2024학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가

수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ③	03. ②	04. ①	05. ⑤
06. ③	07. ④	08. ④	09. ③	10. ③
11. ⑤	12. ①	13. ③	14. ②	15. ④
16. 6	17. 24	18. 5	19. 4	
20. 98	21. 19	22. 10		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 값을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$

$=3^{(1-\sqrt{5})+(1+\sqrt{5})}$

$=3^2$

$=9$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=2x^2-x$에서

$f'(x)=4x-1$

이므로

$\lim_{x\to 1}\dfrac{f(x)-1}{x-1}=f'(1)=3$

정답 ③

3. 출제의도 : 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이고 $\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$이므로

$\sin\theta=-\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=-\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2}$

$=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

따라서

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$=\dfrac{-\dfrac{\sqrt{3}}{3}}{\dfrac{\sqrt{6}}{3}}$

$=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

정답 ②

4. 출제의도 : 그래프를 보고 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$\lim_{x\to -2+}f(x)=-2,\ \lim_{x\to 1-}f(x)=0$

이므로

$\lim_{x\to -2+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=-2+0=-2$

정답 ①

5. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 등비수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r라 하면 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$이다.

$\frac{a_3a_8}{a_6}=12$에서 $\frac{ar^2\times ar^7}{ar^5}=12$, $ar^4=12$

즉, $a_5=12$

$a_5+a_7=36$에서 $a_7=24$이므로

$r^2=\frac{a_7}{a_5}=\frac{24}{12}=2$

$\frac{a_{11}}{a_7}=r^4=(r^2)^2=2^2=4$이므로

$a_{11}=a_7\times4=24\times4=96$

정답 ⑤

6. **출제의도** : 다항함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

이고, 함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=3$에서 극소이므로

$$\begin{aligned}3x^2+2ax+b&=3(x+1)(x-3)\\&=3x^2-6x-9\end{aligned}$$

따라서 $a=-3$, $b=-9$ 이고

$f(x)=x^3-3x^2-9x+1$

이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=-1-3+9+1=6$

정답 ③

7. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$3a+2b=\log_3 32$, $ab=\log_9 2$이므로

$$\begin{aligned}\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}&=\frac{3a+2b}{6ab}\\&=\frac{\log_3 32}{6\times log_9 2}\\&=\frac{\log_3 2^5}{6\times log_{3^2} 2}\\&=\frac{5\log_3 2}{3\log_3 2}\\&=\frac{5}{3}\end{aligned}$$

정답 ④

8. **출제의도** : 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=6x^2-2f(1)x$에서

$f(x)=2x^3-f(1)x^2+C$ (C는 적분상수)

라 하면 $f(0)=4$이므로

$C=4$

즉, $f(x)=2x^3-f(1)x^2+4$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=2-f(1)+4$

$f(1)=3$

따라서

$f(x)=2x^3-3x^2+4$

이므로

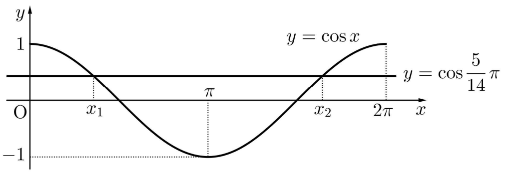
$f(2)=2\times2^3-3\times2^2+4=8$

정답 ④

9. **출제의도** : 삼각함수가 포함된 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin\dfrac{\pi}{7}=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{7}\right)=\cos\dfrac{5}{14}\pi$



그림과 같이 곡선 $y=\cos x(0\le x\le 2\pi)$와 직선 $y=\cos\dfrac{5}{14}\pi$가 만나는 두 점의 x좌표를 각각 x_1, $x_2(x_1<x_2)$라 하면

$x_1=\dfrac{5}{14}\pi$이고 $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\pi$이므로

$x_2=2\pi-x_1=\dfrac{23}{14}\pi$

따라서 $0\le x\le 2\pi$일 때, 부등식 $\cos x\le\sin\dfrac{\pi}{7}$을 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\dfrac{5}{14}\pi\le x\le\dfrac{23}{14}\pi$이므로

$\beta-\alpha=\dfrac{23}{14}\pi-\dfrac{5}{14}\pi=\dfrac{9}{7}\pi$

정답 ③

10. 출제의도 : 삼차함수 그래프의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (2, 3)에서의 접선이 점 (1, 3)을 지나므로

$f(x)-3=(x-a)(x-2)^2$

$f(x)=(x-a)(x-2)^2+3$ (단, a는 상수)

이때

$f'(x)=(x-2)^2+2(x-a)(x-2)$

이므로 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선의 방정식은

$y-f(-2)=f'(-2)(x+2)$

이 접선이 점 $(1,3)$을 지나므로

$3-f(-2)=f'(-2)(1+2)$

$3-f(-2)=3f'(-2)$

$3-\{16(-2-a)+3\}=3\{16-8(-2-a)\}$

$3-(-29-16a)=3(32+8a)$

$32+16a=96+24a$, $8a=-64$

즉, $a=-8$이므로

$f(x)=(x+8)(x-2)^2+3$

따라서

$f(0)=8(-2)^2+3=35$

정답 ③

11. 출제의도 : 적분을 이용하여 수직선 위를 움직이는 점이 움직인 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P가 점 A(1)에서 출발하고 속도가 $v_1(t)=3t^2+4t-7$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_1(t)$라 하면

$s_1(t)=1+\displaystyle\int_0^t(3t^2+4t-7)dt$

$\quad=t^3+2t^2-7t+1$ -----㉠

또, 점 Q가 점 B(8)에서 출발하고 속도가 $v_2(t)=2t+4$이므로 시각 t에서의 위치를 $s_2(t)$라 하면

$s_2(t)=8+\displaystyle\int_0^t(2t+4)dt$

$\quad=t^2+4t+8$ -----㉡

이때, 두 점 P, Q사이의 거리가 4가 되는 시각은

$|s_1(t)-s_2(t)|=4$

㉠, ㉡에서

$|(t^3+2t^2-7t+1)-(t^2+4t+8)|=4$

$|t^3+t^2-11t-7|=4$
그러므로
$t^3+t^2-11t-7=4$ 또는
$t^3+t^2-11t-7=-4$
즉,
$t^3+t^2-11t-11=0$ 또는
$t^3+t^2-11t-3=0$
(i) $t^3+t^2-11t-11=0$일 때,
$t^2(t+1)-11(t+1)=0$
$(t+1)(t^2-11)=0$
$t>0$이므로
$t=\sqrt{11}$
(ii) $t^3+t^2-11t-3=0$일 때,
좌변을 인수분해하면
$(t-3)(t^2+4t+1)=0$
$t>0$이므로
$t=3$
(i), (ii)에 의하여 두 점 P, Q의 사이의 거리가 처음으로 4가 되는 시각은
$t=3$
한편,
$v_1(t)=3t^2+4t-7$
$=(3t+7)(t-1)$
이므로
$0\le t<1$일 때, $v_1(t)<0$
$t\ge 1$일 때, $v_1(t)\ge 0$
따라서 점 P가 시각 $t=0$에서 시각 $t=3$까지 움직인 거리는
$\int_0^3 |v_1(t)|dt$
$=-\int_0^1 v_1(t)dt+\int_1^3 v_1(t)dt$
$=-\int_0^1 (3t^2+4t-7)dt+\int_1^3 (3t^2+4t-7)dt$
$=-\left[t^3+2t^2-7t\right]_0^1+\left[t^3+2t^2-7t\right]_1^3$
$=-(-4)+28$
$=32$

