정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	⑤	3	⑤	4	③	5	②
6	④	7	①	8	②	9	②	10	③
11	①	12	③	13	①	14	⑤	15	④
16	9	17	20	18	65	19	22	20	54
21	13	22	182						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$$4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{2\sqrt{3}-1} = 2^{2(1-\sqrt{3})} \times 2^{2\sqrt{3}-1} = 2^{2-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-1} = 2$$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=3x^2-7$ 이므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=f'(2)=5$$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta=\frac{3}{5}$

$\sin^2\theta=1-\cos^2\theta=\frac{16}{25}$

$\sin\theta\cos\theta<0$ 이므로 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$

따라서 $\sin\theta+2\cos\theta=\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1$

따라서 $\lim\limits_{x\to -1+}f(x)+\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=0+1=1$

5. [출제의도] 함수의 미분가능성 이해하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=f(1)$

$\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1-}(3x+a)=a+3$

$\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1+}(2x^3+bx+1)=b+3$

$f(1)=a+3$

$a+3=b+3$, $a=b$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1-}\frac{3x+a-(a+3)}{x-1}=3$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(2x^3+ax+1)-(a+3)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{(x-1)(2x^2+2x+a+2)}{x-1}=a+6$$

$3=a+6$, $a=-3$, $b=-3$

따라서 $a+b=-6$

6. [출제의도] 등비수열의 일반항 계산하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하자.

$a_n=ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)

${a_3}^2=a_6$ 이므로 $(ar^2)^2=ar^5$, $ar^4(a-r)=0$,

$a=r$, $a_n=r^n$

$a_2-a_1=2$ 이므로 $r^2-r=2$

$(r-2)(r+1)=0$

$r=2$ 또는 $r=-1$

모든 항이 양수이므로 $r=2$

따라서 $a_5=r^5=32$

7. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 극값을 가지므로

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax-9$ 에서

$f'(1)=3+2a-9=0$ 이므로 $a=3$

$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x-1)(x+3)$

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $f(-3)=-27+27+27+4=31$

8. [출제의도] 정적분을 활용하여 속도와 거리 문제 해결하기

점 P가 운동 방향을 바꿀 때 $v(t)=0$

$v(t)=t^2-4t+3=(t-1)(t-3)=0$

점 P가 $t=1$, $t=3$에서 운동 방향을 바꾸므로 $a=3$

점 P가 시각 $t=0$에서 $t=3$까지 움직인 거리는

$$\int_0^3|v(t)|dt=\int_0^1 v(t)dt+\int_1^3\{-v(t)\}dt$$
$$=\int_0^1(t^2-4t+3)dt+\int_1^3(-t^2+4t-3)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2-3t\right]_1^3$$
$$=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

9. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

(i) n이 짝수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$ 의 실근은

$x=\pm\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱이 양수이므로 모순

(ii) n이 홀수일 때

$(x^n-8)(x^{2n}-8)=0$ 의 실근은

$x=\sqrt[n]{8}$ 또는 $x=\pm\sqrt[2n]{8}$

모든 실근의 곱은

$2^{\frac{3}{n}}\times 2^{\frac{3}{2n}}\times\left(-2^{\frac{3}{2n}}\right)=-2^{\frac{6}{n}}=-4$

$2^{\frac{6}{n}}=2^2$, $\frac{6}{n}=2$

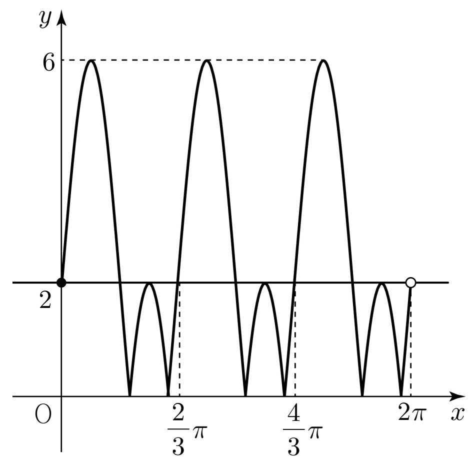
따라서 (i), (ii)에 의하여 $n=3$

10. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각함수 $y=4\sin 3x+2$는

주기가 $\frac{2}{3}\pi$, 최댓값이 6, 최솟값이 -2이므로

$0\le x<2\pi$일 때, 곡선 $y=|4\sin 3x+2|$는 다음과 같다.



따라서 $0\le x<2\pi$일 때,

곡선 $y=|4\sin 3x+2|$와 직선 $y=2$가 만나는 서로 다른 점의 개수는 9

11. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=0$을 대입하면

$f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x^2+ax+b)$ (단, a, b는 상수)

조건 (나)에서

$\int_{-1}^3 f'(x)dx=f(3)-f(-1)=12$ ⋯ ㉠

$f(1+x)+f(1-x)=0$에 $x=2$를 대입하면

$f(3)+f(-1)=0$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$f(3)=6$, $f(-1)=-6$

$f(3)=2(9+3a+b)=6$, $3a+b=-6$ ⋯ ㉢

$f(-1)=-2(1-a+b)=-6$, $a-b=-2$ ⋯ ㉣

두 식 ㉢, ㉣을 연립하면 $a=-2$, $b=0$

$f(x)=x(x-1)(x-2)$

따라서 $f(4)=24$

12. [출제의도] 여러 가지 수열의 합을 활용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

조건 (가)에 의하여

$$\sum_{k=1}^{2m+1}a_k=\frac{(2m+1)\{2a+5\times(2m+1-1)\}}{2}=(2m+1)(a+5m)<0$$

$2m+1>0$ 이므로 $a+5m=a_{m+1}<0$

(i) $a_{m+1}=-1$ 인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=11$ 이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-1$ 이므로

$a_{m+6}=24$, $a_{m+7}=29$

$24<a_{21}<29$인 a_{21}이 존재하지 않는다.

