정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	⑤	3	⑤	4	③	5	②
6	④	7	①	8	②	9	②	10	③
11	①	12	③	13	①	14	⑤	15	④
16	9	17	20	18	65	19	22	20	54
21	13	22	182						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$4^{1-\sqrt{3}}\times 2^{2\sqrt{3}-1}=2^{2(1-\sqrt{3})}\times 2^{2\sqrt{3}-1}$$
$$=2^{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1}$$
$$=2$$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2-7$ 이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=5$$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\frac{3}{5}$$

$$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{16}{25}$$

$\sin\theta\cos\theta<0$ 이므로 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta+2\cos\theta=\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)+\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=0+1=1$

5. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로
$x=1$ 에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1+}f(x)=f(1)$$

$$\lim_{x\to 1-}f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x+a)=a+3$$

$$\lim_{x\to 1+}f(x)=\lim_{x\to 1+}(2x^3+bx+1)=b+3$$

$f(1)=a+3$

$a+3=b+3$, $a=b$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{3x+a-(a+3)}{x-1}=3$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(2x^3+ax+1)-(a+3)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}=a+6$$

$3=a+6$, $a=-3$, $b=-3$

따라서 $a+b=-6$

6. [출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a, 공비를 r 라 하자.

$a_n=ar^{n-1}$ (단, n 은 자연수)

${a_3}^2=a_6$ 이므로 $(ar^2)^2=ar^5$, $ar^4(a-r)=0$,

$a=r$, $a_n=r^n$

$a_2-a_1=2$ 이므로 $r^2-r=2$

$(r-2)(r+1)=0$

$r=2$ 또는 $r=-1$

모든 항이 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_5=r^5=32$

7. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax-9$ 에서

$f'(1)=3+2a-9=0$ 이므로 $a=3$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

함수 $f(x)$ 는 $x=-3$ 에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $f(-3)=-27+27+27+4=31$

8. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 문제 해결하기

점 P 가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$

$v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$

점 P 가 $t=1$, $t=3$ 에서 운동 방향을
바꾸므로 $a=3$

점 P 가 시각 $t=0$ 에서 $t=3$ 까지
움직인 거리는

$$\int_0^3|v(t)|dt$$
$$=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^3\{-v(t)\}dt$$
$$=\int_0^1(t^2-4t+3)dt+\int_1^3(-t^2+4t-3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

9. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

(i) n 이 짝수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$ 의 실근은

$x=\pm\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱이 양수이므로 모순

(ii) n 이 홀수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$ 의 실근은

$x=\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱은

$$2^{\frac{3}{n}}\times 2^{\frac{3}{2n}}\times\left(-2^{\frac{3}{2n}}\right)=-2^{\frac{6}{n}}=-4$$

$$2^{\frac{6}{n}}=2^2,\ \frac{6}{n}=2$$

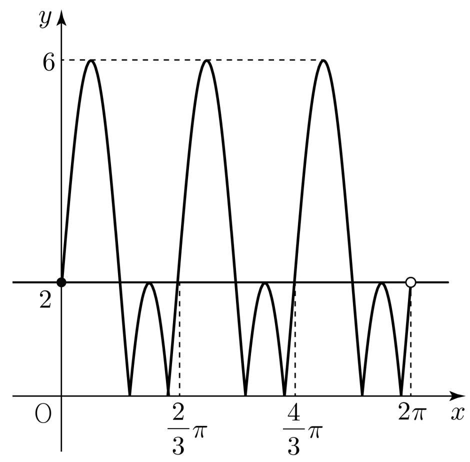
따라서 (i), (ii)에 의하여 $n=3$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각함수 $y=4\sin 3x+2$ 는

주기가 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2 이므로

$0\le x<2\pi$ 일 때, 곡선 $y=|4\sin3x+2|$ 는
다음과 같다.



따라서 $0\le x<2\pi$ 일 때,
곡선 $y=|4\sin3x+2|$ 와 직선 $y=2$ 가 만나는
서로 다른 점의 개수는 9

11. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

$f(1+x)+f(1-x)=0$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (단, a, b 는 상수)

조건 (나)에서

$$\int_{-1}^3 f'(x)dx=f(3)-f(-1)=12\ \cdots\ ㉠$$

$f(1+x)+f(1-x)=0$ 에 $x=2$ 를 대입하면

$f(3)+f(-1)=0\ \cdots\ ㉡$

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$f(3)=6$, $f(-1)=-6$

$f(3)=2(9+3a+b)=6$, $3a+b=-6\ \cdots\ ㉢$

$f(-1)=-2(1-a+b)=-6$, $a-b=-2\ \cdots\ ㉣$

두 식 ㉢, ㉣을 연립하면 $a=-2$, $b=0$

$f(x)=x(x-1)(x-2)$

따라서 $f(4)=24$

12. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a 라 하자.

