정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	⑤	3	⑤	4	③	5	②
6	④	7	①	8	②	9	②	10	③
11	①	12	③	13	①	14	⑤	15	④
16	9	17	20	18	65	19	22	20	54
21	13	22	182						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$4^{1-\sqrt{3}}\times 2^{2\sqrt{3}-1}=2^{2(1-\sqrt{3})}\times 2^{2\sqrt{3}-1}$

$=2^{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1}$

$=2$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2-7$ 이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=5$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\dfrac{3}{5}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\dfrac{16}{25}$

$\sin\theta\cos\theta<0$ 이므로 $\sin\theta=-\dfrac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta+2\cos\theta=\left(-\dfrac{4}{5}\right)+\dfrac{6}{5}=\dfrac{2}{5}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)+\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=0+1=1$

5. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$x=1$ 에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(3x+a)=a+3$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(2x^3+bx+1)=b+3$

$f(1)=a+3$

$a+3=b+3$, $a=b$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{3x+a-(a+3)}{x-1}=3$

$\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{(2x^3+ax+1)-(a+3)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}=a+6$

$3=a+6$, $a=-3$, $b=-3$

따라서 $a+b=-6$

6. [출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r 라 하자.

$a_n=ar^{n-1}$ (단, n 은 자연수)

${a_3}^2=a_6$ 이므로 $(ar^2)^2=ar^5$, $ar^4(a-r)=0$,

$a=r$, $a_n=r^n$

$a_2-a_1=2$ 이므로 $r^2-r=2$

$(r-2)(r+1)=0$

$r=2$ 또는 $r=-1$

모든 항이 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_5=r^5=32$

7. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax-9$ 에서

$f'(1)=3+2a-9=0$ 이므로 $a=3$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $f(-3)=-27+27+27+4=31$

8. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 문제 해결하기

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$

$v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$

점 P가 $t=1$, $t=3$ 에서 운동 방향을

바꾸므로 $a=3$

점 P가 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지

움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^3|v(t)|dt$

$=\displaystyle\int_0^1 v(t)dt+\int_1^3\{-v(t)\}dt$

$=\displaystyle\int_0^1(t^2-4t+3)dt+\int_1^3(-t^2+4t-3)dt$

$=\left[\dfrac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\dfrac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$

$=\dfrac{4}{3}+\dfrac{4}{3}=\dfrac{8}{3}$

9. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

(i) n 이 짝수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$ 의 실근은

$x=\pm\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱이 양수이므로 모순

(ii) n 이 홀수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$ 의 실근은

$x=\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱은

$2^{\frac{3}{n}}\times 2^{\frac{3}{2n}}\times\left(-2^{\frac{3}{2n}}\right)=-2^{\frac{6}{n}}=-4$

$2^{\frac{6}{n}}=2^2$, $\dfrac{6}{n}=2$

따라서 (i), (ii)에 의하여 $n=3$

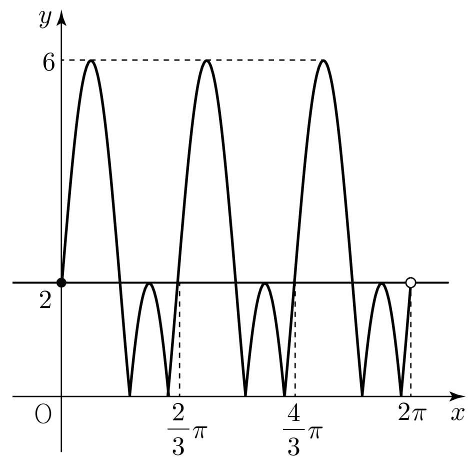
10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각함수 $y=4\sin 3x+2$ 는

주기가 $\dfrac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2 이므로

$0\le x<2\pi$ 일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$ 는

다음과 같다.