(ii) $a_{m+1}=-2$ 인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|=12$ 이므로

조건 (나)를 만족시킨다.

$a_{m+1}=-2$ 이므로 $a_{m+7}=28$

따라서 $m+7=21$ 이므로 $m=14$

(iii) $a_{m+1}\le -3$ 인 경우

$|a_m|+|a_{m+1}|+|a_{m+2}|\ge 13$ 이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 $m=14$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle \mathrm{AFC}=\alpha$, $\angle \mathrm{CDE}=\beta$라 하자.

$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{10}$ 이므로 $\sin\alpha=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$

$\angle \mathrm{ECD}=\angle \mathrm{EFB}=\pi-\alpha$

삼각형 CDE에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{ED}}}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{\overline{\mathrm{EC}}}{\sin\beta}=10\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{ED}}=10\sqrt{2}\times\sin\alpha=10\sqrt{2}\times\dfrac{3\sqrt{10}}{10}=6\sqrt{5}$

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\beta=\dfrac{\pi}{4}$

$\overline{\mathrm{CD}}=x$라 하자.

삼각형 CDE에서 코사인법칙에 의하여

$180=x^2+100-2\times x\times 10\times\cos(\pi-\alpha)$

$=x^2+100+2\times x\times 10\times\cos\alpha$

$=x^2+2\sqrt{10}\,x+100$

$x^2+2\sqrt{10}\,x-80=0$이고 $x>0$이므로

$x=-\sqrt{10}+\sqrt{10+80}=2\sqrt{10}$

$\angle \mathrm{ABE}=\angle \mathrm{CDE}=\dfrac{\pi}{4}$ 이므로

삼각형 ABE는 직각이등변삼각형이다.

$\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{10}$ 이므로 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{AE}}=2\sqrt{5}$

두 삼각형 BEF, DEC는 서로 닮음이고

닮음비가 1 : 3이다.

$\overline{\mathrm{AF}}=\dfrac{2}{3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{4\sqrt{10}}{3}$

따라서 삼각형 AFE의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AF}}\times\overline{\mathrm{AE}}\times\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4\sqrt{10}}{3}\times 2\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{20}{3}$

14. [출제의도] 연속함수의 성질을 활용하여 추론하기

ㄱ. $\lim\limits_{x\to 0-} g(x)g(x-3)=-f(0)\times f(-3)$

$\lim\limits_{x\to 0+} g(x)g(x-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

$g(0)g(-3)=f(0)\times\{-f(-3)\}$

함수 $g(x)g(x-3)$은 $x=0$에서 연속이다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 값이 한 개이므로

$k=-3$ 또는 $k=3$

(ⅰ) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=-3$에서 연속이고, $x=3$에서 불연속인 경우

$\lim\limits_{x\to -3-} g(x)g(x-3)=f(-3)\times f(-6)$

$\lim\limits_{x\to -3+} g(x)g(x-3)=-f(-3)\times f(-6)$

$g(-3)g(-6)=-f(-3)\times f(-6)$ 이므로

$f(-3)\times f(-6)=0$ ⋯ ㉠

$\lim\limits_{x\to 3-} g(x)g(x-3)=f(3)\times\{-f(0)\}$

$\lim\limits_{x\to 3+} g(x)g(x-3)=f(3)\times f(0)$

$g(3)g(0)=f(3)\times f(0)$ 이므로

$f(3)\times f(0)\neq 0$ ⋯ ㉡

$f(-3)=f(0)$ 이므로

㉠, ㉡에 의하여 $f(-6)=0$

(ⅱ) 함수 $g(x)g(x-3)$이 $x=3$에서 연속이고, $x=-3$에서 불연속인 경우

(ⅰ)과 같은 방법에 의하여 $f(3)=0$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(-6)=0$ 또는 $f(3)=0$ 이므로 $f(-6)\times f(3)=0$ (참)

ㄷ. $k=-3$ 이므로 $f(3)=0$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$라 하자.

(단, a, b는 상수)

$f(-3)=f(0)$ 이므로

$-6(9-3a+b)=-3b$, $b=6a-18$

$f(x)=(x-3)(x^2+ax+6a-18)$

(ⅰ) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3이 아닌 서로 다른 두 실근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 세 실근의 합은

$3+(-a)=-1$, $a=4$

방정식 $x^2+4x+6=0$은 실근을 갖지 않으므로 모순

(ⅱ) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 중근을 갖는 경우

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근의 합은

$3+\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-1$, $a=8$

방정식 $x^2+8x+30=0$은 중근을 갖지 않으므로 모순

(ⅲ) 방정식 $x^2+ax+6a-18=0$이 3과 -4를 실근으로 갖는 경우

$3+(-4)=-a$, $3\times(-4)=6a-18$에서

$a=1$

$f(x)=(x-3)(x^2+x-12)=(x-3)^2(x+4)$

그러므로 $g(-1)=-f(-1)=-48$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여 추론하기