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{2m+1}a_k=\frac{(2m+1)\{2a+5\times(2m+1-1)\}}{2}$$
$$=(2m+1)(a+5m)<0$$

$2m+1>0$ 이므로 $a+5m=a_{m+1}<0$

(i) $a_{m+1}=-1$ 인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=11$ 이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-1$ 이므로

$a_{m+6}=24$, $a_{m+7}=29$

$24<a_{21}<29$인 a_{21}이 존재하지 않는다.

(ii) $a_{m+1}=-2$ 인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=12$ 이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-2$ 이므로 $a_{m+7}=28$

따라서 $m+7=21$ 이므로 $m=14$

(iii) $a_{m+1}\le -3$ 인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|\ge 13$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $m=14$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle \mathrm{AFC}=\alpha$, $\angle \mathrm{CDE}=\beta$라 하자.

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 이므로 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\angle \mathrm{ECD}=\angle \mathrm{EFB}=\pi-\alpha$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{ED}}}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{\overline{\mathrm{EC}}}{\sin\beta}=10\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{ED}}=10\sqrt{2}\times\sin\alpha=10\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=6\sqrt{5}$

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$180=x^2+100-2\times x\times 10\times\cos(\pi-\alpha)$

$\quad=x^2+100+2\times x\times 10\times\cos\alpha$

$\quad=x^2+2\sqrt{10}x+100$

$x^2+2\sqrt{10}x-80=0$이고 $x>0$이므로

$x=-\sqrt{10}+\sqrt{10+80}=2\sqrt{10}$

$\angle \mathrm{ABE}=\angle \mathrm{CDE}=\dfrac{\pi}{4}$이므로

삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{10}$이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{5}$

두 삼각형 BEF, DEC는 서로 닮음이고

닮음비가 1 : 3이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

따라서 삼각형 AFE의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\sin\dfrac{\pi}{4}$

$\quad=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{10}}{3}\times 2\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{20}{3}$

14. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0-}g(x)g(x-3)=-f(0)\times f(-3)$

$\lim\limits_{x\to 0+}g(x)g(x-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

$g(0)g(-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개이므로

$k=-3$ 또는 $k=3$

(i) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 연속이고, $x=3$에서 불연속인 경우

$\lim\limits_{x\to -3-}g(x)g(x-3)=f(-3)\times f(-6)$

$\lim\limits_{x\to -3+}g(x)g(x-3)=-f(-3)\times f(-6)$

$g(-3)g(-6)=-f(-3)\times f(-6)$이므로

$f(-3)\times f(-6)=0$ ⋯ ㉠

$\lim\limits_{x\to 3-}g(x)g(x-3)=f(3)\times\{-f(0)\}$

$\lim\limits_{x\to 3+}g(x)g(x-3)=f(3)\times f(0)$

$g(3)g(0)=f(3)\times f(0)$이므로

$f(3)\times f(0)\neq 0$ ⋯ ㉡

$f(-3)=f(0)$이므로

㉠, ㉡에 의하여 $f(-6)=0$

(ii) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=3$에서 연속이고, $x=-3$에서 불연속인 경우

(i)과 같은 방법에 의하여 $f(3)=0$

(i), (ii)에 의하여 $f(-6)=0$ 또는 $f(3)=0$이므로 $f(-6)\times f(3)=0$ (참)

ㄷ. $k=-3$이므로 $f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$라 하자.

(단, a, b는 상수)

$f(-3)=f(0)$이므로

$-6(9-3a+b)=-3b$, $b=6a-18$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+6a-18)$

(i) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 세 실근의 합은

$3+(-a)=-1$, $a=4$

방정식 $x^2+4x+6=0$은 실근을 갖지 않으므로 모순

(ii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 중근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합은

$3+\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-1$, $a=8$

방정식 $x^2+8x+30=0$은 중근을 갖지 않으므로 모순

(iii) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3과 -4를 실근으로 갖는 경우

$3+(-4)=-a$, $3\times(-4)=6a-18$에서

$a=1$

$f(x)=(x-3)(x^2+x-12)=(x-3)^2(x+4)$

그러므로 $g(-1)=-f(-1)=-48$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

(i) $4\le n\le 7$인 모든 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수가 아닌 경우

$a_5=a_4+6$, $a_6=a_5+6=a_4+12$,

$a_7=a_6+6=a_4+18$이므로

$\sum\limits_{k=4}^{7}a_k=4a_4+36=40$, $a_4=1$

순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$은 (27, 9, 3)

그러므로 $a_1=27$

(ii) $4\le n\le 7$인 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수인 n이 존재하는 경우

$a_n=3^m$ (m은 자연수)인 n $(4\le n\le 7)$이 존재한다.

a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m\ge 4)$가 존재하면

$\sum\limits_{k=4}^{7}a_k>40$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m\ge 4)$가 존재하지 않는다.