따라서 $0\le x<2\pi$ 일 때,

곡선 $y=|4\sin 3x+2|$ 와 직선 $y=2$ 가 만나는

서로 다른 점의 개수는 9

11. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

$f(1+x)+f(1-x)=0$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (단, a, b 는 상수)

조건 (나)에서

$\displaystyle\int_{-1}^3 f'(x)dx=f(3)-f(-1)=12$ ⋯ ㉠

$f(1+x)+f(1-x)=0$ 에 $x=2$ 를 대입하면

$f(3)+f(-1)=0$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$f(3)=6$, $f(-1)=-6$

$f(3)=2(9+3a+b)=6$, $3a+b=-6$ ⋯ ㉢

$f(-1)=-2(1-a+b)=-6$, $a-b=-2$ ⋯ ㉣

두 식 ㉢, ㉣을 연립하면 $a=-2$, $b=0$

$f(x)=x(x-1)(x-2)$

따라서 $f(4)=24$

12. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자.

조건 (가)에 의하여

$\displaystyle\sum_{k=1}^{2m+1}a_k=\dfrac{(2m+1)\{2a+5\times(2m+1-1)\}}{2}$

$=(2m+1)(a+5m)<0$

$2m+1>0$ 이므로 $a+5m=a_{m+1}<0$

(i) $a_{m+1}=-1$ 인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=11$ 이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-1$ 이므로

$a_{m+6}=24$, $a_{m+7}=29$

$24<a_{21}<29$ 인 a_{21} 이 존재하지 않는다.

(ii) $a_{m+1}=-2$ 인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=12$ 이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-2$ 이므로 $a_{m+7}=28$

따라서 $m+7=21$ 이므로 $m=14$

(iii) $a_{m+1}\le -3$ 인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|\ge 13$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $m=14$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle \mathrm{AFC}=\alpha$, $\angle \mathrm{CDE}=\beta$라 하자.

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 이므로 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\angle \mathrm{ECD}=\angle \mathrm{EFB}=\pi-\alpha$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{ED}}}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{\overline{\mathrm{EC}}}{\sin\beta}=10\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{ED}}=10\sqrt{2}\times\sin\alpha=10\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=6\sqrt{5}$

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$180=x^2+100-2\times x\times10\times\cos(\pi-\alpha)$

$\quad=x^2+100+2\times x\times10\times\cos\alpha$

$\quad=x^2+2\sqrt{10}x+100$

$x^2+2\sqrt{10}x-80=0$ 이고 $x>0$ 이므로

$x=-\sqrt{10}+\sqrt{10+80}=2\sqrt{10}$

$\angle \mathrm{ABE}=\angle \mathrm{CDE}=\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{10}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{5}$

두 삼각형 BEF, DEC는 서로 닮음이고

닮음비가 $1:3$이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

따라서 삼각형 AFE의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{10}}{3}\times2\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{20}{3}$

14. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0-}g(x)g(x-3)=-f(0)\times f(-3)$

$\lim\limits_{x\to0+}g(x)g(x-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

$g(0)g(-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개이므로

$k=-3$ 또는 $k=3$

(ⅰ) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 연속이고, $x=3$에서 불연속인 경우

$\lim\limits_{x\to-3-}g(x)g(x-3)=f(-3)\times f(-6)$

$\lim\limits_{x\to-3+}g(x)g(x-3)=-f(-3)\times f(-6)$

$g(-3)g(-6)=-f(-3)\times f(-6)$ 이므로

$f(-3)\times f(-6)=0$ ⋯ ㉠

$\lim\limits_{x\to3-}g(x)g(x-3)=f(3)\times\{-f(0)\}$

$\lim\limits_{x\to3+}g(x)g(x-3)=f(3)\times f(0)$

$g(3)g(0)=f(3)\times f(0)$ 이므로

$f(3)\times f(0)\neq0$ ⋯ ㉡

$f(-3)=f(0)$ 이므로

㉠, ㉡에 의하여 $f(-6)=0$

(ⅱ) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=3$에서 연속이고, $x=-3$에서 불연속인 경우

(ⅰ)과 같은 방법에 의하여 $f(3)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(-6)=0$ 또는 $f(3)=0$ 이므로 $f(-6)\times f(3)=0$ (참)

ㄷ. $k=-3$ 이므로 $f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$라 하자.