(ⅰ) $4\le n\le 7$인 모든 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수가 아닌 경우

$a_5=a_4+6$, $a_6=a_5+6=a_4+12$,

$a_7=a_6+6=a_4+18$ 이므로

$\sum\limits_{k=4}^{7} a_k=4a_4+36=40$, $a_4=1$

순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$은 (27, 9, 3)

그러므로 $a_1=27$

(ⅱ) $4\le n\le 7$인 자연수 n에 대하여 $\log_3 a_n$이 자연수인 n이 존재하는 경우

$a_n=3^m$ (m은 자연수)인 n $(4\le n\le 7)$이 존재한다.

a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m\ge 4)$가 존재하면

$\sum\limits_{k=4}^{7} a_k>40$ 이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 3^m $(m\ge 4)$가 존재하지 않는다.

또한 a_4, a_5, a_6, a_7 중 27이 존재하지 않으면 $n=4,\ 5,\ 6,\ 7$에 대하여

$\sum\limits_{k=4}^{7} a_k<40$

그러므로 a_4, a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이다.

만약 a_5, a_6, a_7 중 하나가 27이면

$\sum\limits_{k=4}^{7} a_k>40$ 이므로 $a_4=27$

$a_4+a_5+a_6+a_7=27+9+3+1=40$

그러므로 $a_4=27$일 때 조건을 만족시킨다.

$a_1<300$을 만족시키는

순서쌍 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$은

(69, 75, 81), (237, 243, 81) 이므로

$a_1=69$ 또는 $a_1=237$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

모든 a_1의 값의 합은 $27+69+237=333$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

로그의 진수 조건에 의하여

$x-5>0$이고 $x+7>0$ 이므로 $x>5$ ⋯ ㉠

$\log_4(x-5)^2=\log_4(x+7)$, $(x-5)^2=x+7$

$x^2-10x+25=x+7$, $x^2-11x+18=0$

$(x-2)(x-9)=0$, $x=2$ 또는 $x=9$

㉠에 의하여 $x=9$

17. [출제의도] 부정적분 계산하기

$f(x)=\int(9x^2-8x+1)dx$

$=3x^3-4x^2+x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(1)=3-4+1+C=10$, $C=10$

$f(x)=3x^3-4x^2+x+10$

따라서 $f(2)=24-16+2+10=20$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum\limits_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum\limits_{k=1}^{10}a_k+\sum\limits_{k=1}^{10}3=40$, $\sum\limits_{k=1}^{10}a_k=5$

$\sum\limits_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=\sum\limits_{k=1}^{10}a_k-\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=-10$

$\sum\limits_{k=1}^{10}b_k=15$

따라서 $\sum\limits_{k=1}^{10}(b_k+5)=\sum\limits_{k=1}^{10}b_k+\sum\limits_{k=1}^{10}5=65$

19. [출제의도] 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=x^3-10$, $g(x)=x^3+k$라 하자.

$f'(x)=3x^2$ 이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(-2,\ -18)$에서의 접선의 기울기는 $f'(-2)=12$

접선의 방정식은

$y-(-18)=12\{x-(-2)\}$, $y=12x+6$

점 Q의 좌표를 $(\alpha,\ \alpha^3+k)$라 하자.

(단, α는 상수)

$g'(x)=3x^2$ 이므로

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^3+k)$에서의 접선의 기울기는 $g'(\alpha)=3\alpha^2$

접선의 방정식은 $y-(\alpha^3+k)=3\alpha^2(x-\alpha)$,

$y=3\alpha^2x-2\alpha^3+k$

두 접선이 일치하므로 $3\alpha^2=12$, $-2\alpha^3+k=6$

$\alpha=2$이면 $k=22$, $\alpha=-2$이면 $k=-10$

$k>0$ 이므로 $k=22$

20. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

$f(x)=|x^2-3|-2x$

$$=\begin{cases} x^2-2x-3 & (x\le-\sqrt{3} \text{ 또는 } x\ge\sqrt{3}) \\ -x^2-2x+3 & (-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}) \end{cases}$$

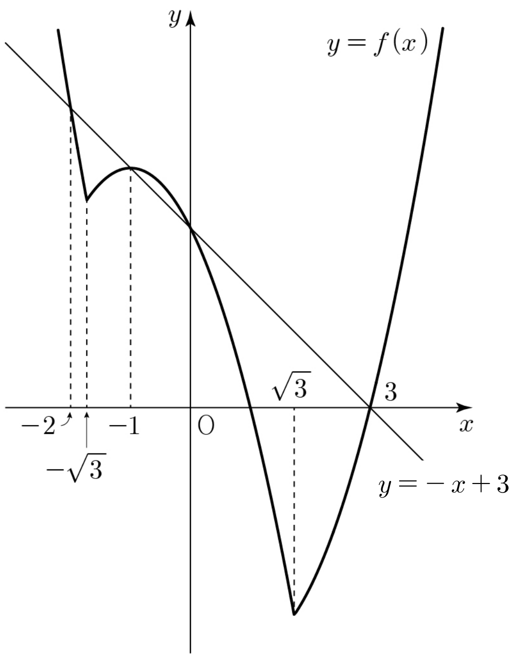
x_1, x_4 는 이차방정식 $x^2-2x-3=-x+t$ 의 두 근이므로 근과 계수와의 관계에 의하여