또한 a_4, a_5, a_6, a_7 중 27이 존재하지 않으면 $n=4,\ 5,\ 6,\ 7$에 대하여

$\sum\limits_{k=4}^{7}a_k<40$

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이다.

만약 a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이면

$\sum\limits_{k=4}^{7}a_k>40$이므로 $a_4=27$

$a_4+a_5+a_6+a_7=27+9+3+1=40$

그러므로 $a_4=27$일 때 조건을 만족시킨다.

$a_1<300$을 만족시키는

순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$은

$(69,\ 75,\ 81)$, $(237,\ 243,\ 81)$이므로

$a_1=69$ 또는 $a_1=237$

따라서 (i), (ii)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은 $27+69+237=333$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

로그의 진수 조건에 의하여

$x-5>0$이고 $x+7>0$이므로 $x>5$ ⋯ ㉠

$\log_4(x-5)^2=\log_4(x+7)$, $(x-5)^2=x+7$

$x^2-10x+25=x+7$, $x^2-11x+18=0$

$(x-2)(x-9)=0$, $x=2$ 또는 $x=9$

㉠에 의하여 $x=9$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$f(x)=\int(9x^2-8x+1)dx$

$\quad=3x^3-4x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=3-4+1+C=10$, $C=10$

$f(x)=3x^3-4x^2+x+10$

따라서 $f(2)=24-16+2+10=20$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum\limits_{k=1}^{10}a_k+\sum\limits_{k=1}^{10}3=40$, $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k=5$

$\sum\limits_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum\limits_{k=1}^{10}a_k-\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=-10$

$\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=15$

따라서 $\sum\limits_{k=1}^{10}(b_k+5)=\sum\limits_{k=1}^{10}b_k+\sum\limits_{k=1}^{10}5=65$

19. [출제의도] 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=x^3-10$, $g(x)=x^3+k$라 하자.

$f'(x)=3x^2$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -18)$에서의

접선의 기울기는 $f'(-2)=12$

접선의 방정식은

$y-(-18)=12\{x-(-2)\}$, $y=12x+6$

점 Q의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha^3+k)$라 하자.

(단, α는 상수)

$g'(x)=3x^2$이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^3+k)$에서의

접선의 기울기는 $g'(\alpha)=3\alpha^2$

접선의 방정식은 $y-(\alpha^3+k)=3\alpha^2(x-\alpha)$,

$y=3\alpha^2x-2\alpha^3+k$

두 접선이 일치하므로 $3\alpha^2=12$, $-2\alpha^3+k=6$

$\alpha=2$이면 $k=22$, $\alpha=-2$이면 $k=-10$

$k>0$이므로 $k=22$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=|x^2-3|-2x$

$$=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x\le-\sqrt{3} \text{ 또는 } x\ge\sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}) \end{cases}$$

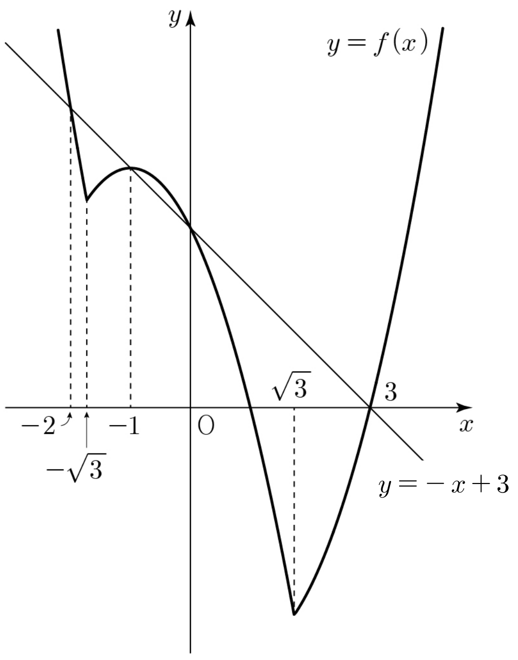
x_1, x_4는 이차방정식 $x^2-2x-3=-x+t$의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$x_1+x_4=1$, $x_1x_4=-t-3$

$x_4-x_1=5$이므로 $x_1=-2$, $x_4=3$

$x_1x_4=-t-3=-6$, $t=3$

x_2, x_3은 이차방정식 $-x^2-2x+3=-x+3$의 두 근이므로 $x_2=-1$, $x_3=0$



닫힌구간 $[0,\ 3]$에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\{(-x+3)-(-x^2-2x+3)\}dx$$

$$+\int_{\sqrt{3}}^3\{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{\sqrt{3}}^3$$

$$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3}$$

따라서 $p\times q=\dfrac{27}{2}\times 4=54$

21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

점 D의 좌표를 $(t,\ 0)\ (t>0)$이라 하자.