정답 ⑤

12. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
자연수 k에 대하여
(i) $a_1=4k$일 때,
a_1은 짝수이므로
$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{4k}{2}=2k$
a_2도 짝수이므로
$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{2k}{2}=k$
㉠ k가 홀수인 경우
$a_4=a_3+1=k+1$
이때
$a_2+a_4=2k+(k+1)=3k+1$
이므로
$3k+1=40$
에서 $k=13$이고,
$a_1=4k=4\times 13=52$
㉡ k가 짝수인 경우
$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{k}{2}$
이때
$a_2+a_4=2k+\frac{k}{2}=\frac{5}{2}k$
이므로
$\frac{5}{2}k=40$
에서 $k=16$이고,
$a_1=4k=4\times 16=64$

(ⅱ) $a_1=4k-1$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=4k$

a_2는 짝수이므로

$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4k}{2}=2k$

a_3도 짝수이므로

$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2k}{2}=k$

이때

$a_2+a_4=4k+k=5k$

이므로

$5k=40$

에서 $k=8$이고,

$a_1=4k-1=4\times8-1=31$

(ⅲ) $a_1=4k-2$일 때,

a_1은 짝수이므로

$a_2=\frac{a_1}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1$

a_2는 홀수이므로

$a_3=a_2+1=(2k-1)+1=2k$

a_3은 짝수이므로

$a_4=\frac{a_3}{2}=\frac{2k}{2}=k$

이때

$a_2+a_4=(2k-1)+k=3k-1$

이므로

$3k-1=40$

에서 $k=\frac{41}{3}$이고, 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $a_1=4k-3$일 때,

a_1은 홀수이므로

$a_2=a_1+1=(4k-3)+1=4k-2$

a_2는 짝수이므로

$a_3=\frac{a_2}{2}=\frac{4k-2}{2}=2k-1$

a_3은 홀수이므로

$a_4=a_3+1=(2k-1)+1=2k$

이때

$a_2+a_4=(4k-2)+2k=6k-2$

이므로

$6k-2=40$

에서 $k=7$이고,

$a_1=4k-3=4\times7-3=25$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$52+64+31+25=172$

정답 ①

13. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수가 주어진 증가, 감소에 대한 조건을 만족시키도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0)\\ \frac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq0)\end{cases}$$

에서

$$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b & (x>0)\end{cases}$$

이다.

함수 $f(x)$가 $x=-1$의 좌우에서 감소하다가 증가하고, 함수 $f(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하므로

$f'(-1)=0$

$-1+2a-b=0$, $b=2a-1$

$x<0$일 때

$f'(x)=-x^2-2ax-2a+1$

$=-(x+1)(x+2a-1)$

$f'(x)=0$인 x의 값은 $x=-1$ 또는 $x=-2a+1$이다. 이때 함수 $f(x)$가 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고, 구간 $[-1,\ 0]$에서 증가하므로 $(-\infty,\ -1)$에서 $f'(x)\le 0$, $(-1,\ 0)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

즉, $f'(-2a+1)=0$에서 $-2a+1\ge 0$이어야 한다.

그러므로 $a\le\frac{1}{2}$ …… ㉠

한편, $x>0$일 때

$f'(x)=x^2+2ax-b$

$=x^2+2ax-2a+1$

$=(x+a)^2-a^2-2a+1$

이고 함수 $f(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 증가하므로 $(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이어야 한다.

(ⅰ) $-a<0$, 즉 $a>0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(0)=-2a+1\ge 0$이면 된다.

그러므로 $0<a\le\frac{1}{2}$

(ⅱ) $-a\ge 0$, 즉 $a\le 0$인 경우

$(0,\ \infty)$에서 $f'(x)\ge 0$이려면

$f'(-a)=-a^2-2a+1\ge 0$이면 된다.

$a^2+2a-1\le 0$,

$-1-\sqrt{2}\le a\le -1+\sqrt{2}$

그러므로 $-1-\sqrt{2}\le a\le 0$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$-1-\sqrt{2}\le a\le\frac{1}{2}$ …… ㉡

즉, ㉠, ㉡에서 구하는 a의 값의 범위는 $-1-\sqrt{2}\le a\le\frac{1}{2}$이므로 $a+b=3a-1$의 값의 최댓값은 $a=\frac{1}{2}$일 때 $\frac{1}{2}$, 최솟값은 $a=-1-\sqrt{2}$일 때 $-4-3\sqrt{2}$이다.

따라서

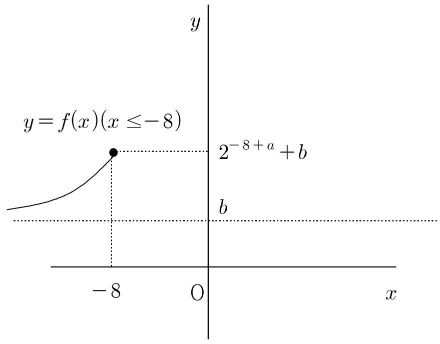
$$M-m=\frac{1}{2}-(-4-3\sqrt{2})=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$$

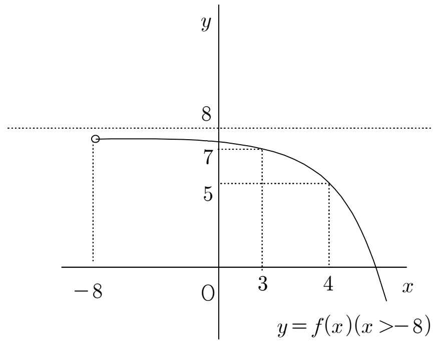
정답 ③

14. 출제의도 : 지수함수의 그래프를 이해하고 조건을 만족시키는 지수함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$x\le -8$과 $x>-8$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 각각 그림과 같다.





또한 주어진 조건에서 $3\le k<4$이므로 $x>-8$인 경우에 정수 $f(x)$는

$f(x)=6$ 또는 $f(x)=7$

이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 $x\le -8$인 경우에 정수 $f(x)$는 6뿐이어야 한다.

즉 $b=5$이고 $6 \le f(-8) < 7$ 이어야 하므로

$6 \le 2^{-8+a}+5 < 7$

$1 \le 2^{-8+a} < 2$

$0 \le -8+a < 1$, $8 \le a < 9$

이때 a는 자연수이므로 $a=8$

따라서 $a+b=8+5=13$

정답 ②

15. **출제의도** : 함수의 극한과 연속을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to3} g(x) = g(3)-1$ ----㉠

이므로 $x=3$일 때, $f(3)$의 값에 따라 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $f(3) \neq 0$일 때,

$x=3$에 가까운 x의 값에 대하여 $f(x) \neq 0$이므로

$$g(x) = \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)}$$

이때 함수 $f(x)$는 다항함수이므로 $f(x)$, $f(x+3)$, $f(x)+1$은 연속이다.

