d=4$
$d=1$
따라서
$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times1$

$=14$

(ⅱ) $d<0$일 때,

③ $a_1>0$이면 $a_2<b_1<a_1$이므로

$n(A\cap B)=0$

④ $a_1=0$이면 $b_1=a_2$, $b_2=a_4$이므로

$n(A\cap B)=2$

⑤ $a_1<0$이면 $b_1<a_2$이므로

$n(A\cap B)\le 2$

③, ④, ⑤에서

$d<0$이면 주어진 조건을 만족하지 못한다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$

정답 ⑤

[다른 풀이]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(d\neq0)$이라 하자.

$b_n=a_n+a_{n+1}$이므로

$b_{n+1}-b_n=(a_{n+1}+a_{n+2})-(a_n+a_{n+1})$

$=a_{n+2}-a_n$

$=2d$

수열 $\{b_n\}$은 공차가 $2d$인 등차수열이다.

$n(A\cap B)=3$이려면

$A\cap B=\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_i,\ b_{i+1},\ b_{i+2}\}$

(단, $i=1,\ 2,\ 3$)

이어야 한다.

(ⅰ) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$인 경우

$a_1=b_1$

이어야 한다.

이때, $b_1=a_1+a_2=a_1-4$이므로

$a_1=a_1-4$

즉, a_1의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_2,\ b_3,\ b_4\}$인 경우

$a_1=b_2$

이어야 한다.

이때, $b_2=b_1+2d=-8+d$이므로

$a_1=b_2$에서

$-4-d=-8+d$

$2d=4$

$d=2$

따라서

$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times2$

$=32$

(ⅲ) $\{a_1,\ a_3,\ a_5\}=\{b_3,\ b_4,\ b_5\}$인 경우

$a_1=b_3$

이어야 한다.

이때, $b_3=b_1+4d=-8+3d$이므로

$a_1=b_3$에서

$-4-d=-8+3d$

$4d=4$

$d=1$

따라서

$a_{20}=a_2+18d$

$=-4+18\times1$

$=14$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서

$a_{20}=32$ 또는 $a_{20}=14$

따라서 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$

13. **출제의도** : 사인법칙, 코사인법칙과 삼각형의 넓이를 이용하여 조건을 만족시키는 사각형의 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\angle \mathrm{BCD}=\alpha$, $\angle \mathrm{DAB}=\beta$ $\left(\frac{\pi}{2}<\beta<\pi\right)$,

$\overline{\mathrm{AB}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=b$라 하자.

삼각형 BCD에서

$\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\overline{\mathrm{CD}}=2$, $\cos(\angle \mathrm{BCD})=-\frac{1}{3}$

이므로 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{BD}}^2=9+4-2\times3\times2\times\left(-\frac{1}{3}\right)$$
$$=17$$

그러므로 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$a^2+b^2-2ab\cos\beta=17$ ……㉠

한편, 점 E가 선분 AC를 1:2로 내분하는 점이므로 두 삼각형 $\mathrm{AP_1P_2}$, $\mathrm{CQ_1Q_2}$의 외접원의 반지름의 길이를 각각 r, $2r$로 놓을 수 있다.

이때 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{\sin\beta}=2r,\quad \frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{\sin\alpha}=4r$$

이므로

$$\sin\alpha:\sin\beta=\frac{\overline{\mathrm{Q_1Q_2}}}{4r}:\frac{\overline{\mathrm{P_1P_2}}}{2r}$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2}:3$$

즉, $\sin\beta=\frac{6\sin\alpha}{5\sqrt{2}}$

이때

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$=\sqrt{1-\frac{1}{9}}$$
$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

이므로

$$\sin\beta=\frac{6}{5\sqrt{2}}\times\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{4}{5}$$

$\cos\beta<0$이므로

$$\cos\beta=-\sqrt{1-\sin^2\beta}$$
$$=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}$$
$$=-\sqrt{\frac{9}{25}}$$
$$=-\frac{3}{5}$$

삼각형 ABD의 넓이가 2이므로

$$\frac{1}{2}ab\sin\beta=2$$

에서

$$\frac{1}{2}ab\times\frac{4}{5}=2$$

$ab=5$

㉠에서

$$a^2+b^2-2\times5\times\left(-\frac{3}{5}\right)=17$$

$a^2+b^2=11$

따라서

$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=11+2\times5=21$

이므로

$a+b=\sqrt{21}$

정답 ①

14. 출제의도 : 정적분을 활용하여 위치의 변화량의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a\neq0$, $a\neq\frac{1}{2}$, $a\neq1$이면 점 P는 출발 후 운동 방향을 세 번 바꾼다.