점 D는 선분 CA를 $5:3$으로 외분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{CA}}:\overline{\mathrm{AD}}=2:3$

점 A의 x좌표는 $\dfrac{2}{5}t$, $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{5}t,\ \dfrac{6}{5}t\right)$

점 C의 y좌표는 $2t$, $\mathrm{C}(0,\ 2t)$

직선 BC의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{3}x+2t$

점 B는 두 직선 $y=3x$, $y=-\dfrac{1}{3}x+2t$의 교점이므로 $\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{5}t,\ \dfrac{9}{5}t\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}t$

삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2=\dfrac{t^2}{5}=20$

$t^2=100$이므로 $t=10$

$\mathrm{A}(4,\ 12)$, $\mathrm{B}(6,\ 18)$이므로

$12=2^{4-m}+n$, $18=2^{6-m}+n$

$18-2^{6-m}=12-2^{4-m}$

$2^{6-m}-2^{4-m}=6$

$64\times 2^{-m}-16\times 2^{-m}=6$

$48\times 2^{-m}=6$, $2^{-m}=\dfrac{1}{8}$

$m=3$, $n=10$

따라서 $m+n=13$

22. [출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

방정식 $g(x)=0$에서

$x=t$일 때 $f(t)-t-f(t)+t=0$이므로 $g(t)=0$

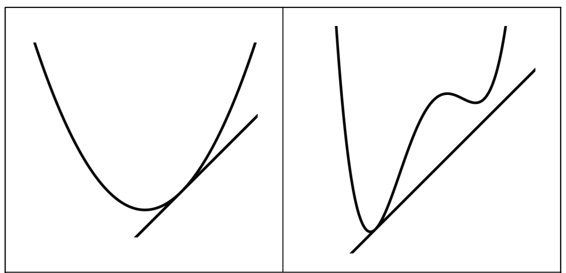
$x\neq t$일 때 $f(x)-x-f(t)+t=0$에서

$\dfrac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$이다.

그러므로 함수 $h(t)$는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t,\ f(t))$를 지나고 기울기가 1인 직선 l과 곡선 $y=f(x)$의 교점의 개수이다.

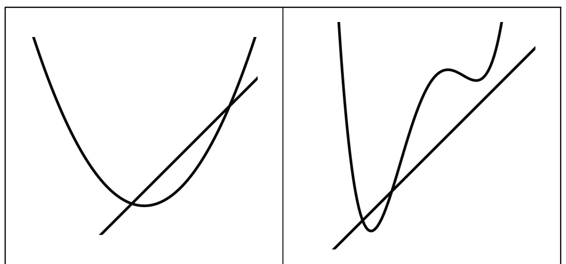
임의의 실수 s에 대하여 $h(s)\geq 1$이다.

(ⅰ) $h(s)=1$인 경우

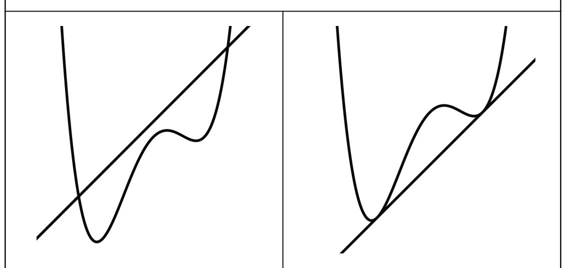


$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=1$

(ⅱ) $h(s)=2$인 경우



$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$

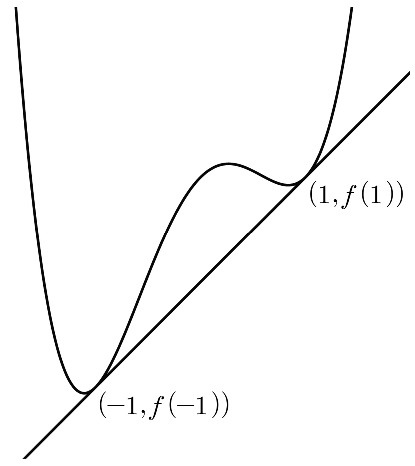


$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$	$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=2$

(ⅲ) $h(s)\geq 3$인 경우

$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$이거나 극한값이 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 l이 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(1,\ f(1))$에서 접할 때 $\lim\limits_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim\limits_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$를 만족시킨다.