$x_1+x_4=1$, $x_1x_4=-t-3$

$x_4-x_1=5$ 이므로 $x_1=-2$, $x_4=3$

$x_1x_4=-t-3=-6$, $t=3$

x_2, x_3 은 이차방정식 $-x^2-2x+3=-x+3$ 의 두 근이므로 $x_2=-1$, $x_3=0$



닫힌구간 $[0,\ 3]$ 에서 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 |f(x)-g(x)|dx$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\{(-x+3)-(-x^2-2x+3)\}dx$$

$$+\int_{\sqrt{3}}^3\{(-x+3)-(x^2-2x-3)\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x\right]_{\sqrt{3}}^3$$

$$=\frac{27}{2}-4\sqrt{3}$$

따라서 $p\times q=\frac{27}{2}\times 4=54$

21. [출제의도] 지수함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

점 D 의 좌표를 $(t,\ 0)\ (t>0)$ 이라 하자.

점 D 는 선분 CA 를 $5:3$ 으로 외분하는 점이므로 $\overline{\mathrm{CA}}:\overline{\mathrm{AD}}=2:3$

점 A 의 x 좌표는 $\frac{2}{5}t$, $\mathrm{A}\left(\frac{2}{5}t,\ \frac{6}{5}t\right)$

점 C 의 y 좌표는 $2t$, $\mathrm{C}(0,\ 2t)$

직선 BC 의 방정식은 $y=-\frac{1}{3}x+2t$

점 B 는 두 직선 $y=3x$, $y=-\frac{1}{3}x+2t$ 의 교점이므로 $\mathrm{B}\left(\frac{3}{5}t,\ \frac{9}{5}t\right)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=\frac{\sqrt{10}}{5}t$

삼각형 ABC 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\sqrt{10}}{5}t\right)^2=\frac{t^2}{5}=20$

$t^2=100$ 이므로 $t=10$

$\mathrm{A}(4,\ 12)$, $\mathrm{B}(6,\ 18)$ 이므로

$12=2^{4-m}+n$, $18=2^{6-m}+n$

$18-2^{6-m}=12-2^{4-m}$

$2^{6-m}-2^{4-m}=6$

$64\times 2^{-m}-16\times 2^{-m}=6$

$48\times 2^{-m}=6$, $2^{-m}=\frac{1}{8}$

$m=3$, $n=10$

따라서 $m+n=13$

22. [출제의도] 접선의 방정식과 그래프의 개형을 활용하여 문제 해결하기

방정식 $g(x)=0$ 에서

$x=t$ 일 때 $f(t)-t-f(t)+t=0$ 이므로 $g(t)=0$

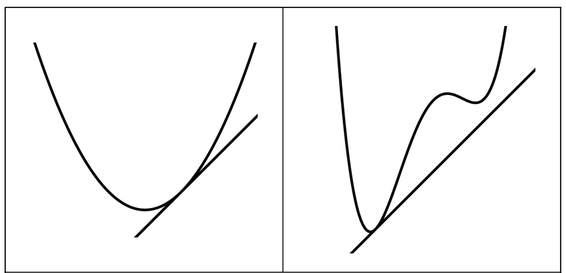
$x\neq t$ 일 때 $f(x)-x-f(t)+t=0$ 에서

$\frac{f(x)-f(t)}{x-t}=1$ 이다.

그러므로 함수 $h(t)$ 는 곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(t,\ f(t))$ 를 지나고 기울기가 1 인 직선 l 과 곡선 $y=f(x)$ 의 교점의 개수이다.

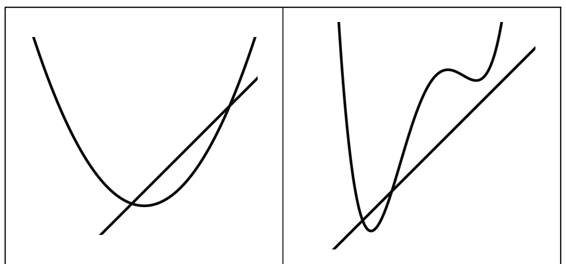
임의의 실수 s 에 대하여 $h(s)\geq 1$ 이다.

(i) $h(s)=1$ 인 경우

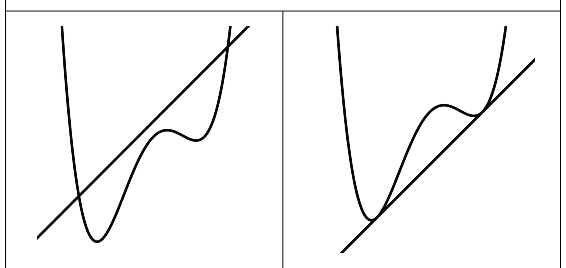


$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$ 이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=1$

(ii) $h(s)=2$ 인 경우



$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$ 이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$



$\lim\limits_{t\to s}h(t)=2$ 이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=0$	$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$ 이므로 $\lim\limits_{t\to s}\{h(t)-h(s)\}=2$