그러므로 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $a=0$일 때

$v(t)=-t^3(t-1)$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=1$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t^3(t-1)dt=\int_0^2(-t^4+t^3)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+4$$

$$=-\frac{12}{5}$$

(ⅱ) $a=\frac{1}{2}$일 때

$v(t)=-t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2$

이때 점 P는 출발 후 운동 방향을 $t=\frac{1}{2}$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t\left(t-\frac{1}{2}\right)(t-1)^2dt$$

$$=\int_0^2 -\left(t^2-\frac{1}{2}t\right)(t^2-2t+1)dt$$

$$=\int_0^2\left(-t^4+\frac{5}{2}t^3-2t^2+\frac{1}{2}t\right)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{5}{8}t^4-\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+10-\frac{16}{3}+1$$

$$=-\frac{32}{5}-\frac{16}{3}+11$$

$$=\frac{(-96)+(-80)+165}{15}$$

$$=-\frac{11}{15}$$

(ⅲ) $a=1$일 때

$v(t)=-t(t-1)^2(t-2)$

이때 점 P는 출발 후 운동방향을 $t=2$에서 한 번만 바꾸므로 조건을 만족시킨다.

그러므로 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$

$$=\int_0^2 -t(t^2-2t+1)(t-2)dt$$

$$=\int_0^2(-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2$$

$$=-\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4$$

$$=-\frac{32}{5}-\frac{40}{3}+20$$

$$=\frac{(-96)+(-200)+300}{15}$$

$$=\frac{4}{15}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은 $\frac{4}{15}$이다.

정답 ③

15. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하고 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$ 이므로 a_3, a_4, a_5, a_6은 어느 것도 0이 될 수 없다.

$a_1=k>0$이므로

$a_2=a_1-2-k=-2<0$

$a_3=a_2+4-k=2-k$

(i) $a_3=2-k>0$인 경우

$2-k>0$에서 $k<2$ 즉 $k=1$이므로

$a_4=a_3-6-k=-6<0$

$a_5=a_4+8-k=1>0$

$a_6=a_5-10-k=-10<0$

따라서 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6>0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ii) $a_3=2-k<0$인 경우

즉 $k>2$ 이므로

$a_4=a_3+6-k=8-2k$

① $a_4=8-2k>0$인 경우

즉 $k<4$ 이므로 $2<k<4$에서 $k=3$일 때

$a_4=8-6=2$

$a_5=a_4-8-k=-9<0$

$a_6=a_5+10-k=-2<0$

따라서 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

② $a_4=8-2k<0$인 경우

즉 $k>4$ 이므로

$a_5=a_4+8-k=16-3k$

㉠ $a_5=16-3k>0$인 경우

즉 $k<\dfrac{16}{3}$에서 $4<k<\dfrac{16}{3}$ 이므로

$k=5$

$a_5=16-15=1$

$a_6=a_5-10-k=-14<0$

따라서 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이므로 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_5=16-3k<0$인 경우

즉 $k>\dfrac{16}{3}$이므로 $k\geq 6$인 경우이다.

이때

$a_6=a_5+10-k=26-4k$

이고 $a_3\times a_4\times a_5\times a_6<0$이기 위해서는

$a_6>0$이어야 하므로

$a_6=26-4k>0$

$k<\dfrac{13}{2}$

즉 $6\leq k<\dfrac{13}{2}$ 에서 $k=6$

(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합은

$3+5+6=14$

정답 ②

16. 출제의도 : 지수부등식을 만족시키는 자연수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x=\left(2^{-2}\right)^x=2^{-2x}$이므로 주어진 부등식은