함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를 a, 직선 l의 방정식을 $y=x+b$라 하자. (단, a, b는 상수)

$f(x)-(x+b)=a(x-1)^2(x+1)^2$

$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+b$

조건 (나)에서 $\displaystyle\int_0^{\alpha}\{f(x)-|f(x)|\}dx=0$을 만족시키는 실수 α의 최솟값이 -1이므로

$-1\leq x\leq 0$에서 $f(x)\geq 0$, $f(-1)\geq 0$

$f(-1)>0$이면 실수 α의 최솟값이 -1이 아니므로 $f(-1)=0$

$f(-1)=-1+b=0$, $b=1$

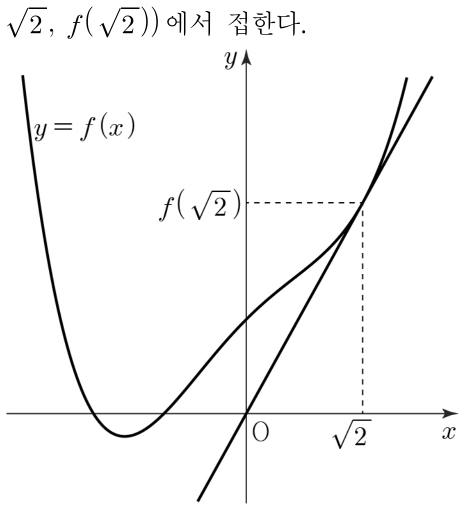
$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

조건 (다)에서

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_0^x\{f(u)-ku\}du=f(x)-kx\geq 0$

$f(x)\geq kx$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=kx$가 접하거나 만나지 않는다.

실수 k의 최댓값이 $f'(\sqrt{2})$이므로 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f'(\sqrt{2})x$가 점 $(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$에서 접한다.



$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

$\quad=ax^4-2ax^2+x+a+1$

$f'(x)=4ax^3-4ax+1$

$f(\sqrt{2})=4a-4a+\sqrt{2}+a+1=a+\sqrt{2}+1$

$f'(\sqrt{2})=8\sqrt{2}a-4\sqrt{2}a+1=4\sqrt{2}a+1$

$f(\sqrt{2})=f'(\sqrt{2})\times\sqrt{2}$이므로

$a+\sqrt{2}+1=(4\sqrt{2}a+1)\times\sqrt{2}$

$\quad=8a+\sqrt{2}$

$a=\dfrac{1}{7}$, $f(x)=\dfrac{1}{7}(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

따라서 $f(6)=\dfrac{1}{7}\times 5^2\times 7^2+6+1=182$

미적분 정답

23	③	24	②	25	①	26	④	27	③
28	②	29	12	30	208				

미적분 해설

23. [출제의도] 수열의 극한 계산하기

$$\lim_{n\to\infty} 2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2n\left(\sqrt{n^2+4}-\sqrt{n^2+1}\right)\times\frac{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n\{(n^2+4)-(n^2+1)\}}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{n^2+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6}{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=3$$

24. [출제의도] 합성함수 미분법 이해하기

$\lim_{x\to 2}\frac{g(x)-4}{x-2}=12$ 에서 $g(2)=4$, $g'(2)=12$

$$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x+2}$$
$$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$$
$$h'(2)=f'(g(2))g'(2)=f'(4)g'(2)$$
$$f'(4)=\frac{8-1}{16-4+2}=\frac{1}{2}$$

따라서 $h'(2)=\frac{1}{2}\times 12=6$

25. [출제의도] 음함수의 미분법 이해하기

$2e^{x+y-1}=3e^x+x-y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\left(2e^{x+y-1}\right)=\frac{d}{dx}\left(3e^x+x-y\right)$$
$$2e^{x+y-1}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=3e^x+1-\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{3e^x+1-2e^{x+y-1}}{2e^{x+y-1}+1}$$

따라서 점 $(0,\ 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3+1-2}{2+1}=\frac{2}{3}$$

26. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$$\int_1^2 (x-1)f'\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=\left[2(x-1)f\left(\frac{x}{2}\right)\right]_1^2-\int_1^2 2f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$
$$=2f(1)-2\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2$$

$f(1)=4$ 이므로 $\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=3$

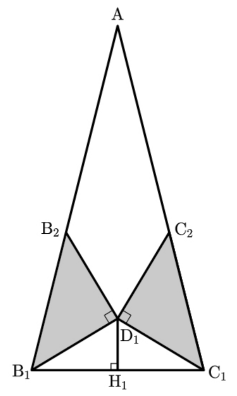
$\frac{x}{2}=t$ 라 하면 $\frac{1}{2}=\frac{dt}{dx}$

$x=1$ 일 때 $t=\frac{1}{2}$, $x=2$ 일 때 $t=1$

$$\int_1^2 f\left(\frac{x}{2}\right)dx=2\int_{\frac{1}{2}}^1 f(t)dt=3$$

따라서 $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x)dx=\frac{3}{2}$

27. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기



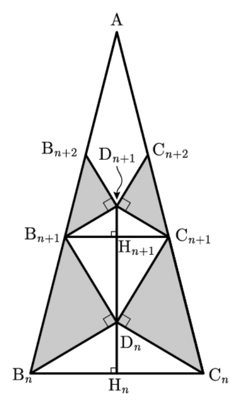
점 D_1 에서 선분 B_1C_1 에 내린 수선의 발을 H_1, $\angle AB_1H_1=\alpha$, $\angle D_1B_1H_1=\beta$ 라 하자.