그러므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 연속이다. 즉,

$\lim_{x\to3} g(x) = g(3)$

이 식을 ㉠에 대입하면 만족하지 않는다.

(ⅱ) $f(3)=0$일 때,

함수 $f(x)$가 삼차함수이므로 방정식 $f(x)=0$은 많아야 서로 다른 세 실근을 갖는다.

그러므로 $x=3$에 가까우며 $x \neq 3$인 x의 값에 대하여

$f(x) \neq 0$

이때,

$\lim_{x\to3} g(x)$

$$= \lim_{x\to3} \frac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} \quad \text{----㉡}$$

위에서 $x\to3$일 때, (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$에서

$\lim_{x\to3} f(x+3)\{f(x)+1\}=0$

$f(6)\{f(3)+1\}=0$

$f(6)=0$

그러므로

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$

(k는 상수)

이 식을 ㉡에 대입하면

$\lim_{x\to3} g(x)$

$$= \lim_{x\to3} \frac{x(x-3)(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-3)(x-6)(x-k)}$$

$$= \lim_{x\to3} \frac{x(x+3-k)\{(x-3)(x-6)(x-k)+1\}}{(x-6)(x-k)}$$

$$= \frac{3(6-k)}{-3(3-k)}$$

$$= \frac{6-k}{k-3}$$

이 값을 ㉠에 대입하면 $g(3)=3$이므로

$$\frac{6-k}{k-3} = 3-1$$

$6-k=2k-6$

$3k=12$

$k=4$

따라서,

$f(x)=(x-3)(x-4)(x-6)$

이고 $f(5) \neq 0$이므로

$$g(5) = \frac{f(8)\{f(5)+1\}}{f(5)}$$

$$= \frac{5\times4\times2\times\{2\times1\times(-1)+1\}}{2\times1\times(-1)}$$

$$=20$$

정답 ④

정답 24

16. **출제의도** : 로그방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :
로그의 진수 조건에 의하여
$x-1>0$에서 $x>1$ ⋯⋯㉠
$13+2x>0$에서 $x>-\frac{13}{2}$ ⋯⋯㉡
㉠, ㉡에서 $x>1$
$\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$
에서
$\log_2(x-1)=\frac{1}{2}\log_2(13+2x)$
$2\log_2(x-1)=\log_2(13+2x)$
$\log_2(x-1)^2=\log_2(13+2x)$
$(x-1)^2=13+2x$
$x^2-4x-12=0$
$(x+2)(x-6)=0$
$x>1$이므로 $x=6$

정답 6

17. **출제의도** : 합의 기호 $\sum$의 성질을 이해하여 주어진 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)&=\sum_{k=1}^{10}\{(2a_k-b_k)-a_k\}\\&=\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{10}a_k\\&=34-10\\&=24\end{aligned}$$

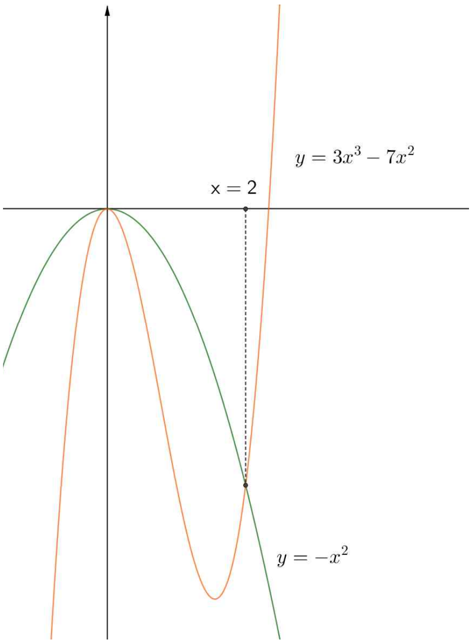
18. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 다항함수의 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에서
$f'(x)=2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$
이므로
$f'(1)=2(a+4)+2(a+2)$
$\quad=4a+12=32$
따라서 $a=5$

정답 5

19. **출제의도** : 두 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 정적분을 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :
두 곡선 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$이 만나는 점의 x좌표는
$3x^3-7x^2=-x^2$
$3x^2(x-2)=0$
$x=0$ 또는 $x=2$
이때, 두 함수 $y=3x^3-7x^2$, $y=-x^2$의 그래프는 다음과 같다.



따라서 구하는 넓이는

$$\int_0^2 \{(-x^2)-(3x^3-7x^2)\}dx$$

$$=\int_0^2 (-3x^3+6x^2)dx$$

$$=\left[-\frac{3}{4}x^4+2x^3\right]_0^2$$

$$=(-12+16)-0$$

$$=4$$

정답 4

20. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{3}{4}\pi}=2R_1,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R_1$$

$$R_1=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}$$

이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi}=2R_2,\ \frac{\overline{BD}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=2R_2$$

$$R_2=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}}\times\overline{BD}$$

이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BD}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos\frac{2}{3}\pi$$

$$=2^2+1-\boxed{(-2)}$$

$$=7$$

이므로

$$R_1\times R_2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{BD}\right)\times\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times\overline{BD}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{6}}{6}\times\overline{BD}^2$$

$$=\boxed{\frac{7\sqrt{6}}{6}}$$

이다.

따라서 $p=\frac{\sqrt{3}}{3},\ q=-2,\ r=\frac{7\sqrt{6}}{6}$ 이므로

$$9\times(p\times q\times r)^2=9\times\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-2)\times\frac{7\sqrt{6}}{6}\right\}^2$$

$$=9\times\frac{98}{9}$$

$$=98$$

정답 98

21. **출제의도** : 등차수열의 일반항과 합을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 수열의 항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자. 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 a는 자연수이고 d는 0 이상의 정수이다.

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)n$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{7}S_k=\sum_{k=1}^{7}\left\{\frac{d}{2}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)k\right\}$$
$$=\frac{d}{2}\times\sum_{k=1}^{7}k^2+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\sum_{k=1}^{7}k$$
$$=\frac{d}{2}\times\frac{7\times8\times15}{6}+\left(a-\frac{d}{2}\right)\times\frac{7\times8}{2}$$
$$=70d+28\left(a-\frac{d}{2}\right)$$
$$=28a+56d$$

$28a+56d=644$에서

$a+2d=23$ …… ㉠

a_7이 13의 배수이므로 자연수 m에 대하여

$a+6d=13m$ …… ㉡

㉡$-$㉠에서 $4d=13m-23$

$4d+23+13=13m+13$

$4(d+9)=13(m+1)$

$$d+9=\frac{13(m+1)}{4}$$

이 값이 자연수가 되어야 하므로 $m+1$의 값은 4의 배수이어야 한다. 즉, m이 될 수 있는 값은

3, 7, 11, 15, ⋯

한편, $d=\dfrac{13m-23}{4}$이므로 ㉡에서

$$a=13m-6d$$
$$=13m-6\times\left(\frac{13m-23}{4}\right)$$
$$=13m-\frac{39}{2}m+\frac{69}{2}$$
$$=-\frac{13}{2}m+\frac{69}{2}$$