$2^{x-6}\leq 2^{-2x}$

양변의 밑 2가 1보다 크므로

$x-6\leq -2x$

$3x\leq 6$

$x\leq 2$

따라서 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2=3$

정답 3

17. 출제의도 : 부정적분을 이용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=\int f'(x)dx$

$=\int(8x^3-1)dx$

$=2x^4-x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=3$이므로 $C=3$

따라서

$f(x)=2x^4-x+3$이므로

$f(2)=32-2+3=33$

정답 33

18. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극솟값 -2를 가지므로

$f(1)=-2$

에서

$a+b+a=-2$

$2a+b=-2$ ……㉠

또, $f'(x)=3ax^2+b$이고 $f'(1)=0$이어야 하므로

$3a+b=0$ ……㉡

㉠과 ㉡을 연립하면

$a=2$, $b=-6$

그러므로

$f(x)=2x^3-6x+2$

이고

$f'(x)=6x^2-6$

$=6(x+1)(x-1)$

이때 $f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	-2	$\nearrow$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값 6을 갖는다.

정답 6

19. **출제의도** : 사인함수의 최댓값, 최솟값 및 주기를 이해하고, 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $f(x)$의 최솟값이

$-a+8-a=8-2a$

이므로 조건 (가)를 만족시키려면

$8-2a\geq 0$

즉, $a\leq 4$이어야 한다.

그런데, $a=1$ 또는 $a=2$ 또는 $a=3$일 때는 함수 $f(x)$의 최솟값이 0보다 크므로 조건 (나)를 만족시킬 수 없다.

그러므로 $a=4$

이때 $f(x)=4\sin bx+4$이고 이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{b}$이므로 $0\leq x\leq\frac{2\pi}{b}$일 때 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

그러므로 $0\leq x<2\pi$일 때, 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면

$\frac{15\pi}{2b}<2\pi\leq\frac{19\pi}{2b}$

이어야 한다.

즉, $\frac{15}{4}<b\leq\frac{19}{4}$이고 b는 자연수이므로

$b=4$

따라서 $a+b=4+4=8$

정답 8

20. 출제의도 : 정적분의 성질을 활용하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라 하면

$F'(x)=f(x)$

이고

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$
$$=F(x)-F(0)$$

이므로

$g'(x)=f(x)$

그러므로 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉠

즉, $g'(4)=f(4)=0$이므로

$f(x)=(x-4)(x-a)$ (a는 상수) … ㉡

로 놓을 수 있다.

(ⅰ) $g(4)\ge 0$인 경우

$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\ge g(4)\ge 0$이므로 이 범위에서

$|g(x)|=g(x)$

이다.

조건에서 $x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|\ge |g(3)|$, 즉 $g(x)\ge g(3)$이어야 한다. … ㉢

그런데 ㉠에서 $g(3)>g(4)$이므로 ㉢을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $g(4)<0$인 경우

$x\ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|\ge |g(3)|$이려면

$g(3)=0$ … ㉣

이어야 한다.

㉡에서 $f(x)=x^2-(a+4)x+4a$이므로

$F(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax+C$ (단, C는 적분상수)

그러므로

$$g(x)=F(x)-F(0)$$
$$=\frac{1}{3}x^3-\frac{a+4}{2}x^2+4ax$$

㉣에서

$$g(3)=9-\frac{9}{2}(a+4)+12a=0$$

$$\frac{15}{2}a=9$$

$$a=\frac{6}{5}$$

따라서 $f(x)=(x-4)\left(x-\frac{6}{5}\right)$이므로

$$f(9)=(9-4)\left(9-\frac{6}{5}\right)$$
$$=5\times\frac{39}{5}=39$$

정답 39

[다른 풀이]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ … ㉠

는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수이다.

㉠에서

$g(0)=0$ … ㉡

조건에서 $x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge g(4)$이므로 삼차함수 $g(x)$는 구간 $[1, \infty)$에서 $x=4$일 때 최소이자 극소이다. … ㉢

그러므로 $g'(4)=0$ … ㉣

(ⅰ) $g(4) \ge 0$인 경우

$x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge g(4) \ge 0$이므로 이 범위에서

$|g(x)|=g(x)$

이다.