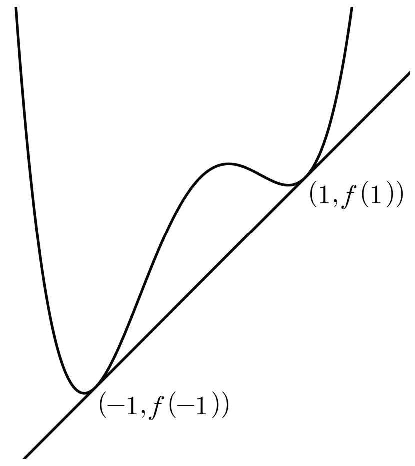
(iii) $h(s)\geq 3$ 인 경우

$\lim\limits_{t\to s}h(t)=4$ 이거나 극한값이 존재하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에 의하여

곡선 $y=f(x)$ 와 직선 l 이 두 점 $(-1,\ f(-1))$, $(1,\ f(1))$ 에서 접할 때

$\lim\limits_{t\to -1}\{h(t)-h(-1)\}=\lim\limits_{t\to 1}\{h(t)-h(1)\}=2$ 를 만족시킨다.



함수 $f(x)$ 의 최고차항의 계수를 a, 직선 l 의 방정식을 $y=x+b$ 라 하자. (단, a, b 는 상수)

$f(x)-(x+b)=a(x-1)^2(x+1)^2$

$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+b$

조건 (나)에서 $\int_0^{\alpha}\{f(x)-|f(x)|\}dx=0$ 을 만족시키는 실수 α 의 최솟값이 -1 이므로

$-1\leq x\leq 0$ 에서 $f(x)\geq 0$, $f(-1)\geq 0$

$f(-1)>0$ 이면 실수 α 의 최솟값이 -1 이 아니므로 $f(-1)=0$

$f(-1)=-1+b=0$, $b=1$

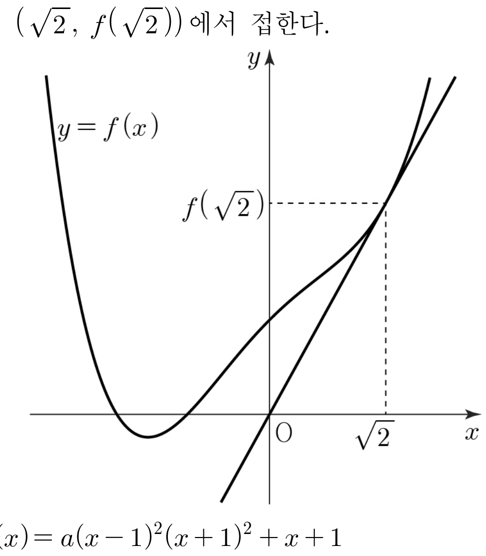
$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

조건 (다)에서

$$\frac{d}{dx}\int_0^x\{f(u)-ku\}du=f(x)-kx\geq 0$$

$f(x)\geq kx$ 이므로 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=kx$ 가 접하거나 만나지 않는다.

실수 k 의 최댓값이 $f'(\sqrt{2})$ 이므로 그림과 같이 곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=f'(\sqrt{2})x$ 가 점 $(\sqrt{2},\ f(\sqrt{2}))$ 에서 접한다.



$f(x)=a(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

$\quad=ax^4-2ax^2+x+a+1$

$f'(x)=4ax^3-4ax+1$

$f(\sqrt{2})=4a-4a+\sqrt{2}+a+1=a+\sqrt{2}+1$

$f'(\sqrt{2})=8\sqrt{2}a-4\sqrt{2}a+1=4\sqrt{2}a+1$

$f(\sqrt{2})=f'(\sqrt{2})\times\sqrt{2}$ 이므로

$a+\sqrt{2}+1=(4\sqrt{2}a+1)\times\sqrt{2}$

$\quad=8a+\sqrt{2}$

$a=\frac{1}{7}$, $f(x)=\frac{1}{7}(x-1)^2(x+1)^2+x+1$

따라서 $f(6)=\frac{1}{7}\times 5^2\times 7^2+6+1=182$

기하 정답

23	②	24	③	25	⑤	26	①	27	④
28	②	29	15	30	27				

기하 해설

23. [출제의도] 벡터의 덧셈 계산하기

$2\vec{a}+\vec{b}=(4,\ 6)+(4,\ -2)$

$=(4+4,\ 6+(-2))$

$=(8,\ 4)$

따라서 벡터 $2\vec{a}+\vec{b}$의 모든 성분의 합은 12

24. [출제의도] 타원의 접선의 방정식 이해하기

타원 $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 위의 점 중

제1사분면에 있는 점 $(a,\ b)$에서의

접선의 방정식은 $\dfrac{ax}{32}+\dfrac{by}{8}=1$

접선이 점 $(8,\ 0)$을 지나므로 $\dfrac{8a}{32}=1$, $a=4$

점 $(4,\ b)$가 타원 $\dfrac{x^2}{32}+\dfrac{y^2}{8}=1$ 위의 점이므로

$\dfrac{16}{32}+\dfrac{b^2}{8}=1$, $b^2=4$

$b>0$이므로 $b=2$

따라서 $a+b=4+2=6$

25. [출제의도] 벡터를 이용한 직선의 방정식 이해하기

직선 l이 벡터 $\vec{u}=(3,\ -1)$에 평행하므로

직선 l의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하자.