이고 이 값이 양수이어야 하므로

$-\dfrac{13}{2}m+\dfrac{69}{2}>0$, $m<\dfrac{69}{13}$

따라서 $m=3$이고 이때 $d=4$이므로

$a=23-2d=15$

이고

$a_2=a+d=15+4=19$

정답 19

22. 출제의도 : 곱의 미분법과 부정적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구하고, 그 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)-3$

이므로

$f(1)=3$ ……㉠

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)-4x$

이고, $f(x)$는 다항함수이므로

$f'(x)=4$

즉,

$f(x)=4x+C_1$ (C_1은 적분상수)

로 놓을 수 있다. 이때 ㉠에서

$f(1)=3$

이므로

$f(1)=4+C_1=3$

$C_1=-1$

즉, $f(x)=4x-1$이므로

$F(x)=2x^2-x+C_2$ (C_2는 적분상수)

한편, 조건 (나)에서

$f(x)G(x)+F(x)g(x)=\{F(x)G(x)\}'$

이므로 양변을 x에 대하여 적분하면

$F(x)G(x)=2x^4+x^3+x+C_3$ (C_3은 적분 상수)

로 놓을 수 있다.

이때 $F(x)=2x^2-x+C_2$이고 $G(x)$도 다항함수이므로 $G(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이다.

$G(x)=x^2+ax+b$ (단, a, b는 상수)

로 놓으면

$$(2x^2-x+C_2)(x^2+ax+b)$$
$$=2x^4+x^3+x+C_3$$

양변의 x^3의 계수를 비교하면

$2a-1=1$

즉, $a=1$이므로

$G(x)=x^2+x+b$

따라서

$$\int_1^3 g(x)dx=\Big[G(x)\Big]_1^3$$
$$=G(3)-G(1)$$
$$=(3^2+3+b)-(1^2+1+b)$$
$$=10$$

정답 10

■ [선택: 확률과 통계]
23. ① 24. ③ 25. ③ 26. ② 27. ④
28. ⑤ 29. 62 30. 336

23. **출제의도** : 이항분포의 평균을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따르는 확률변수 X의 평균은

$\mathrm{E}(X)=30\times\frac{1}{5}=6$

정답 ①

24. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 도로망에서 최단 거리로 가는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{4!}{3!\times 1!}=4$

P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는

$\frac{2!}{1!\times 1!}=2$

따라서 구하는 경우의 수는
$4\times 2=8$

정답 ③

25. **출제의도** : 두 사건의 관계를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A, B^C이 서로 배반사건이므로
$A\subset B$

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)=\frac{1}{5}$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B)&=\frac{7}{10}-\mathrm{P}(A)\\&=\frac{7}{10}-\frac{1}{5}\\&=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서 $A\subset B$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A^C\cap B)&=\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\\&=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\\&=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

정답 ③

26. **출제의도** : 표준정규분포표를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
시험 점수를 확률변수 X라 하면
X는 정규분포 $\mathrm{N}(68, 10^2)$을 따르고
$Z=\frac{X-68}{10}$으로 놓으면 확률변수 Z는
표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.
따라서

$$\begin{aligned}&\mathrm{P}(55\le X\le 78)\\&=\mathrm{P}\left(\frac{55-68}{10}\le Z\le\frac{78-68}{10}\right)\\&=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(-1.3\le Z\le 0)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.3)+\mathrm{P}(0\le Z\le 1)\\&=0.4032+0.3413\\&=0.7445\end{aligned}$$

정답 ②

27. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

X에서 Y로의 일대일함수 f의 개수는

${}_7\mathrm{P}_4=7\times6\times5\times4$

(ⅰ) 함수 f의 치역에 4가 포함되고 6이 포함되지 않는 경우

함숫값이 4인 정의역의 원소를 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{C}_1=3$

함숫값이 2, 4가 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로

나머지 두 함숫값을 정하는 경우의 수는

${}_4\mathrm{P}_2=4\times3=12$

즉, 이 경우의 확률은

$$\frac{3\times12}{7\times6\times5\times4}=\frac{3}{70}$$

(ⅱ) 함수 f의 치역에 6이 포함되고 4가 포함되지 않는 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$$\frac{3\times12}{7\times6\times5\times4}=\frac{3}{70}$$

(ⅲ) 함수 f의 치역에 4와 6이 모두 포함되는 경우

함숫값이 4, 6인 정의역의 원소와 함숫값을 정하는 경우의 수는

${}_3\mathrm{P}_2=3\times2=6$

함숫값이 2, 4, 6이 아닌 경우, 함숫값이 홀수이어야 하므로

나머지 함숫값을 정하는 경우의 수는 4

즉, 이 경우의 확률은

$$\frac{6\times4}{7\times6\times5\times4}=\frac{1}{35}$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$$\frac{3}{70}+\frac{3}{70}+\frac{1}{35}=\frac{4}{35}$$

정답 ④

28. **출제의도** : 주어진 시행과 표본평균의 의미를 이해하고 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은 $\frac{2}{3}$

주머니 A에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은 $\frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 1일 확률은 $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 2일 확률은 $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

주머니 B에서 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 두 수의 차가 3일 확률은 $\frac{1}{6}$

첫 번째 시행에서 기록한 수를 X_1, 두 번째 시행에서 기록한 수를 X_2라 하면 구하는 확률은 $X_1+X_2=4$일 확률이다.

(ⅰ) $(X_1, X_2)=(1, 3)$인 경우

첫 번째 시행에서 3의 배수의 눈이 나온 경우의 확률은

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{2}{81}$$

첫 번째 시행에서 3의 배수가 아닌 눈이 나온 경우의 확률은

$\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{27}$

이 경우의 확률은

$\frac{2}{81}+\frac{1}{27}=\frac{5}{81}$

(ⅱ) $(X_1, X_2)=(3, 1)$인 경우

(ⅰ)과 같은 방법으로 이 경우의 확률은

$\frac{2}{81}+\frac{1}{27}=\frac{5}{81}$

(ⅲ) $(X_1, X_2)=(2, 2)$인 경우

① 주머니 A에서만 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{81}$

② 주머니 B에서만 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$

③ 주머니 A와 주머니 B에서 한 번씩 공을 꺼내는 경우

이 경우의 확률은

$2\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{81}$

이 경우의 확률은

$\frac{1}{81}+\frac{4}{81}+\frac{4}{81}=\frac{1}{9}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 확률은

$\frac{5}{81}+\frac{5}{81}+\frac{1}{9}=\frac{19}{81}$

정답 ⑤

29. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하여 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

동전을 두 번 던져 앞면이 나온 횟수가 2일 확률은 $\frac{1}{4}$

앞면이 나온 횟수가 0 또는 1일 확률은

$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

문자 B가 보이도록 카드가 놓이려면

뒤집는 횟수가 홀수이어야 한다.

따라서

구하는 확률은 5번의 시행 중 앞면이 나온 횟수가 2인 횟수가 1 또는 3 또는 5인 확률이므로

$$p={}_5\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4+{}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2+{}_5\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$=\frac{405+90+1}{4^5}$$

$$=\frac{31}{64}$$

즉, $128\times p=128\times\frac{31}{64}$

$=62$

정답 62

30. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나)에서

$a\times d$가 홀수이므로 a와 d는 모두 홀수이고, $b+c$가 짝수이므로 b와 c가 모두 홀수이거나 b와 c가 모두 짝수이다.