조건에서 $x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)| \ge |g(3)|$, 즉 $g(x) \ge g(3)$이어야 하므로 $g(3)=g(4)$이어야 한다.

이는 ㉢에 모순이다.

(ⅱ) $g(4)<0$인 경우

$x \ge 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)| \ge |g(3)|$이려면

$g(3)=0$ … ㉤

이어야 한다.

㉡, ㉤에서

$$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x+a)$$
$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{a-3}{3}x^2-ax \ (a\text{는 상수})$$

로 놓을 수 있다.

$$g'(x)=x^2+\frac{2(a-3)}{3}x-a$$

㉣에서

$$g'(4)=16+\frac{8}{3}(a-3)-a=8+\frac{5}{3}a=0,$$

$$a=-\frac{24}{5}$$

㉠에서

$$f(x)=g'(x)=x^2-\frac{26}{5}x+\frac{24}{5}$$

이므로

$$f(9)=81-\frac{234}{5}+\frac{24}{5}$$
$$=81-\frac{210}{5}=39$$

21. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이해하고 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선 $y=\log_2 x$를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

또, 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

그러므로 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$은 한 점에서 만난다.

$t=1$일 때, 곡선 $y=1-\log_2 x$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

또, 곡선 $y=2^{x-1}$은 $x=1$일 때 $y=1$이므로 점 $(1, 1)$을 지난다.

그러므로

$f(1)=1$

$t=2$일 때, 곡선 $y=2-\log_2 x$는 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.

또, 곡선 $y=2^{x-2}$은 $x=2$일 때, $y=1$이므로 점 $(2, 1)$을 지난다.

그러므로

$f(2)=2$

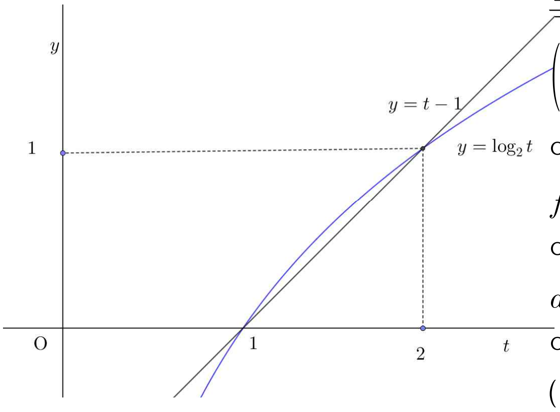
이 명제가 참이므로

$A=100$

ㄴ. 곡선 $y=t-\log_2 x$는 곡선

$y=-\log_2 x$를 y축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이다. 이때 t의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표는 증가한다.
이때 곡선 $y=2^{x-t}$은 곡선 $y=2^x$을 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이므로 t의 값이 증가하면 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^{x-t}$의 교점의 x좌표는 두 곡선 $y=t-\log_2 x$, $y=2^x$의 교점의 x좌표보다 커진다.
그러므로 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
이 명제가 참이므로 $B=10$

ㄷ. $g(x)=t-\log_2 x$, $h(x)=2^{x-t}$이라 하면 함수 $y=g(x)$는 감소함수이고, 함수 $y=h(x)$는 증가함수이므로 $f(t)\geq t$이기 위해서는
$g(t)\geq h(t)$
이어야 한다. 즉,
$t-\log_2 t\geq 2^{t-t}$
$t-1\geq \log_2 t$ $\cdots\cdots$ ㉠
이때 두 함수 $y=\log_2 t$, $y=t-1$의 그래프는 두 점 $(1, 0)$, $(2, 1)$에서 만나고 다음 그림과 같다.



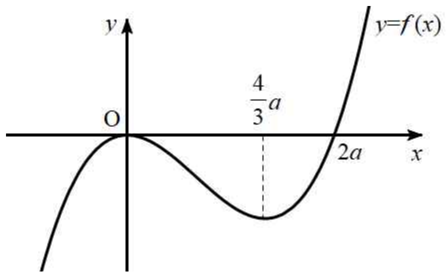
위에서 $1<t<2$일 때는 함수 $y=\log_2 t$의 그래프가 직선 $y=t-1$보다 위쪽에 있으므로 ㉠을 만족시키지 못한다.
즉, $1<t<2$일 때는 부등식
$f(t)\geq t$
를 만족시키지 못한다.
이 명제가 거짓이므로
$C=0$