(단, a, b는 상수)

$f(-3)=f(0)$ 이므로

$-6(9-3a+b)=-3b$, $b=6a-18$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+6a-18)$

(ⅰ) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 세 실근의 합은

$3+(-a)=-1$, $a=4$

방정식 $x^2+4x+6=0$은 실근을 갖지 않으므로 모순

(ⅱ) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 중근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합은

$3+\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-1$, $a=8$

방정식 $x^2+8x+30=0$은 중근을 갖지 않으므로 모순

(ⅲ) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3과 -4를 실근으로 갖는 경우

$3+(-4)=-a$, $3\times(-4)=6a-18$에서

$a=1$

$f(x)=(x-3)(x^2+x-12)=(x-3)^2(x+4)$

그러므로 $g(-1)=-f(-1)=-48$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

(ⅰ) $4\le n\le7$인 모든 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수가 아닌 경우

$a_5=a_4+6$, $a_6=a_5+6=a_4+12$,

$a_7=a_6+6=a_4+18$ 이므로

$\sum\limits_{k=4}^{7}a_k=4a_4+36=40$, $a_4=1$

순서쌍 (a_1, a_2, a_3)은 $(27, 9, 3)$

그러므로 $a_1=27$

(ⅱ) $4\le n\le7$인 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수인 n이 존재하는 경우

$a_n=3^m$ (m은 자연수)인 n $(4\le n\le7)$이 존재한다.

a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m\ge4)$가 존재하면

$\sum\limits_{k=4}^{7}a_k>40$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m\ge4)$가 존재하지 않는다.

또한 a_4, a_5, a_6, a_7 중 27이 존재하지 않으면 $n=4, 5, 6, 7$에 대하여

$\sum\limits_{k=4}^{7}a_k<40$

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이다.

만약 a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이면

$\sum\limits_{k=4}^{7}a_k>40$ 이므로 $a_4=27$

$a_4+a_5+a_6+a_7=27+9+3+1=40$

그러므로 $a_4=27$일 때 조건을 만족시킨다.

$a_1<300$을 만족시키는

순서쌍 (a_1, a_2, a_3)은

$(69, 75, 81)$, $(237, 243, 81)$ 이므로

$a_1=69$ 또는 $a_1=237$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은 $27+69+237=333$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

로그의 진수 조건에 의하여

$x-5>0$ 이고 $x+7>0$ 이므로 $x>5$ ⋯ ㉠

$\log_4(x-5)^2=\log_4(x+7)$, $(x-5)^2=x+7$

$x^2-10x+25=x+7$, $x^2-11x+18=0$

$(x-2)(x-9)=0$, $x=2$ 또는 $x=9$

㉠에 의하여 $x=9$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$f(x)=\int(9x^2-8x+1)dx$

$\quad=3x^3-4x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=3-4+1+C=10$, $C=10$

$f(x)=3x^3-4x^2+x+10$

따라서 $f(2)=24-16+2+10=20$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum\limits_{k=1}^{10}a_k+\sum\limits_{k=1}^{10}3=40$, $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k=5$

$\sum\limits_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum\limits_{k=1}^{10}a_k-\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=-10$

$\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=15$

따라서 $\sum\limits_{k=1}^{10}(b_k+5)=\sum\limits_{k=1}^{10}b_k+\sum\limits_{k=1}^{10}5=65$

19. [출제의도] 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=x^3-10$, $g(x)=x^3+k$라 하자.

$f'(x)=3x^2$ 이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2, -18)$에서의

접선의 기울기는 $f'(-2)=12$

접선의 방정식은

$y-(-18)=12\{x-(-2)\}$, $y=12x+6$

점 Q의 좌표를 (α, α^3+k)라 하자.