(ⅰ) b와 c가 모두 홀수인 경우

a, b, c, d가 모두 13 이하의 홀수이다. 13 이하의 홀수의 개수는 7이고, 조건 (가)에서 $a\le b\le c\le d$이므로 조건을 만족시키는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 서로 다른 7개

에서 중복을 허락하여 4개를 택하는 중복조합의 수 ${}_7\mathrm{H}_4$와 같다.

$${}_7\mathrm{H}_4={}_{10}\mathrm{C}_4=\frac{10\times9\times8\times7}{4\times3\times2\times1}=210$$

(ⅱ) b와 c가 모두 짝수인 경우

a와 d가 모두 홀수, b와 c가 모두 짝수, $a\le b\le c\le d$이므로 $d-a$의 값은 12 이하의 자연수이다.

① $d-a=12$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 1, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 6개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_6\mathrm{H}_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$1\times{}_6\mathrm{H}_2=1\times{}_7\mathrm{C}_2=1\times\frac{7\times6}{2\times1}=21$$

② $d-a=10$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 2이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 5개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_5\mathrm{H}_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$2\times{}_5\mathrm{H}_2=2\times{}_6\mathrm{C}_2=2\times\frac{6\times5}{2\times1}=30$$

③ $d-a=8$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 3이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 4개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_4\mathrm{H}_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$3\times{}_4\mathrm{H}_2=3\times{}_5\mathrm{C}_2=3\times\frac{5\times4}{2\times1}=30$$

④ $d-a=6$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 4이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 3개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_3\mathrm{H}_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$4\times{}_3\mathrm{H}_2=4\times{}_4\mathrm{C}_2=4\times\frac{4\times3}{2\times1}=24$$

⑤ $d-a=4$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 5이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 서로 다른 짝수 2개에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 중복조합의 수 ${}_2\mathrm{H}_2$이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$$5\times{}_2\mathrm{H}_2=5\times{}_3\mathrm{C}_2=5\times\frac{3\times2}{2\times1}=15$$

⑥ $d-a=2$인 경우 순서쌍 (a, d)의 개수는 6이고, 순서쌍 (b, c)의 개수는 $a+1=b=c$에서 1이므로 구하는 순서쌍의 개수는

$6\times1=6$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 모든 순서쌍의 개수는

$210+21+30+30+24+15+6=336$

정답 336

[다른 풀이]

(ⅱ) b와 c가 모두 짝수인 경우

홀수 a, d와 짝수 b, c에 대하여

$1\le a\le b\le c\le d\le 13$

이므로

$a=a'$, $b-a=b'$, $c-b=c'$, $d-c=d'$, $14-d=e'$

이라 하면

a', b', d', e'은 홀수이고, c'은 0 또는 짝수이다.

$a'+b'+c'+d'+e'=14$

음이 아닌 정수 a'', b'', c'', d'', e''에 대하여

$a'=2a''+1$, $b'=2b''+1$, $c'=2c''$, $d'=2d''+1$, $e'=2e''+1$

이라 하면

$a''+b''+c''+d''+e''=5$

그러므로 구하는 순서쌍의 개수는

$${}_{5}\mathrm{H}_{5}={}_{9}\mathrm{C}_{5}={}_{9}\mathrm{C}_{4}=\frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2\times1}=126$$

■ [선택: 미적분]
23. ④ 24. ② 25. ② 26. ⑤ 27. ①
28. ② 29. 18 30. 32

23. **출제의도** : 지수함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{7x}-1}{7x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{7}{2}\right)$$

$$=\frac{7}{2}\times\lim_{x\to 0}\frac{e^{7x}-1}{7x}\times\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}$$

$$=\frac{7}{2}\times 1\times 1=\frac{7}{2}$$

정답 ④

24. **출제의도** : 매개변수로 나타내어진 함수의 미분을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$\frac{dx}{dt}=1-2\sin 2t$, $\frac{dy}{dt}=2\sin t\cos t$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2\sin t\cos t}{1-2\sin 2t}\quad\cdots ㉠$$

(단, $1-2\sin 2t\neq 0$)

㉠의 우변에 $t=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$$\frac{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}{1-2\sin\frac{\pi}{2}}=\frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-2\times 1}$$

$$=\frac{1}{1-2}=-1$$

정답 ②

25. **출제의도** : 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=1+\frac{1}{x}$이므로

$$\int_1^e\left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)dx$$

$$=\int_1^e f'(x)f(x)dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}\{f(x)\}^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}\{f(e)\}^2-\frac{1}{2}\{f(1)\}^2$$

$$=\frac{1}{2}(e+1)^2-\frac{1}{2}(1+0)^2$$

$$=\frac{e^2}{2}+e$$

정답 ②

26. **출제의도** : 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d>0)$이라 하면

$$\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\right.$$

$$\left.\cdots+\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)\quad\cdots ㉠$$

이때

$a_n = a_1 + (n-1)d = dn + 1 - d$

이므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(dn+1-d) = \infty$

$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = 0$

㉠에서

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}\left(\lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$= \frac{1}{d}(1-0)$

$= \frac{1}{d}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n\right) = 2$에서

$\frac{1}{a_n a_{n+1}} + b_n = c_n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = 2$

$b_n = c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}$이므로 급수의 성질에 의하여

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n - \frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} c_n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$

$= 2 - \frac{1}{d}$ … ㉡

따라서 등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하므로 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$-1 < r < 1$이고 $a_2 b_2 = (1+d)r = 1$에서

$r = \frac{1}{1+d}$

이때 $d > 0$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{b_1}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+d}} = \frac{1+d}{d}$ … ㉢

이므로 ㉡, ㉢에서

$2 - \frac{1}{d} = \frac{1+d}{d}$,

$\frac{2d-1}{d} = \frac{1+d}{d}$

$d = 2$

㉡ 또는 ㉢에서

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \frac{3}{2}$

정답 ⑤

27. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y = \begin{cases} -\frac{e^x + e^{-x}}{2} + 1 & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -\frac{e^x - e^{-x}}{2} & (x < 0) \\ 0 & (x \geq 0) \end{cases}$$

이므로 $x < 0$일 때

$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2$

에서

$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2}$

$= \left|\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right| = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

이고, $x \geq 0$일 때

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+0=1$$

따라서 $-\ln4\le x\le 1$에서의 곡선의 길이는

$$\int_{-\ln4}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$=\int_{-\ln4}^{0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx+\int_0^1 1dx$$

$$=\left[\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right]_{-\ln4}^{0}+[x]_0^1$$

$$=\left(\frac{e^0-e^0}{2}-\frac{e^{-\ln4}-e^{\ln4}}{2}\right)+(1-0)$$

$$=\left(0-\frac{\frac{1}{4}-4}{2}\right)+1$$

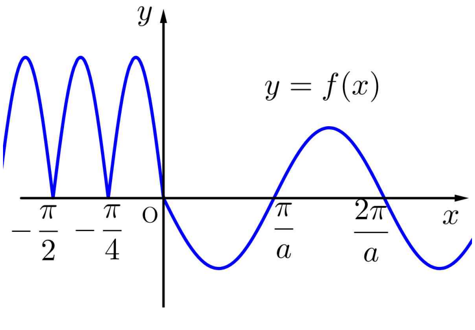
$$=\frac{15}{8}+1=\frac{23}{8}$$

정답 ①

28. 출제의도 : 정적분과 절댓값이 포함된 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$F(x)=\int_{-a\pi}^{x}f(t)dt$라 하자.