이상에서 $A=100$, $B=10$, $C=0$이므로
$A+B+C=100+10+0$
$=110$

정답 110

22. 출제의도 : 도함수를 활용하고 함수의 극대, 극소를 고려하여 조건을 만족시키는 삼차함수를 찾아 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
주어진 조건을 만족시키려면 열린구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 두 점 $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$를 지나는 직선의 기울기와 두 점 $(x_2, f(x_2))$, $(x_3, f(x_3))$을 지나는 직선의 기울기의 부호가 다른 세 실수 x_1, x_2, x_3이 존재해야 하는데, 그러려면 극대 또는 극소가 되는 점이 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재해야 한다.
이때 $f(x)=x^3-2ax^2$에서
$f'(x)=3x^2-4ax$
이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 a의 값의 범위에 따라 다음과 같이 나누어 생각할 수 있다.
(ⅰ) $a>0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

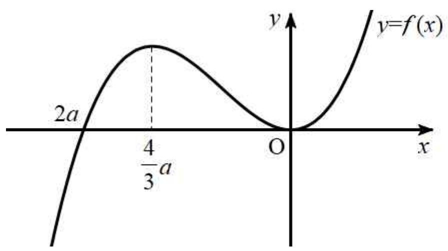
이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=3$, $k=4$가 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<3$, $\frac{4}{3}a>4$

$3<a<\frac{27}{8}$

그런데 이 부등식을 만족시키는 정수 a는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a<0$일 때



$k=-1$일 때 $x=0$이 구간 $\left(-1, \frac{1}{2}\right)$에 존재하므로 조건을 만족시킨다.

또, $x=\frac{4}{3}a$가 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재하려면

$k<\frac{4}{3}a<k+\frac{3}{2}$

이므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<k<\frac{4}{3}a$

이어야 한다.

이때 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되려면 이 구간에 $k=-4$, $k=-3$이 존재해야 하므로

$\frac{4}{3}a-\frac{3}{2}<-4$, $\frac{4}{3}a>-3$

$-\frac{9}{4}<a<-\frac{15}{8}$

즉, $a=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$이므로

$f(x)=x^3+4x^2$

$f'(x)=3x^2+8x$

따라서

$f'(10)=3\times10^2+8\times10=380$

정답 380

■ [선택: 미적분]

23. ⑤	24. ④	25. ①	26. ②	27. ③
28. ②	29. 5	30. 24		

23. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5n}{\sqrt{n^2+9n}+\sqrt{n^2+4n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{9}{n}}+\sqrt{1+\frac{4}{n}}}$$

$$=\frac{5}{2}$$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{5(t^2+1)-5t\times 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{3}{t^2+1}\times 2t$$

$$=\frac{6t}{t^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$=\frac{\frac{6t}{t^2+1}}{\frac{-5t^2+5}{(t^2+1)^2}}$$

$$=\frac{6t(t^2+1)}{-5t^2+5}$$

따라서 $t=2$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{6\times 2\times(2^2+1)}{-5\times 2^2+5}=\frac{60}{-15}=-4$$

정답 ④

25. **출제의도** : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$에서

$x\to 0$일 때, (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

이때 함수 $2^{ax+b}-8$은 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to 0}(2^{ax+b}-8)=2^b-8=0$$

$$2^b=8$$

$$b=3$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+3}-8}{2^{3x}-1}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{8(2^{ax}-1)}{2^{3x}-1}$$

$$=\frac{8a}{3}\times\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^{ax}-1}{ax}}{\frac{2^{3x}-1}{3x}}$$

$$=\frac{8a}{3}\times\frac{\ln 2}{\ln 2}$$

$=\frac{8a}{3}$

이므로

$\frac{8a}{3}=16$에서

$a=6$

따라서

$a+b=6+3=9$

정답 ①

26. 출제의도 : 미분법을 이용하여 방정식이 서로 다른 실근의 개수가 2일 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x^2-5x+2\ln x=t$ 에서