$\overline{AH_1}=\sqrt{17-1}=4$ 이므로 $\tan\alpha=4$

$$\tan\beta=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=\frac{3}{5}$$

$\overline{B_1H_1}=1$, $\overline{D_1H_1}=\frac{3}{5}$ 이므로

$$\overline{B_1D_1}=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$
$$S_1=2\times\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{34}}{5}\right)^2\right\}=\frac{34}{25}$$



점 D_n 에서 선분 B_nC_n 에 내린 수선의 발을 H_n, 점 D_{n+1} 에서 선분 $B_{n+1}C_{n+1}$ 에 내린 수선의 발을 H_{n+1} 이라 하자.

두 삼각형 $D_nB_nH_n$ 과 $B_{n+1}D_nH_{n+1}$ 은 서로 합동이므로

$$\overline{B_{n+1}H_{n+1}}=\overline{D_nH_n}=\overline{B_nH_n}\times\tan\beta=\frac{3}{5}\overline{B_nH_n}$$

두 삼각형 $B_nD_nB_{n+1}$, $C_nD_nC_{n+1}$ 로 만들어진 ⋈ 모양의 도형의 넓이를 T_n 이라 하자.

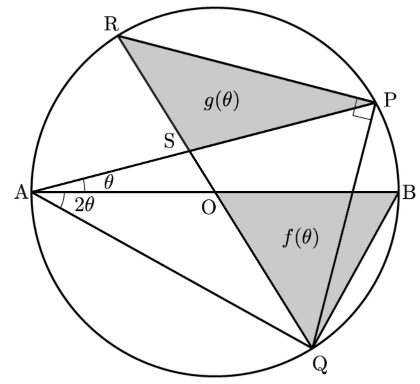
두 삼각형 $D_nB_nH_n$, $D_{n+1}B_{n+1}H_{n+1}$ 은 서로 닮음이고 닮음비가 $1:\frac{3}{5}$ 이므로 넓이의 비는 $1^2:\left(\frac{3}{5}\right)^2$ 이다.

$$T_{n+1}=\frac{9}{25}T_n$$

수열 $\{T_n\}$ 은 첫째항이 $T_1=S_1=\frac{34}{25}$ 이고 공비가 $\frac{9}{25}$ 인 등비수열이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}T_n=\frac{\frac{34}{25}}{1-\frac{9}{25}}=\frac{17}{8}$

28. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기



$\overline{OA}=\overline{OQ}=1$ 이므로

$\angle OQA=2\theta$, $\angle BOQ=4\theta$

삼각형 BOQ 의 넓이는

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{OQ}\times\sin(\angle BOQ)$$
$$=\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin4\theta=\frac{1}{2}\sin4\theta$$

선분 RQ 는 원의 지름이므로 $\angle RPQ=\frac{\pi}{2}$

원주각의 성질에 의하여 $\angle PRQ=\angle PAQ=3\theta$

$\overline{RP}=\overline{RQ}\cos3\theta=2\cos3\theta$

원주각의 성질에 의하여 $\angle RPA=\angle RQA=2\theta$

삼각형 PRS 에서 $\angle PSR=\pi-5\theta$

사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{RS}}{\sin2\theta}=\frac{2\cos3\theta}{\sin(\pi-5\theta)}$ 이므로

$$\overline{RS}=\frac{2\cos3\theta\sin2\theta}{\sin(\pi-5\theta)}=\frac{2\cos3\theta\sin2\theta}{\sin5\theta}$$

삼각형 PRS 의 넓이는

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{RP}\times\overline{RS}\times\sin(\angle PRS)$$
$$=\frac{1}{2}\times2\cos3\theta\times\frac{2\cos3\theta\sin2\theta}{\sin5\theta}\times\sin3\theta$$
$$=\frac{2\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times\sin3\theta}{\sin5\theta}$$

따라서 $\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{f(\theta)}$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{2\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times\sin3\theta}{\sin5\theta}}{\frac{1}{2}\sin4\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{4\cos^2(3\theta)\times\sin2\theta\times\sin3\theta}{\sin4\theta\times\sin5\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{24\times\cos^2(3\theta)\times\frac{\sin2\theta}{2\theta}\times\frac{\sin3\theta}{3\theta}}{20\times\frac{\sin4\theta}{4\theta}\times\frac{\sin5\theta}{5\theta}}$$
$$=\frac{6}{5}$$

29. [출제의도] 치환적분법 이해하기

조건 (가)에 의하여

$x<1$ 일 때

$f(x)=-x^2+4x+C$ (단, C 는 적분상수)

조건 (나)에 의하여

$x>0$ 일 때

$$2xf'(x^2+1)=2ae^{2x}+b$$
$$f'(x^2+1)=\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$
$$f'(1)=\lim_{x\to0+}f'(x^2+1)=\lim_{x\to0+}\frac{2ae^{2x}+b}{2x}$$