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $F(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

이때 정적분의 성질에 의하여

$F'(x)=f(x)$

이고,

$$g(x)=\begin{cases}-F(x) & (F(x)<0)\\ F(x) & (F(x)\ge 0)\end{cases}$$

이므로

$$g'(x)=\begin{cases}-f(x) & (F(x)<0)\\ f(x) & (F(x)>0)\end{cases}$$

따라서 함수 $g(x)=|F(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면

$F(k)=0$인 실수 k가 존재하지 않거나 $F(k)=0$인 모든 실수 k에 대하여 $F'(k)=f(k)=0$이어야 한다.

(ⅰ) 함수 $g(x)$가 구간 $(-\infty,\ 0)$에서 미분가능할 조건

$-a\pi<0$이고 모든 음의 실수 x에 대하여 $f(x)\ge 0$이므로

$F(k)=\int_{-a\pi}^{k}f(t)dt=0$인 음의 실수 k의 값은 $-a\pi$뿐이다.

이때

$f(k)=f(-a\pi)=2|\sin(-4a\pi)|=0$

이어야 하므로 $-4a\pi=-n\pi$, 즉

$a=\frac{n}{4}$ (n은 자연수) ⋯ ㉠

(ⅱ) 함수 $g(x)$가 구간 $[0,\ \infty)$에서 미분가능할 조건

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}f(t)dt=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-2\sin4t)dt$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cos4t\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$=\frac{1}{2}\cos0-\frac{1}{2}\cos(-\pi)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

이고 모든 음의 실수 x에 대하여

$f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=f(x)$가 성립하므로 ㉠에서

$$\int_{-a\pi}^{0} f(t)dt=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt$$

$$=n\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt=n$$

따라서 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=\int_{-a\pi}^{x} f(t)dt$$

$$=\int_{-\frac{n}{4}\pi}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt$$

$$=n+\int_{0}^{x}(-\sin at)dt$$

$$=n+\left[\frac{1}{a}\cos at\right]_{0}^{x}$$

$$=n+\left(\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}\cos 0\right)$$

$$=n+\frac{1}{a}\cos ax-\frac{1}{a}$$

$$=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}$$

이때 $F(k)=0$인 양수 k가 존재하면

$$n=\frac{4}{n}\left(1-\cos\frac{n}{4}k\right)$$

에서

$$\cos\frac{n}{4}k=1-\frac{n^2}{4} \quad \cdots ㉡$$

이때 $f(k)=-\sin ak=-\sin\frac{n}{4}k=0$이어야 하므로

$\frac{n}{4}k=m\pi$ (m은 자연수)에서

㉡에서

$$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}$$

이때 m, n은 자연수이므로

$\cos m\pi=1-\frac{n^2}{4}=-1$, 즉 $n^2=8$을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $g(x)$가 구간 $[0, \infty)$에서 미분가능하려면 모든 양의 실수 x에 대하여

$$F(x)=n+\frac{4}{n}\cos\frac{n}{4}x-\frac{4}{n}>0$$

즉,

$$\cos\frac{n}{4}x>1-\frac{n^2}{4}$$

이어야 한다.

따라서 $1-\frac{n^2}{4}<-1$이어야 하므로

$$n^2>8$$

따라서 자연수 n의 최솟값은 3이므로 ㉠에서 a의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

정답 ②

29. **출제의도** : 등비수열의 극한을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $1<a<3$인 경우

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{3}\right)^n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+a\left(\frac{a}{3}\right)^n}{3+\left(\frac{a}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{1+a\times 0}{3+0}=\frac{1}{3}=a$$

$a=\frac{1}{3}<1$이므로 모순이다.

(ⅱ) $a=3$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+3^{n+1}}{3^{n+1}+3^n}$$

$= \lim_{n \to \infty} 1 = 1 = a$

이므로 모순이다.

(ⅲ) $a > 3$인 경우

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{3}{a}\right)^n = 0$이므로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{3^n + a^{n+1}}{3^{n+1} + a^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\left(\frac{3}{a}\right)^n + a}{3\left(\frac{3}{a}\right)^n + 1}$$

$$= \frac{0 + a}{3 \times 0 + 1} = a$$

이므로 등식을 만족시킨다.

(1) $3 < a < b$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$$

$$= b > 3 = \frac{9}{3} > \frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(2) $3 < b < a$일 때

같은 방법으로

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$$

$$= \frac{1}{a} \neq \frac{9}{a}$$

이므로 등식을 만족시키지 않는다.

(3) $3 < a = b$일 때

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n + b^{n+1}}{a^{n+1} + b^n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a^n + a^{n+1}}{a^{n+1} + a^n} = 1 = \frac{9}{a}$$

에서

$a = 9$, $b = 9$

이상에서 $a = 9$, $b = 9$이므로

$a + b = 18$

정답 18

30. 출제의도 : 삼각함수의 미분법과 음함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 O라 하면

$\overline{OP} = 5$

$\overline{OC} = \overline{AO} - \overline{AC} = 5 - 4 = 1$

삼각형 PCO에서 코사인법칙을 이용하면

$\overline{OP}^2 = \overline{CP}^2 + \overline{OC}^2 - 2 \times \overline{CP} \times \overline{OC} \times \cos\theta$

$\overline{CP} = x$라 하면

$5^2 = x^2 + 1^2 - 2 \times x \times 1 \times cos\,\theta$

$x^2 - 2x\cos\theta - 24 = 0$ ……㉠

$\theta = \frac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$x^2 - \sqrt{2}x - 24 = 0$

$x > 0$이므로 $x = 4\sqrt{2}$

㉠을 θ에 대하여 미분하면

$$2x\frac{dx}{d\theta} - 2\cos\theta\frac{dx}{d\theta} + 2x\sin\theta = 0$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{x\sin\theta}{\cos\theta - x}$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$일 때, $\frac{dx}{d\theta}$의 값은

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{4\sqrt{2} \times \sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4} - 4\sqrt{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}$$

선분 PQ의 중심을 M이라 하면

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{CM}$$

$$= \frac{1}{2} \times 2x\sin\theta \times x\cos\theta$$

$$= x^2\sin\theta\cos\theta$$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$$\frac{dS(\theta)}{d\theta}$$

$$=2x\frac{dx}{d\theta}\sin\theta\cos\theta+x^2\cos^2\theta-x^2\sin^2\theta$$

이 식에 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 를 대입하면

$$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=2\times4\sqrt{2}\times\left(-\frac{4\sqrt{2}}{7}\right)\times\cos\frac{\pi}{4}\times\sin\frac{\pi}{4}$$
$$+(4\sqrt{2})^2\cos^2\frac{\pi}{4}-(4\sqrt{2})^2\sin^2\frac{\pi}{4}$$

$$=-\frac{32}{7}$$

따라서 $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-7\times\left(-\frac{32}{7}\right)=32$