$f(x)=x^2-5x+2\ln x$라 하면

$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}$

$=\frac{2x^2-5x+2}{x}$

$=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$

따라서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)		$\frac{1}{2}$		2	
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗

이때 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-5\times\frac{1}{2}+2\ln\frac{1}{2}$

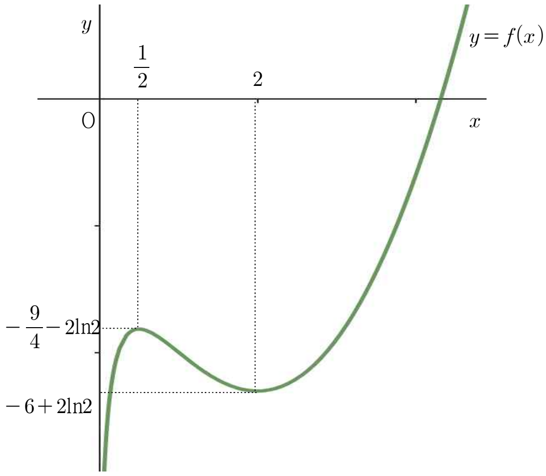
$=-\frac{9}{4}-2\ln2$

극솟값은

$f(2)=2^2-5\times2+2\ln2$

$=-6+2\ln2$

이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



이때 x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$이 서로 다른 실근의 개수가 2가 되기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수가 2가 되어야 하므로

$t=-\frac{9}{4}-2\ln2$ 또는 $t=-6+2\ln2$

따라서 모든 실수 t의 값의 합은

$\left(-\frac{9}{4}-2\ln2\right)+(-6+2\ln2)=-\frac{33}{4}$

정답 ②

27. 출제의도 : 두 직선이 이루는 예각의 크기를 이용하여 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\sin x$에서 $y'=\cos x$ 이므로

곡선 $y=\sin x$위의 점 $\mathrm{P}(t,\sin t)$에서의 접선의 기울기는 $\cos t$이다.

따라서 점 P에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기가 θ이므로

$\tan\theta=\left|\frac{\cos t-(-1)}{1+\cos t\times(-1)}\right|$

$$=\left|\frac{\cos t+1}{1-\cos t}\right|$$

그런데 $0<t<\pi$ 이므로

$$\tan\theta=\frac{\cos t+1}{1-\cos t}$$

따라서

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\frac{\cos t+1}{1-\cos t}}{(\pi-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

이므로

$\pi-t=x$라 하면 $t\to\pi-$일 때 $x\to0+$이고

$$\cos t=\cos(\pi-x)=-\cos x$$

이므로

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$$

$$=\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2(1-\cos t)}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos x}{x^2(1+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)^2}$$

$$=\lim_{x\to0+}\left\{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{(1+\cos x)^2}\right\}$$

$$=1^2\times\frac{1}{2^2}$$

$$=\frac{1}{4}$$

정답 ③

28. **출제의도** : 함수의 그래프의 개형을 이용하여 a, b에 대한 관계식을 구한 후, 상수 a, b의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

양변에 $x=0$을 대입하면

$\{f(0)\}^2+2f(0)=a+b$ …… ㉠

조건 (가)에서

양변에 $x=2$를 대입하면

$\{f(2)\}^2+2f(2)=a+b$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\{f(0)\}^2+2f(0)=\{f(2)\}^2+2f(2)$

$\{f(2)-f(0)\}\{f(2)+f(0)+2\}=0$

$f(2)=f(0)$ 또는 $f(2)+f(0)+2=0$

$f(2)=f(0)$이면

조건 (나)를 만족시키지 못하므로

$f(2)+f(0)+2=0$ …… ㉢

조건 (나)에서

$f(0)=f(2)+1$

을 ㉢에 대입하면

$2f(2)+3=0$

$$f(2)=-\frac{3}{2}$$

조건 (나)에서

$$f(0)=f(2)+1=-\frac{3}{2}+1=-\frac{1}{2}$$

$f(0)=-\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=a+b$$

$a+b=-\frac{3}{4}$ …… ㉣

한편, 조건 (가)에서

양변에 1을 더하면

$$\{f(x)\}^2+2f(x)+1=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$$

$$\{f(x)+1\}^2=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$$

$g(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$이라 하면

$\{f(x)+1\}^2=g(x)$ …… ㉤

에서 모든 실수 x에 대하여

$g(x) \geq 0$

이고,

$f(x)=-1\pm\sqrt{g(x)}$

이다.