직선 m의 방향벡터를 $\vec{v}$라 하면 $\vec{v}=(7,\ 1)$

$|\vec{u}|=\sqrt{3^2+(-1)^2}=\sqrt{10}$

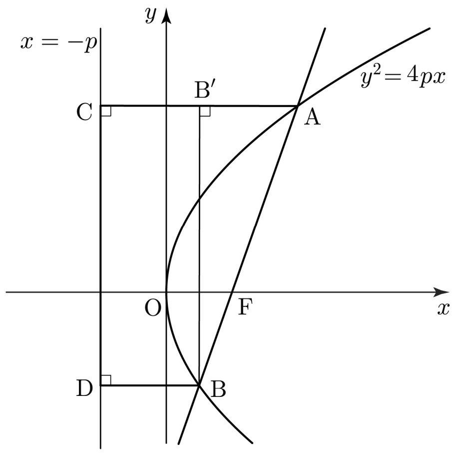
$|\vec{v}|=\sqrt{7^2+1^2}=\sqrt{50}$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,\ -1)\cdot(7,\ 1)=3\times7+(-1)\times1=20$

따라서

$\cos\theta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\dfrac{|20|}{\sqrt{10}\times\sqrt{50}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

26. [출제의도] 포물선의 성질 이해하기



$\overline{AC}=2k$, $\overline{BD}=k\ (k>0)$이라 하자.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{AF}=\overline{AC}$, $\overline{BF}=\overline{BD}$

$\overline{AB}=\overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AC}+\overline{BD}=2k+k=3k$

점 B에서 직선 AC에 내린 수선의 발을 B′이라 하자.

$\overline{BB'}=\sqrt{(3k)^2-k^2}=2\sqrt{2}k$

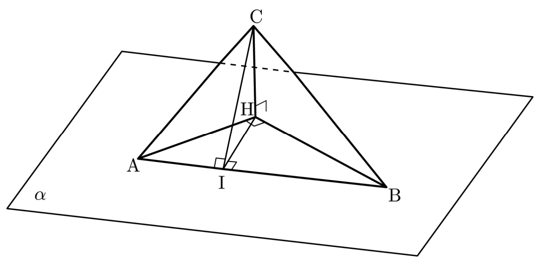
사각형 ACDB의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times(2k+k)\times2\sqrt{2}k=3\sqrt{2}k^2=12\sqrt{2}$

$k^2=4$, $k=2$

따라서 선분 AB의 길이는 $3k=6$

27. [출제의도] 삼수선의 정리 이해하기



$\overline{CH}=a\ (a>0)$이라 하자.

직각삼각형 CAH에서

$\overline{AC}=\sqrt{3}a$, $\overline{AH}=\sqrt{(\sqrt{3}a)^2-a^2}=\sqrt{2}a$

직각삼각형 ABH에서

$\overline{AB}=\sqrt{6}a$, $\overline{BH}=\sqrt{(\sqrt{6}a)^2-(\sqrt{2}a)^2}=2a$

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 I라 하면

$\overline{CH}\perp\alpha$, $\overline{CI}\perp\overline{AB}$

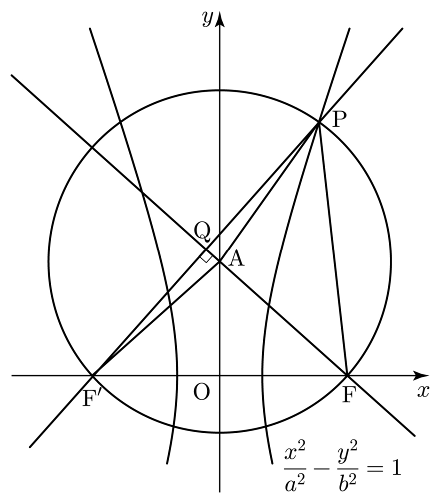
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{HI}\perp\overline{AB}$

직각삼각형 HBI에서 $\overline{HI}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a$

$\overline{CI}=\sqrt{\overline{CH}^2+\overline{HI}^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}a\right)^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{3}a$

따라서 $\cos\theta=\dfrac{\overline{HI}}{\overline{CI}}=\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

28. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 활용하여 문제 해결하기



$\overline{PF}=3k$, $\overline{PF'}=4k\ (k>0)$이라 하자.

쌍곡선의 정의에 의하여 $\overline{PF'}-\overline{PF}=k=2a$

$\overline{AF}=\overline{AF'}$이므로

삼각형 APF′은 $\overline{AP}=\overline{AF'}$인 이등변삼각형이고

$\overline{QP}=\overline{QF'}=4a$

$\overline{QF}=\sqrt{\overline{PF}^2-\overline{QP}^2}=\sqrt{(6a)^2-(4a)^2}=2\sqrt{5}a$

삼각형 FPF′에서 선분 FQ가 선분 PF′을 수직이등분하므로 삼각형 FPF′은

이등변삼각형이고 $\overline{FF'}=\overline{PF}=6a$

$\overline{OF}=c=3a$ (단, O는 원점)

$\angle AFF'=\theta$라 하면 직각삼각형 QFF′에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{QF'}}{\overline{QF}}=\dfrac{4a}{2\sqrt{5}a}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

직각삼각형 OFA에서

$\tan\theta=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OF}}=\dfrac{6}{c}=\dfrac{2}{a}$