정답 32

■ [선택: 기하]
23. ④ 24. ① 25. ⑤ 26. ② 27. ③
28. ① 29. 17 30. 27

23. **출제의도** : 좌표공간의 점을 대칭이동한 점의 좌표와 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
좌표공간의 점 $A(8, 6, 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점 B의 좌표는
$B(8, 6, -2)$
따라서 선분 AB의 길이는
$$\overline{AB}=\sqrt{(8-8)^2+(6-6)^2+(-2-2)^2}$$
$$=\sqrt{16}$$
$$=4$$

정답 ④

24. **출제의도** : 쌍곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
쌍곡선 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7, 6)$에서의 접선의 방정식은
$\frac{7x}{7}-\frac{6y}{6}=1$
즉, $y=x-1$
이다.
직선 $y=x-1$에서
$y=0$일 때,
$0=x-1$
$x=1$
따라서 구하는 x절편은
1

정답 ①

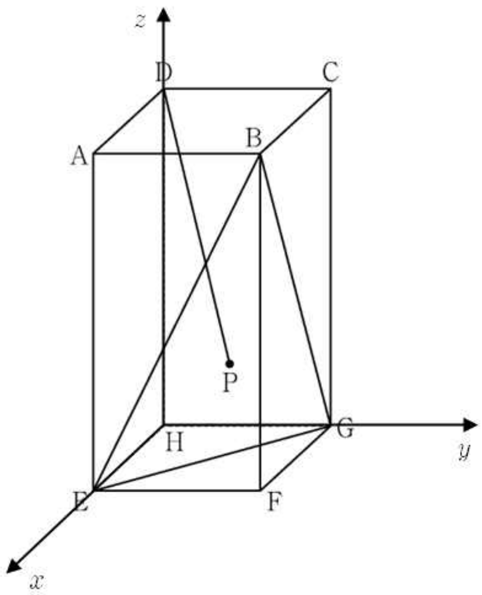
25. **출제의도** : 벡터의 성질을 이용하여 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$A(4, 3)$이므로
$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$
$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}|$
이므로
$|\overrightarrow{OP}|=5$
점 P가 나타내는 도형은 중심이 원점이고 반지름의 길이가 5인 원이다.
따라서 점 P가 나타내는 도형의 길이는
$2\pi\times5=10\pi$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 공간도형에 공간좌표를 적용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
점 H를 원점이라 하고,
반직선 HE가 x축의 양의 방향,
반직선 HG가 y축의 양의 방향,
반직선 HD가 z축의 양의 방향이 되도록 직육면체 ABCD−EFGH를 놓으면 그림과 같다.



$\overline{HE}=\overline{AD}=3$,

$\overline{HG}=\overline{AB}=3$,

$\overline{HD}=\overline{AE}=6$

이므로

$B(3,\ 3,\ 6)$,

$E(3,\ 0,\ 0)$,

$G(0,\ 3,\ 0)$

이다.

삼각형 BEG의 무게중심 P의 좌표는

$\left(\dfrac{3+3+0}{3},\ \dfrac{3+0+3}{3},\ \dfrac{6+0+0}{3}\right)$

즉, $(2,\ 2,\ 2)$

이다.

따라서

$D(0,\ 0,\ 6)$

이므로

$$\begin{aligned}\overline{DP}&=\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(2-6)^2}\\&=\sqrt{4+4+16}\\&=\sqrt{24}\\&=2\sqrt{6}\end{aligned}$$

정답 ②

27. **출제의도** : 포물선의 성질을 이용하여 포물선의 초점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2=4px$에서

초점 F의 좌표는

$(p,\ 0)$

이고, 준선의 방정식은

$x=-p$

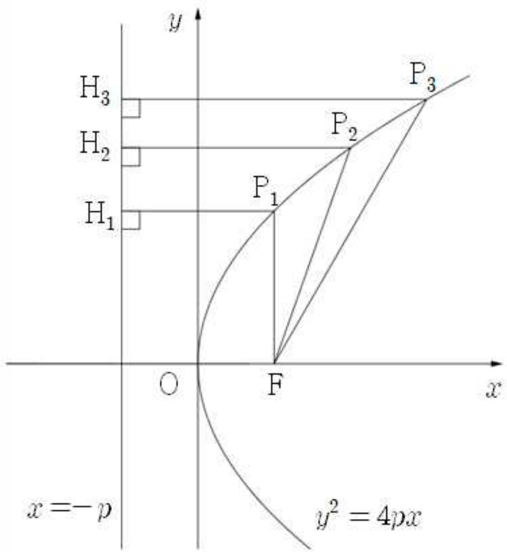
이다.

포물선 위의 세 점 P_1, P_2, P_3에서

포물선의 준선에 내린 수선의 발을 각각

H_1, H_2, H_3

이라 하자.



세 점 P_1, P_2, P_3의 x좌표가 각각

$p,\ 2p,\ 3p$

이므로

포물선의 성질에 의해

$\overline{FP_1}=\overline{H_1P_1}=p+p=2p$,

$\overline{FP_2}=\overline{H_2P_2}=p+2p=3p$,

$\overline{FP_3}=\overline{H_3P_3}=p+3p=4p$

이다.

$\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}=27$에서

$2p+3p+4p=27$

$9p=27$

따라서 $p=3$

정답 ③

28. 출제의도 : 정사영의 성질을 이용하여 정사영시킨 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

좌표공간에서 원점을 O라 하자.

점 P는 중심이 A(0, 0, 1)이고 반지름의 길이가 4인 구 위의 점이므로

$\overline{AP}=4$

이다.

$\overline{OA}\perp(xy$ 평면)

이고

점 P가 xy 평면 위에 있으므로

$\overline{OA}\perp\overline{OP}$

이다.

직각삼각형 AOP

$\overline{OA}=1$

이므로

$\overline{OP}=\sqrt{\overline{AP}^2-\overline{OA}^2}$

$=\sqrt{4^2-1^2}$

$=\sqrt{15}$

원점 O에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 M이라 하면

$\overline{PM}=\overline{QM}$

이다.

$\overline{OA}\perp(xy$ 평면),

$\overline{OM}\perp\overline{PQ}$

이므로

삼수선의 정리에 의해

$\overline{AM}\perp\overline{PQ}$

이다.

점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2이므로

$\overline{AM}=2$

이다.

직각삼각형 OAM에서

$\overline{OM}=\sqrt{\overline{AM}^2-\overline{OA}^2}$

$=\sqrt{2^2-1^2}$

$=\sqrt{3}$

직각삼각형 OPM에서

$\overline{PM}=\sqrt{\overline{OP}^2-\overline{OM}^2}$

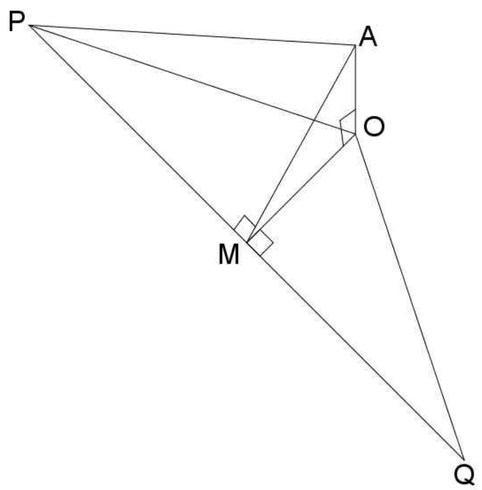
$=\sqrt{(\sqrt{15})^2-(\sqrt{3})^2}$

$=2\sqrt{3}$

이고,

$\overline{PQ}=2\overline{PM}=4\sqrt{3}$

이다.