(단, α는 상수)

$g'(x)=3x^2$ 이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(\alpha, \alpha^3+k)$에서의

접선의 기울기는 $g'(\alpha)=3\alpha^2$

접선의 방정식은 $y-(\alpha^3+k)=3\alpha^2(x-\alpha)$,

$y=3\alpha^2x-2\alpha^3+k$

두 접선이 일치하므로 $3\alpha^2=12$, $-2\alpha^3+k=6$

$\alpha=2$이면 $k=22$, $\alpha=-2$이면 $k=-10$

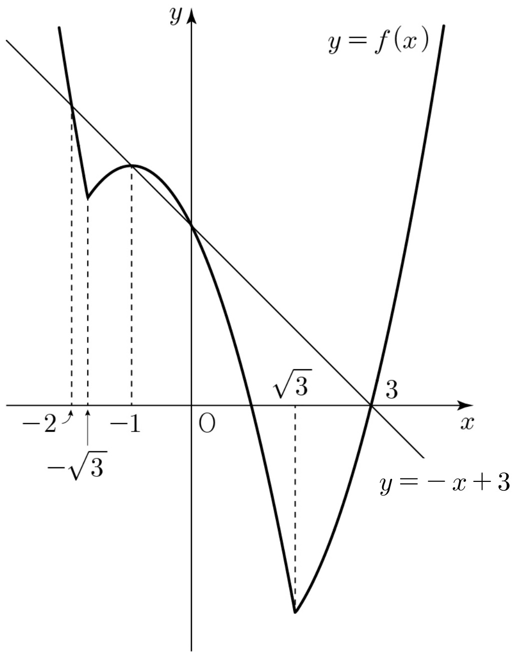
$k>0$ 이므로 $k=22$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=|x^2-3|-2x$

$$=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x\le-\sqrt{3} \text{ 또는 } x\ge\sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}) \end{cases}$$

x_1, x_4 는 이차방정식 $x^2-2x-3=-x+t$ 의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여
$x_1+x_4=1$, $x_1x_4=-t-3$
$x_4-x_1=5$ 이므로 $x_1=-2$, $x_4=3$
$x_1x_4=-t-3=-6$, $t=3$
x_2, x_3 은 이차방정식 $-x^2-2x+3=-x+3$ 의 두 근이므로 $x_2=-1$, $x_3=0$



닫힌구간 $[0,\ 3]$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\{(-x+3)-(-x^2-2x+3)\}dx$$

$$+\int_{\sqrt{3}}^3\{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{\sqrt{3}}^3$$

$$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3}$$

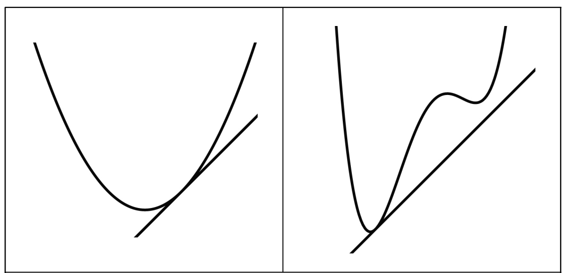
따라서 $p\times q=\dfrac{27}{2}\times 4=54$

21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

점 D 의 좌표를 $(t,\ 0)\ (t>0)$ 이라 하자.
점 D 는 선분 CA 를 $5:3$ 으로 외분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{CA}}:\overline{\mathrm{AD}}=2:3$
점 A 의 x 좌표는 $\dfrac{2}{5}t$, $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{5}t,\ \dfrac{6}{5}t\right)$
점 C 의 y 좌표는 $2t$, $\mathrm{C}(0,\ 2t)$
직선 BC 의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{3}x+2t$
점 B 는 두 직선 $y=3x$, $y=-\dfrac{1}{3}x+2t$ 의 교점이므로 $\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{5}t,\ \dfrac{9}{5}t\right)$
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}t$
삼각형 ABC 의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2=\dfrac{t^2}{5}=20$
$t^2=100$ 이므로 $t=10$
$\mathrm{A}(4,\ 12)$, $\mathrm{B}(6,\ 18)$ 이므로
$12=2^{4-m}+n$, $18=2^{6-m}+n$
$18-2^{6-m}=12-2^{4-m}$
$2^{6-m}-2^{4-m}=6$
$64\times 2^{-m}-16\times 2^{-m}=6$
$48\times 2^{-m}=6$, $2^{-m}=\dfrac{1}{8}$
$m=3$, $n=10$
따라서 $m+n=13$