$f(0)=-\frac{1}{2}>-1,$

$f(2)=-\frac{3}{2}<-1$

이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $f(c)=-1$인 상수 c가 열린 구간 $(0,\ 2)$에 적어도 하나 존재한다.

$f(c)=-1\pm\sqrt{g(c)}=-1$에서

$g(c)=0$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분 가능하고 모든 실수 x에 대하여

$g(x) \geq 0$이므로 함수 $g(x)$는

$x=c(0<c<2)$에서 극소이다.

한편,

$$g'(x)=3a\cos^2\pi x\times(-\pi\sin\pi x)\times e^{\sin^2\pi x}$$
$$+a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}\times 2\sin\pi x\times\pi\cos\pi x$$
$$=a\pi\cos^2\pi x\times\sin\pi x\times e^{\sin^2\pi x}\times(-3+2\cos^2\pi x)$$

열린구간 $(0,\ 2)$에서

$\cos^2\pi x \geq 0,$
$e^{\sin^2\pi x}>0,$
$-3+2\cos^2\pi x<0$

이고,

$\sin\pi x=0$에서

$x=1$

이때, $a>0$이므로 열린구간 $(0,\ 2)$에서 함수 $g(x)$는 $x=1$에서만 극소이다.

따라서 $c=1$이므로

$g(1)=0$이다.

ㅁ의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)+1\}^2=g(1)$에서

$\{f(1)+1\}^2=0$

$f(1)=-1$

조건 (가)에서

양변에 $x=1$을 대입하면

$\{f(1)\}^2+2f(1)=-a+b$

$-a+b=-1 \quad \cdots\cdots$ ㅂ

ㄹ, ㅂ을 연립하면

$a=\frac{1}{8},\ b=-\frac{7}{8}$

따라서

$a\times b=\frac{1}{8}\times\left(-\frac{7}{8}\right)=-\frac{7}{64}$

정답 ②

29. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$에서

양변을 x에 대하여 미분하면

$$2x-2y-2x\frac{dy}{dx}+4y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}\text{(단, } x\neq 2y)$$

점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{a-(a+k)}{a-2(a+k)}=\frac{k}{a+2k}$$

점 $\mathrm{B}(b,\ b+k)$에서의 접선의 기울기는

$$\frac{b-(b+k)}{b-2(b+k)}=\frac{k}{b+2k}$$

두 점 A, B에서의 접선이 서로 수직이므로

$$\frac{k}{a+2k}\times\frac{k}{b+2k}=-1$$

$ab+2(a+b)k+5k^2=0 \quad \cdots\cdots$ ㉠

점 A가 곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$

즉, $(x-y)^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$k^2+(a+k)^2=15 \quad \cdots\cdots$ ㉡

점 B가 곡선 $x^2-2xy+2y^2=15$

즉, $(x-y)^2+y^2=15$ 위의 점이므로

$k^2+(b+k)^2=15$ ...... ㉢

㉡, ㉢에서

$(a+k)^2=(b+k)^2$

$(a-b)(a+b+2k)=0$

$a \neq b$이므로

$a+b=-2k$ ...... ㉣

㉣을 ㉠에 대입하면

$ab-4k^2+5k^2=0$

$k^2=-ab$ ...... ㉤

㉡에서

$2k^2+2ak+a^2=15$

㉣, ㉤을 위 식에 대입하면

$-2ab+a(-a-b)+a^2=15$

$ab=-5$

따라서

$k^2=-ab=-(-5)=5$

정답 5

30. **출제의도** : 조건을 만족시키는 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 일반항을

$a_n=a_1r^{n-1}$

이라 하자. 이때 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $a_1 \neq 0$이다.

(i) $r>1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(ii) $r=1$인 경우

a_n의 값이 일정한 값을 가지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iii) $r=-1$인 경우

a_n의 값이 a_1, $-a_1$, a_1, $-a_1$, a_1, $\cdots$이 반복되므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(iv) $r<-1$인 경우

a_n의 절댓값이 한없이 커지므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

(v) $r=0$인 경우

a_n의 값이 첫째항을 제외하고 모두 0이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1<r<0$ 또는 $0<r<1$ 이다.