한편, 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T는 중심이 M이고 반지름의 길이는 $2\sqrt{3}$

이다.

구 S와 구 T가 만나서 생기는 원을 C_1이라 하고, 원 C_1을 포함하는 평면을 α라 하면

$\alpha \perp \overline{\mathrm{AM}}$

이다.

삼각형 OAM에서

$\angle \mathrm{AMO} = \theta$

라 하면

$\cos\theta = \dfrac{\overline{\mathrm{OM}}}{\overline{\mathrm{AM}}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

이므로

$\theta = \dfrac{\pi}{6}$

이다.

이때, 평면 α와 xy평면이 이루는 예각의 크기는

$\dfrac{\pi}{3}$

이다.

점 B에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{BH}} \le 2\sqrt{3}$

이므로

삼각형 BPQ의 넓이를 S라 하면

$$S = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{PQ}} \times \overline{\mathrm{BH}}$$

$$\le \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}$$

$$= 12$$

이다.

삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이를 S'이라 하면

$$S' = S \times \cos\frac{\pi}{3}$$

$$\le 12 \times \frac{1}{2}$$

$$= 6$$

따라서 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

6

이다.

정답 6

29. 출제의도 : 타원의 성질을 이용하여 세 점 P, Q, F 사이의 관계를 파악한 후, 원의 반지름의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$의 한 초점이

$\mathrm{F}(c,\ 0)(c > 0)$이므로

타원의 성질에 의해

$c^2 = 9 - 5 = 4$

$c > 0$이므로

$c = 2$

이다.

타원 $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$의 다른 한 초점을

F'이라 하면

$\mathrm{F}'(-2,\ 0)$

이다.

점 P가 타원 위의 점이므로

타원의 성질에 의해

$\overline{\mathrm{PF}} + \overline{\mathrm{PF}'} = 6$ …… ㉠

이다.

이때,

$\overline{\mathrm{PQ}} - \overline{\mathrm{PF}} \ge 6$ …… ㉡

이므로

㉠, ㉡에서

$\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{PF}'} \ge 12$ …… ㉢

이다.

한편, 원의 중심을 C라 하면

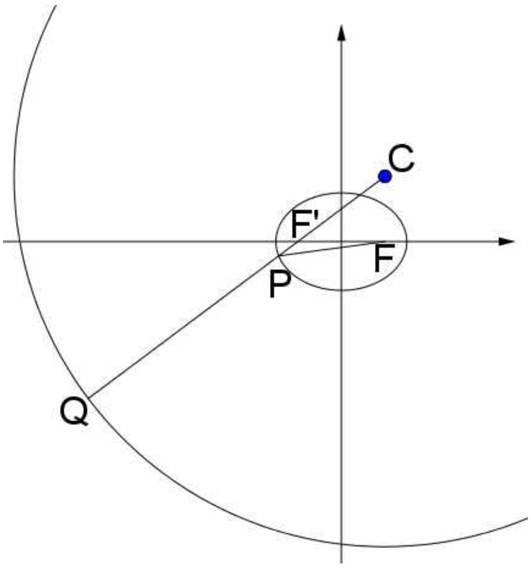
$\mathrm{C}(2,\ 3)$

이므로

$\overline{\mathrm{CF}'} = \sqrt{(-2-2)^2 + (0-3)^2} = 5$

이다.

이때, 주어진 조건을 만족시키는 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$과 중심이 C(2, 3)이고 반지름의 길이가 r인 원은 다음 그림과 같다.



㉢에서
세 점 P, Q, F′이 일직선 위에 있을 때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값이 최소이고,
$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값의 최솟값은 12이다.
따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값이 최소일 때 원의 반지름의 길이 r의 값은
$r=\overline{\mathrm{CF'}}+\overline{\mathrm{F'P}}+\overline{\mathrm{PQ}}$
$=5+12$
$=17$

정답 17

30. **출제의도** : 벡터의 내적을 이용하여 조건을 만족시키는 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
조건 (가)에서
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$는 방향이 같다. ……㉠

$9|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=9|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}$,

$4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}=4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2\times\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$

㉠에서 $\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}$이므로

$9|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$ ……㉡

조건 (나)에서

$\frac{\pi}{2}<\angle\mathrm{CAQ}<\pi$

조건 (다)와 ㉠에서

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\cos(\angle\mathrm{ABC})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{CB}}|\cos\frac{\pi}{4}$

$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\left(\frac{2}{3}\times|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\right)\times(\sqrt{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|)\cos\frac{\pi}{4}$

$=\frac{2}{3}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=24$

$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=6$

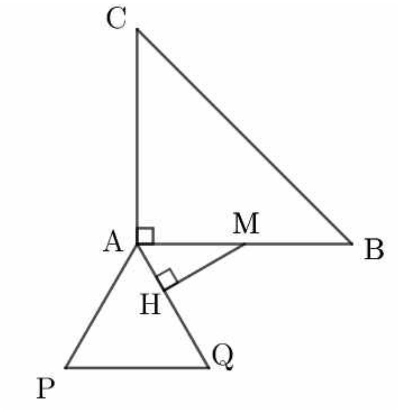
㉡에서

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=\frac{2}{3}\times6=4$

삼각형 APQ가 정삼각형이므로

$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|=4$

$\angle\mathrm{BAQ}=\frac{\pi}{3}$



선분 AB의 중점을 M, 점 M에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}| &= |2\overrightarrow{XM}| \\ &\geq 2|\overrightarrow{HM}| \\ &= 2\times|\overrightarrow{AM}|\times\sin\frac{\pi}{3} \\ &= 2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

따라서 $m=3\sqrt{3}$ 이므로

$m^2=27$

정답 27

[다른 풀이]

세 점 A, B, C의 좌표를 각각

A(0, 0), B(6, 0), C(0, 6)

이라 하면 점 P와 Q의 좌표는

$\mathrm{P}(-2,\ -2\sqrt{3})$, $\mathrm{Q}(2,\ 2\sqrt{3})$

점 X는 선분 AQ 위의 점이므로 X의 좌표는

$\mathrm{X}(t,\ -\sqrt{3}t)\ (0\leq t\leq 2)$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}| &= |(-t,\ \sqrt{3}t)+(6-t,\ \sqrt{3}t)| \\ &= |(6-2t,\ 2\sqrt{3}t)| \\ &= \sqrt{4t^2-12t+36} \\ &= \sqrt{4\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+27}\end{aligned}$$

$|\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}|$의 최솟값은 $t=\frac{3}{2}$일 때, $\sqrt{27}$ 이다.

따라서 $m=\sqrt{27}$ 이므로

$m^2=27$