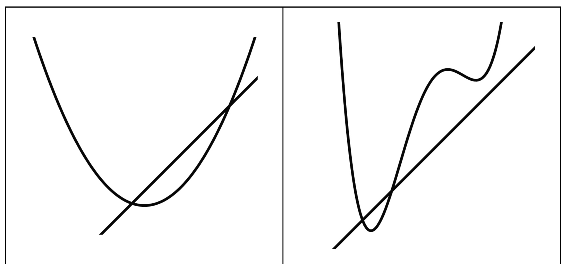
22. [출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

방정식 $g(x)=0$ 에서
$x=t$ 일 때 $f(t)-t-f(t)+t=0$ 이므로 $g(t)=0$
$x\neq t$ 일 때 $f(x)-x-f(t)+t=0$ 에서
$\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$ 이다.
그러므로 함수 $h(t)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t,\ f(t))$ 를 지나고 기울기가 1 인 직선 l 과 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 개수이다.
임의의 실수 s 에 대하여 $h(s)\geq 1$ 이다.
(ⅰ) $h(s)=1$ 인 경우

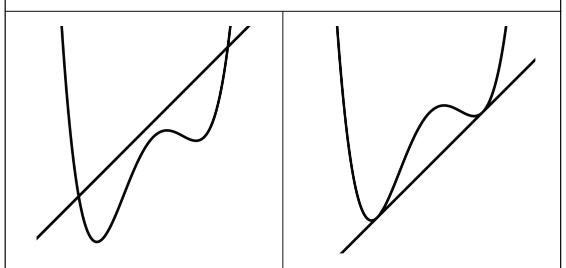


$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$ 이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=1$

(ⅱ) $h(s)=2$ 인 경우

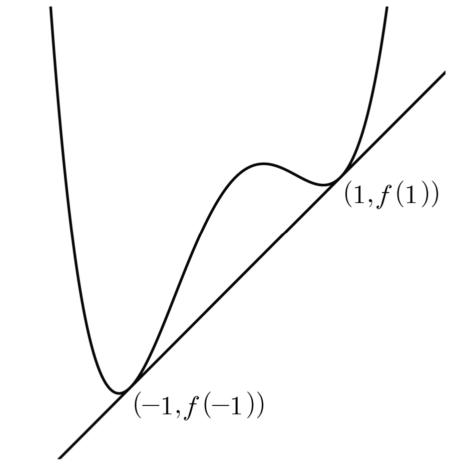


$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$ 이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$

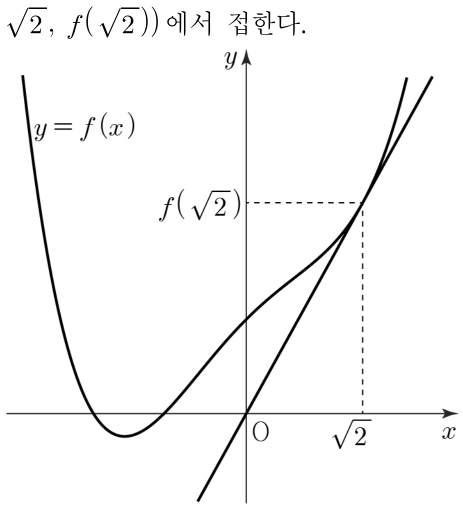


$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$ 이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$	$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$ 이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=2$

(ⅲ) $h(s)\geq 3$ 인 경우
$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$ 이거나 극한값이 존재하지 않는다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 l 이 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(1,\ f(1))$ 에서 접할 때
$\lim\limits_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim\limits_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$ 를 만족시킨다.