$\dfrac{2}{5}\sqrt{5}=\dfrac{2}{a}$, $a=\sqrt{5}$

$c^2=a^2+b^2=9a^2$, $b^2=8a^2$

따라서 $b^2-a^2=7a^2=35$

29. [출제의도] 벡터의 내적을 활용하여 추론하기

두 점 C, D는 원 위의 점이므로

$\angle ACB=\dfrac{\pi}{2}$, $\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AC}|^2=27$에서 $\overline{AC}=3\sqrt{3}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=|\overrightarrow{AD}|^2=9$에서 $\overline{AD}=3$

그러므로 $\overline{BC}=3$, $\overline{BD}=3\sqrt{3}$

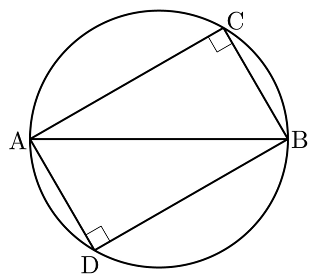
$\overline{CD}>3$이므로 $\overline{CD}=6$

$\overline{AC}=\overline{DB}=3\sqrt{3}$, $\overline{AD}=\overline{CB}=3$,

$\angle ACB=\angle ADB=\dfrac{\pi}{2}$이므로

사각형 ADBC는 직사각형이다.

그러므로 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}$



조건 (가)에 의하여

$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$에서

$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}-(\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA})=k\overrightarrow{BC}$

$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}-\overrightarrow{DB}=k\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DA}$

$=k\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BC}$

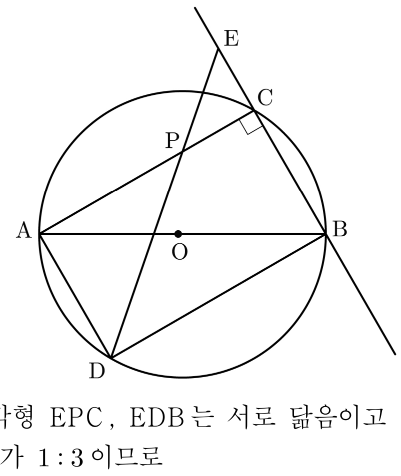
$=(k-1)\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{DE}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DP}$를 만족시키는 점을 E라 하면

$\overrightarrow{DE}-\overrightarrow{DB}=(k-1)\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BE}=(k-1)\overrightarrow{BC}$

그러므로 점 E는 직선 BC 위에 있다.

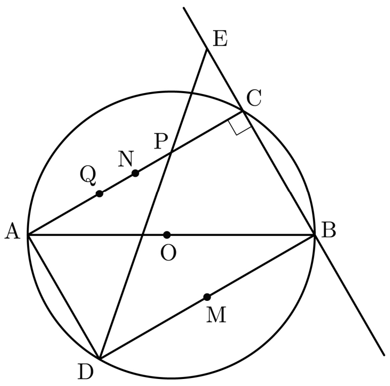


두 삼각형 EPC, EDB는 서로 닮음이고 닮음비가 1 : 3이므로

$\overline{BE}=\dfrac{3}{2}\overline{BC}$이므로 $k-1=\dfrac{3}{2}$에서 $k=\dfrac{5}{2}$

$\overline{\mathrm{PC}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{DB}}=\sqrt{3}$

그러므로 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{PC}}=2\sqrt{3}$ … ㉠



선분 BD 의 중점을 M 이라 하면

조건 (나)에 의하여 $\overrightarrow{\mathrm{QB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QD}}=3$

$\overrightarrow{\mathrm{QB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QD}}$

$=(\overrightarrow{\mathrm{QM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{QM}}+\overrightarrow{\mathrm{MD}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{QM}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{MB}}+\overrightarrow{\mathrm{MD}})+\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MD}}$

$=|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{QM}}\cdot\vec{0}-|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|^2-\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|^2-\frac{27}{4}$

이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|^2=\frac{39}{4}$

선분 AC 의 중점을 N 이라 하면

$\overline{\mathrm{MN}}=\overline{\mathrm{BC}}=3$

$|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{QN}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2$

$=|\overrightarrow{\mathrm{QN}}|^2+9$

$|\overrightarrow{\mathrm{QN}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|^2-9=\frac{3}{4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{QN}}|=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{\mathrm{AQ}}=\overline{\mathrm{AC}}-\overline{\mathrm{QC}}$ 이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\sqrt{3}$ 또는 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=2\sqrt{3}$

$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=2\sqrt{3}$ 이면 ㉠에 의하여

점 P 는 점 Q 와 같으므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=\sqrt{3}$

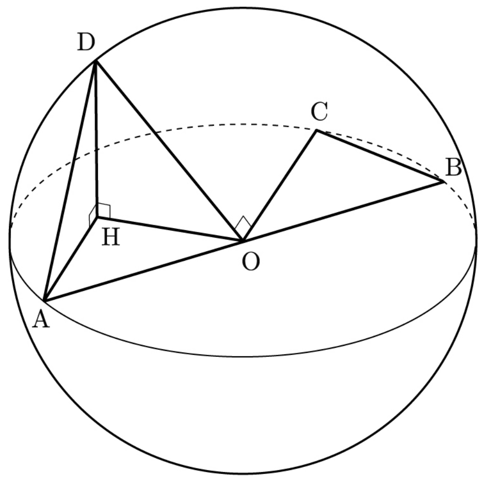
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|\times\cos(\angle\mathrm{DPA})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|\times|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$