그런데 $b_3=-1$ 이므로 $a_3 \leq -1$ 이다.

즉 $a_1r^2 \leq -1$ 이다.

그런데 $0<r^2<1$ 이므로

$a_1 \leq -1$

따라서 $b_1=-1$ 이다.

또한 $a_1 \leq -1$ 이므로 $0<r<1$ 이면 a_n의 모든 항은 음수이므로 주어진 조건을 만족시킬 수 없다.

따라서 $-1<r<0$ 이다.

① $a_2=a_1r \leq -1$일 때

$r \geq -\dfrac{1}{a_1}>0$ 이므로 모순이다.

따라서 $a_2=a_1r>-1$ 이므로

$b_2=a_2=a_1r$

② $b_3=-1$ 이므로 $a_3=a_1r^2 \leq -1$

③ $a_4=a_1r^3 \leq -1$일 때

$a_4=a_1r^3=a_1r^2 \times r \geq -r>0$

이므로 모순이다.

즉 $a_4>-1$ 이므로

$b_4=a_4=a_1r^3$

④ $a_5=a_1r^4 \leq -1$일 때

$b_5=-1$

인데

$b_1+b_3+b_5=-3$

이므로 조건 (가)에 의하여 모순이다.

$b_5 = a_5 = a_1 r^4$

⑤ $a_6 = a_4 r^2$ 이고 $a_4 > -1$ 이므로

$a_6 > -r^2 > -1$

따라서

$b_6 = a_6 = a_1 r^5$

같은 방법으로 생각하면

$b_7 = a_7,\ b_8 = a_8,\ b_9 = a_9,\ \cdots$

이므로

$$b_n = \begin{cases} -1 & (n=1,\ n=3) \\ a_1 r^{n-1} & (n=2,\ n \geq 4) \end{cases}$$

이다.

조건 (가)에서

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$

$= -1 + (-1) + a_1 r^4 + a_1 r^6 + a_1 r^8 + \cdots$

$= -2 + \dfrac{a_1 r^4}{1-r^2} = -3$

$\dfrac{a_1 r^4}{1-r^2} = -1$

$a_1 r^4 = r^2 - 1 \cdots$ ㉠

조건 (나)에서

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$

$= a_1 r + a_1 r^3 + a_1 r^5 + \cdots$

$= \dfrac{a_1 r}{1-r^2} = 8$

$a_1 r = 8 - 8r^2 = 8(1-r^2) \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a_1 r = -8 a_1 r^4$

이므로

$r^3 = -\dfrac{1}{8}$

즉 $r = -\dfrac{1}{2}$이므로 ㉡에 대입하면

$-\dfrac{1}{2} a_1 = 6,\ a_1 = -12$

따라서 $a_n = -12\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ 이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left| -12\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \right|$

$= \sum_{n=1}^{\infty} 12\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= \dfrac{12}{1-\dfrac{1}{2}}$

$= 24$

정답 24

[다른풀이]

$b_2,\ b_3,\ \cdots$의 값을 조사하면 다음과 같다.

(1) b_2의 값

$a_1 \leq -1$이고 $-1 < r < 0$이므로

$a_2 > 0$

(2) b_3의 값

주어진 조건으로부터

$b_3 = -1$

(3) b_4의 값

$a_3 \leq -1$이고 $-1 < r < 0$이므로

$a_4 > 0$

그러므로

$b_4 = a_4$

그러므로 $a_{2n} > 0$이므로 $b_{2n} = a_{2n}$

조건 (나)에서

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = 8$

이므로

$ar + ar^3 + ar^5 + \cdots = 8$

한편, 조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1} = -3 \quad ---㉡$$

이고 $b_1 = b_3 = -1$이고 $b_5 = ar^4$, $b_7 = ar^6$,

$\cdots$

라 하면 ㉡은

$$(-1)+(-1)+r^3\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n} = -3$$

$r^3 \times 8 = -1$

$$r = -\frac{1}{2}$$