함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a,
직선 l 의 방정식을 $y=x+b$ 라 하자.
(단, a, b 는 상수)
$f(x)-(x+b)=a(x-1)^2(x+1)^2$
$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+b$
조건 (나)에서 $\displaystyle\int_0^{\alpha}\{f(x)-|f(x)|\}dx=0$ 을 만족시키는 실수 α 의 최솟값이 -1 이므로
$-1\leq x\leq 0$ 에서 $f(x)\geq 0$, $f(-1)\geq 0$
$f(-1)>0$ 이면 실수 α 의 최솟값이 -1 이 아니므로 $f(-1)=0$
$f(-1)=-1+b=0$, $b=1$
$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$
조건 (다)에서
$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x\{f(u)-ku\}du=f(x)-kx\geq 0$
$f(x)\geq kx$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=kx$ 가 접하거나 만나지 않는다.
실수 k 의 최댓값이 $f'(\sqrt{2})$ 이므로 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=f'(\sqrt{2})x$ 가 점 $(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$ 에서 접한다.



$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$
$\quad=ax^4-2ax^2+x+a+1$
$f'(x)=4ax^3-4ax+1$
$f(\sqrt{2})=4a-4a+\sqrt{2}+a+1=a+\sqrt{2}+1$
$f'(\sqrt{2})=8\sqrt{2}a-4\sqrt{2}a+1=4\sqrt{2}a+1$
$f(\sqrt{2})=f'(\sqrt{2})\times\sqrt{2}$ 이므로
$a+\sqrt{2}+1=(4\sqrt{2}a+1)\times\sqrt{2}$
$\quad=8a+\sqrt{2}$
$a=\dfrac{1}{7}$, $f(x)=\dfrac{1}{7}(x-1)^2(x+1)^2+x+1$
따라서 $f(6)=\dfrac{1}{7}\times 5^2\times 7^2+6+1=182$

확률과 통계 정답

23	③	24	①	25	②	26	④	27	⑤
28	①	29	24	30	150				

확률과 통계 해설

23. [출제의도] 이항계수 계산하기

다항식 $(x^2+2)^6$ 의 전개식의 일반항은

${}_6\mathrm{C}_r \times (x^2)^{6-r} \times 2^r = {}_6\mathrm{C}_r \times 2^r \times x^{12-2r}$

$(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$

x^8 의 계수는 $r=2$ 일 때이다.

따라서 ${}_6\mathrm{C}_2 \times 2^2 = 15\times 4 = 60$

24. [출제의도] 독립시행의 확률 이해하기

한 개의 주사위를 네 번 던질 때 나오는 네 눈의 수의 곱이 27 의 배수이려면 3 의 배수의 눈이 세 번 또는 네 번 나와야 한다.

한 개의 주사위를 한 번 던질 때,

3 의 배수의 눈이 나오는 확률은 $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

한 개의 주사위를 네 번 던질 때, 3 의 배수의 눈이 나오는 횟수를 $X\ (X=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ 라 하면

$\mathrm{P}(X=3)={}_4\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^1=\dfrac{8}{81}$

$\mathrm{P}(X=4)={}_4\mathrm{C}_4\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\left(\dfrac{2}{3}\right)^0=\dfrac{1}{81}$

따라서 $\dfrac{8}{81}+\dfrac{1}{81}=\dfrac{1}{9}$

25. [출제의도] 확률분포 이해하기

주어진 확률분포에서 $a+(a+b)+b=1$

$a+b=\dfrac{1}{2}$ ⋯ ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=a+4(a+b)+9b=a+5$

$4a+13b=5$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{3}$

따라서 $b-a=\dfrac{1}{6}$

26. [출제의도] 여사건의 확률 이해하기

주머니 A 에서 임의로 꺼낸 1 개의 공이 흰 공인 사건을 X, 주머니 B 에서 임의로 꺼낸 3 개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공인 사건을 Y 라 하자.