$=\sqrt{3}\times2\sqrt{3}=6$

따라서 $k\times(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}})=\frac{5}{2}\times6=15$

30. [출제의도] 정사영을 활용하여 문제 해결하기



조건 (가)에 의하여

$\overline{\mathrm{OC}}\perp\overline{\mathrm{OD}}$, $\overline{\mathrm{DH}}\perp$(평면 COH)이므로

삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{OC}}$

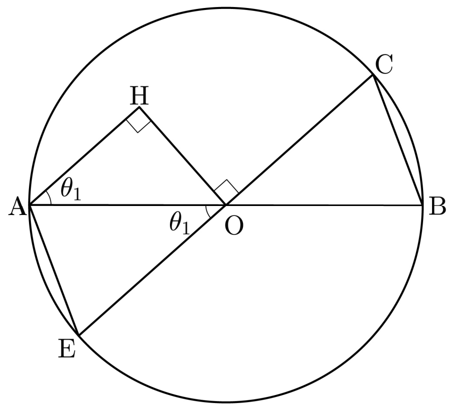
$\overline{\mathrm{DH}}\perp$(평면 ABC)이므로 $\overline{\mathrm{DH}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$

조건 (나)에 의하여

$\overline{\mathrm{AD}}\perp\overline{\mathrm{OH}}$, $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{DH}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{OH}}\perp$(평면 DAH)

그러므로 $\overline{\mathrm{OH}}\perp\overline{\mathrm{AH}}$



직선 OC 와 구가 만나는 점 중 점 C 가 아닌 점을 E 라 하면 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{2}$

$\angle\mathrm{AOE}=\theta_1$ 이라 하면 $\angle\mathrm{OAH}=\angle\mathrm{AOE}=\theta_1$

삼각형 OAE 에서

$\cos\theta_1=\frac{4^2+4^2-(2\sqrt{2})^2}{2\times4\times4}=\frac{3}{4}$

그러므로 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{OA}}\cos\theta_1=4\times\frac{3}{4}=3$

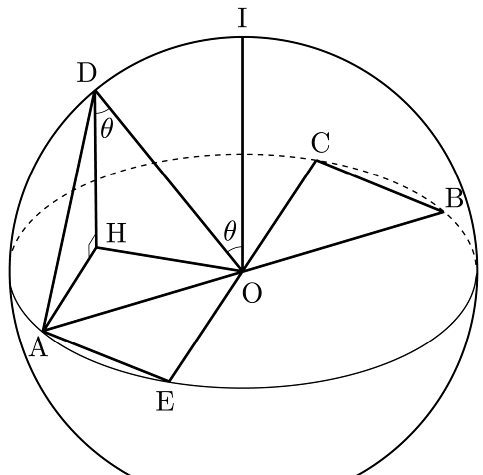
$\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OA}}^2-\overline{\mathrm{AH}}^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$

삼각형 DHO 에서

$\overline{\mathrm{DH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{OD}}^2-\overline{\mathrm{OH}}^2}=\sqrt{16-7}=3$

삼각형 DAH 의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AH}}\times\overline{\mathrm{DH}}=\frac{1}{2}\times3\times3=\frac{9}{2}$



점 O 를 지나고 평면 ABC 에 수직인 직선과 구가 만나는 점 중 점 D 에 가까운 점을 I 라 하자.

$\overline{\mathrm{DH}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{OI}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{DH}}\,/\!/$(평면 IEC)

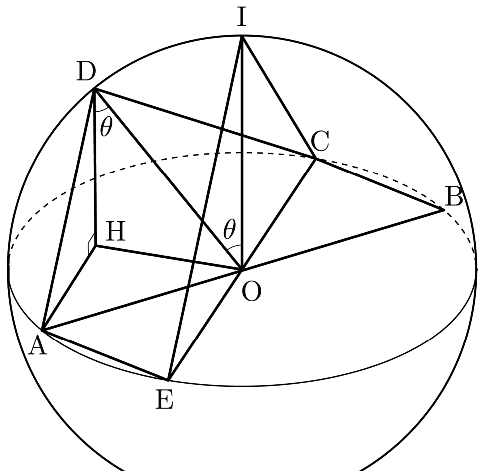
$\overline{\mathrm{AH}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{EC}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{AH}}\,/\!/$(평면 IEC)

그러므로 두 직선 DH, AH 를 포함하는 평면 DAH 는 평면 IEC 와 평행하다.

직선 CE 는 두 평면 IEC, DOC 의 교선이고

$\overline{\mathrm{CE}}\perp\overline{\mathrm{OI}}$, $\overline{\mathrm{CE}}\perp\overline{\mathrm{OD}}$ 이므로

두 평면 IEC, DOC 가 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면 $\angle\mathrm{DOI}=\theta$



$\angle\mathrm{ODH}=\angle\mathrm{DOI}=\theta$ 이므로

$\cos\theta=\cos(\angle\mathrm{ODH})=\frac{\overline{\mathrm{DH}}}{\overline{\mathrm{OD}}}=\frac{3}{4}$

삼각형 DAH 의 넓이를 S_1 이라 하면

$S=S_1\times\cos\theta=\frac{9}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{27}{8}$

따라서 $8S=27$