$\lim_{x\to0+}2x=0$ 이므로 $\lim_{x\to0+}(2ae^{2x}+b)=0$

$2a+b=0$, $b=-2a$

$f'(x^2+1)=\dfrac{2ae^{2x}+b}{2x}=\dfrac{2ae^{2x}-2a}{2x}$

함수 $f'(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1+} f'(x)=f'(1)$

$\lim\limits_{x\to 1-} f'(x)=-2+4=2$

$\lim\limits_{x\to 1+} f'(x)=\lim\limits_{s\to 0+} f'(s^2+1)$

$=\lim\limits_{s\to 0+} \dfrac{2a(e^{2s}-1)}{2s}=2a$

$f'(1)=2$

$2=2a$, $a=1$, $b=-2$

함수 $f(x)$ 가 $x=1$ 에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 1-} f(x)=-1^2+4\times 1+C=C+3$

$\lim\limits_{x\to 1+} f(x)=\lim\limits_{s\to 0+} f(s^2+1)$

$=\lim\limits_{s\to 0+} (e^{2s}-2s)=1$

$f(1)=1$

$C+3=1$ 이므로 $C=-2$

그러므로

$x<1$ 일 때, $f(x)=-x^2+4x-2$

$x\ge 0$ 일 때, $f(x^2+1)=e^{2x}-2x$

$\int_0^5 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\int_1^5 f(x)dx$

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (-x^2+4x-2)dx=-\dfrac{1}{3}$

$\int_1^5 f(x)dx$ 에서

$x=t^2+1\ (t\ge 0)$ 이라 하면 $\dfrac{dx}{dt}=2t$

$$\begin{aligned}\int_1^5 f(x)dx&=\int_0^2 f(t^2+1)2t\,dt\\&=\int_0^2 2t(e^{2t}-2t)\,dt\\&=\int_0^2 (2te^{2t}-4t^2)\,dt\\&=[te^{2t}]_0^2-\int_0^2 e^{2t}dt-\int_0^2 4t^2dt\\&=\left[te^{2t}-\frac{1}{2}e^{2t}-\frac{4}{3}t^3\right]_0^2\\&=\frac{3}{2}e^4-\frac{61}{6}\end{aligned}$$

$\int_0^5 f(x)dx=\left(-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{3}{2}e^4-\dfrac{61}{6}\right)=\dfrac{3}{2}e^4-\dfrac{21}{2}$

에서 $p=\dfrac{3}{2}$, $q=\dfrac{21}{2}$

따라서 $p+q=12$

30. [출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 추론하기

모든 자연수 n 에 대하여

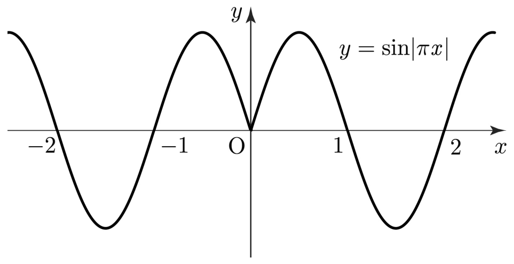
$g(a_n)=\sin|\pi f(a_n)|=0$ 이므로

$f(a_n)$ 의 값은 정수이다.

$$\cos\{\pi f(a_n)\}=\begin{cases}1 & (f(a_n)=2p)\\ -1 & (f(a_n)=2p-1)\end{cases}\quad\cdots ㉠$$

(단, p 는 정수)

함수 $y=\sin|\pi x|$ 의 그래프는 그림과 같다.



$-1<x<0$ 또는 $0<x<1$ 일 때

$\sin|\pi x|>0$

$f(a_4)=0$ 이면 $g(a_4)=\sin|\pi f(a_4)|=0$ 이고,

$f(a_3)$ 과 $f(a_5)$ 의 값은 각각 -1 또는 0 또는 1

$a_3<x<a_4$ 또는 $a_4<x<a_5$ 일 때

$0<|f(x)|<1$ 이므로 $g(x)=\sin|\pi f(x)|>0$

함수 $g(x)$ 는 $x=a_4$ 에서 극대가 아니므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(a_4)\ne 0$

함수 $g(x)$ 가 $x=a_4$ 에서 미분가능하고

조건 (가)에 의하여 $g'(a_4)=0$

$$g(x)=\begin{cases}\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)\ge 0)\\ -\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g'(x)=\begin{cases}\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f'(x)\cos\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

$$g''(x)=\begin{cases}\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\}-\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)>0)\\ -\pi f''(x)\cos\{\pi f(x)\}+\pi^2\{f'(x)\}^2\sin\{\pi f(x)\} & (f(x)<0)\end{cases}$$