$\mathrm{P}(X)=\dfrac{1}{3}$, $\mathrm{P}(X^C)=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

(ⅰ) 주머니 A 에서 임의로 꺼낸 공이 흰 공일 때 주머니 B 에서 임의로 꺼낸 3 개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은

$1-\dfrac{{}_3\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=1-\dfrac{1}{35}=\dfrac{34}{35}$

(ⅱ) 주머니 A 에서 임의로 꺼낸 공이 검은 공일 때 주머니 B 에서 임의로 꺼낸 3 개의 공 중에서 적어도 한 개가 흰 공일 확률은

$1-\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_7\mathrm{C}_3}=1-\dfrac{4}{35}=\dfrac{31}{35}$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\mathrm{P}(Y)=\mathrm{P}(X\cap Y)+\mathrm{P}(X^C\cap Y)$

$=\mathrm{P}(X)\mathrm{P}(Y|X)+\mathrm{P}(X^C)\mathrm{P}(Y|X^C)$

$=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{34}{35}+\dfrac{2}{3}\times\dfrac{31}{35}=\dfrac{32}{35}$

27. [출제의도] 같은 것이 있는 순열 이해하기

주어진 7 장의 카드를 일렬로 나열할 때, 이웃하는 두 카드에 적힌 수의 곱이 모두 1 이하가 되도록 나열하려면 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$와 $\boxed{2}$, $\boxed{2}$는 각각 서로 이웃하지 않아야 한다.

(ⅰ) $\boxed{1}$, $\boxed{1}$이 서로 이웃하지 않는 경우

$\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{0}$ 사이와 양 끝에 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{2}$를 하나씩 넣는 경우의 수와 같으므로

$\dfrac{4!}{2!\,2!}=6$

(ⅱ) $\boxed{1}$, $\boxed{1}$이 서로 이웃하는 경우

$\boxed{0}$, $\boxed{0}$, $\boxed{0}$ 사이와 양 끝에 $\boxed{1}$, $\boxed{1}$을 이웃하게 넣는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1=4$

남은 자리에 $\boxed{2}$, $\boxed{2}$를 하나씩 넣는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2=3$

그러므로 $4\times 3=12$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $6+12=18$

28. [출제의도] 조건부확률을 활용하여 문제 해결하기

$a_k \le k$ 를 만족시키는 자연수 $k\ (1\le k\le 5)$ 의 최솟값이 3 인 사건을 A,

$a_1+a_2=a_4+a_5$ 인 사건을 B 라 하자.

$a_k\le k$ 를 만족시키는 자연수 $k\ (1\le k\le 5)$ 의 최솟값이 3 이면, $a_1>1$, $a_2>2$, $a_3\le 3$ 이다.

(Ⅰ) $a_3=1$ 이고 $a_1>1$, $a_2>2$ 일 확률은

$\dfrac{3\times 3\times 2!}{5!}=\dfrac{3}{20}$

(Ⅱ) $a_3=2$ 이고 $a_1>1$, $a_2>2$ 일 확률은

$\dfrac{3\times 2\times 2!}{5!}=\dfrac{1}{10}$

(Ⅲ) $a_3=3$ 이고 $a_1>1$, $a_2>2$ 일 확률은

$\dfrac{2\times 2\times 2!}{5!}=\dfrac{1}{15}$

(Ⅰ), (Ⅱ), (Ⅲ)에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\dfrac{3}{20}+\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{15}=\dfrac{9+6+4}{60}=\dfrac{19}{60}$

$a_1+a_2=a_4+a_5$ 이면

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=15$ 에서

$a_3=15-2(a_1+a_2)=2\{7-(a_1+a_2)\}+1$

이므로 a_3 의 값은 홀수이다.

(ⅰ) $a_3=1$ 인 경우

$a_1+a_2=7$ 이므로 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$ 는

$(2,\ 5)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$

(ⅱ) $a_3=3$ 인 경우

$a_1+a_2=6$ 이므로 순서쌍 $(a_1,\ a_2)$ 는 $(2,\ 4)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여

$\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{(3+1)\times 2!}{5!}=\dfrac{1}{15}$

따라서 $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\dfrac{1}{15}}{\dfrac{19}{60}}=\dfrac{4}{19}$

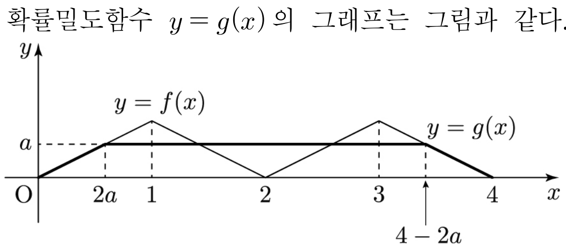
29. [출제의도] 연속확률변수의 확률밀도함수를 활용하여 추론하기

$\{g(x)-f(x)\}\{g(x)-a\}=0$ 이므로

$g(x)=f(x)$ 또는 $g(x)=a$

조건 (가)와 (나)에 의하여

확률밀도함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 그림과 같다.



$\mathrm{P}(0\le Y\le 4)=1$ 이므로

$\dfrac{1}{2}\times 2a\times a+(4-4a)\times a+\dfrac{1}{2}\times 2a\times a=1$

$2a^2-4a+1=0$, $a=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$

$0<a<\dfrac{1}{2}$ 이므로 $a=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, $1<5a<2$

$\mathrm{P}(0\le Y\le 5a)$

$=\mathrm{P}(0\le Y\le 2a)+\mathrm{P}(2a\le Y\le 5a)$

$=\dfrac{1}{2}\times 2a\times a+3a\times a=4a^2$

$=4\times\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2=6-4\sqrt{2}$

따라서 $p=6$, $q=4$ 이므로 $p\times q=24$

30. [출제의도] 중복조합을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 순서쌍 $(f(1),\ f(7))$ 은

$(1,\ 4)$, $(2,\ 5)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 7)$

조건 (나)에 의하여 $f(1)\le f(3)\le f(5)\le f(7)$ 이고 $f(2)\le f(4)\le f(6)$

조건 (다)에 의하여 $|f(2)-f(1)|$ 과 $f(1)+f(3)+f(5)+f(7)$ 의 값은 모두 3 의 배수인 자연수이다.

(ⅰ) $f(1)=1$, $f(7)=4$ 인 경우

$f(3)+f(5)=4$ 또는 $f(3)+f(5)=7$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$ 는

$(1,\ 3)$, $(2,\ 2)$, $(3,\ 4)$

$f(1)=1$ 이므로 $f(2)=4$ 또는 $f(2)=7$

$f(2)=4$ 이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$ 의 개수는 ${}_4\mathrm{H}_2$,

$f(2)=7$ 이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$ 의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$

${}_4\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=10+1=11$

그러므로 $3\times 11=33$

(ⅱ) $f(1)=2$, $f(7)=5$ 인 경우

$f(3)+f(5)=5$ 또는 $f(3)+f(5)=8$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$ 는

$(2,\ 3)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$

$f(1)=2$ 이므로 $f(2)=5$

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$ 의 개수는 ${}_3\mathrm{H}_2=6$

그러므로 $3\times 6=18$

(ⅲ) $f(1)=3$, $f(7)=6$ 인 경우

$f(3)+f(5)=6$ 또는 $f(3)+f(5)=9$

또는 $f(3)+f(5)=12$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$ 는

$(3,\ 3)$, $(3,\ 6)$, $(4,\ 5)$, $(6,\ 6)$

$f(1)=3$ 이므로 $f(2)=6$

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$ 의 개수는 ${}_2\mathrm{H}_2=3$

그러므로 $4\times 3=12$

(ⅳ) $f(1)=4$, $f(7)=7$ 인 경우

$f(3)+f(5)=10$ 또는 $f(3)+f(5)=13$

순서쌍 $(f(3),\ f(5))$ 는

$(4,\ 6)$, $(5,\ 5)$, $(6,\ 7)$

$f(1)=4$ 이므로 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=7$

$f(2)=1$ 이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$ 의 개수는 ${}_7\mathrm{H}_2$

$f(2)=7$ 이면

순서쌍 $(f(4),\ f(6))$ 의 개수는 ${}_1\mathrm{H}_2$

${}_7\mathrm{H}_2+{}_1\mathrm{H}_2=28+1=29$

그러므로 $3\times 29=87$

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ)에 의하여

$33+18+12+87=150$