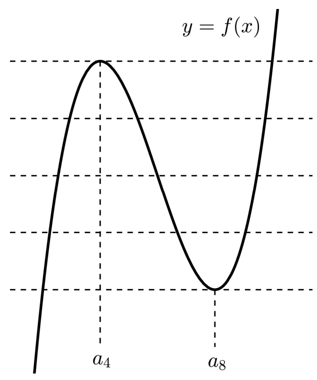
에서 $f'(a_4)=0$

위와 같은 방법으로 $f(a_8)\ne 0$ 이고 $f'(a_8)=0$

그러므로 $f'(x)=3(x-a_4)(x-a_8)$

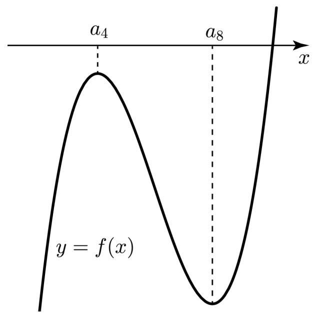
$f''(a_4)<0$, $f''(a_8)>0$

함수 $y=f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같다.



그러므로 $f(a_8)=f(a_4)-4$ 이다.

(i) $f(a_4)<0$ 인 경우



함수 $g(x)$ 가 $x=a_4$ 에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4)<0$ 이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=-1$

$f(a_4)=2q+1$ (단, q 는 음의 정수)

$f(a_8)=f(a_4)-4=2q-3$ 에서

$\cos\{\pi f(a_8)\}=-1$ 이고

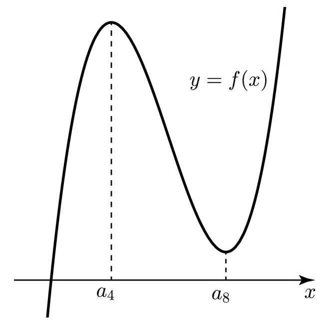
$f''(a_8)>0$ 이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

함수 $g(x)$ 가 $x=a_8$ 에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(a_8)>0$ 인 경우



함수 $g(x)$ 가 $x=a_8$ 에서 극대이므로

$g''(a_8)=-\pi f''(a_8)\cos\{\pi f(a_8)\}<0$

$f''(a_8)>0$ 이므로 $\cos\{\pi f(a_8)\}>0$

㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_8)\}=1$

$f(a_8)=2r$ (단, r 는 자연수)

$f(a_4)=f(a_8)+4=2r+4$ 에서

$\cos\{\pi f(a_4)\}=1$ 이고

$f''(a_4)<0$ 이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}>0$

함수 $g(x)$ 가 $x=a_4$ 에서 극소이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(a_8)<0<f(a_4)$ 인 경우

$f(a_4)-4=f(a_8)<0<f(a_4)$ 이므로

$0<f(a_4)<4$

$f(a_4)=1$ 또는 $f(a_4)=2$ 또는 $f(a_4)=3$

함수 $g(x)$ 가 $x=a_4$ 에서 극대이므로

$g''(a_4)=-\pi f''(a_4)\cos\{\pi f(a_4)\}<0$

$f''(a_4)<0$ 이므로 $\cos\{\pi f(a_4)\}>0$

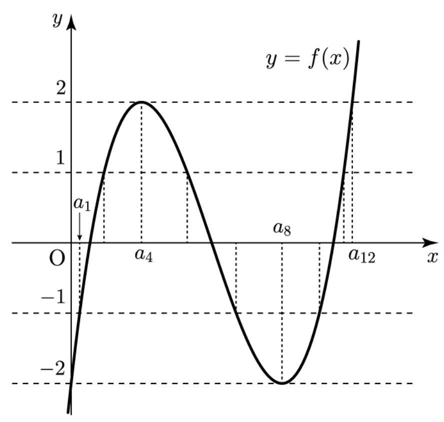
㉠에 의하여 $\cos\{\pi f(a_4)\}=1$

$f(a_4)=2s$ (단, s 는 자연수)

그러므로 $f(a_4)=2$ 이고 $f(a_8)=-2$

조건 (나)에 의하여 $f(a_8)=f(0)=-2$

$m=8$



$f(x)=x(x-a_8)^2-2$

$f'(x)=(x-a_8)^2+2x(x-a_8)=3(x-a_8)\left(x-\dfrac{a_8}{3}\right)$

$f'(a_4)=0$ 에서 $a_4=\dfrac{a_8}{3}$

$f(a_4)=a_4(a_4-a_8)^2-2=2$ 이므로

$\dfrac{a_8}{3}\left(-\dfrac{2a_8}{3}\right)^2-2=2$, $a_8=3$

$f(x)=x(x-3)^2-2$

$f(m)=f(8)=8\times 5^2-2=198$ 이고

$k\ge 8$ 일 때 $f(a_k)=k-10$ 이므로

따라서 $f(a_k)\le f(8)$ 인 k 의 최댓값은 208