• 수학 영역 •

수학 정답

1	③	2	④	3	①	4	②	5	⑤
6	③	7	①	8	④	9	③	10	⑤
11	⑤	12	②	13	②	14	⑤	15	①
16	③	17	④	18	①	19	④	20	②
21	④	22	20	23	30	24	6	25	24
26	12	27	510	28	189	29	5	30	36

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

$A+B=(3x^2+2x-1)+(-x^2+x+3)$

$=(3x^2-x^2)+(2x+x)+(-1+3)$

$=2x^2+3x+2$

2. [출제의도] 복소수의 값을 계산한다.

$1+\dfrac{2}{1-i}=1+\dfrac{2\times(1+i)}{(1-i)\times(1+i)}$

$=1+\dfrac{2(1+i)}{2}$

$=1+(1+i)$

$=2+i$

3. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

${}_4C_2=\dfrac{{}_4P_2}{2!}$

$=\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$

4. [출제의도] 역함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(2)=4$이므로 $f^{-1}(4)=2$

5. [출제의도] 나머지정리를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$P(x)=x^3+ax^2+12$라 하자.

다항식 $P(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 $2a-8$이므로

$P(2)=4a+20=2a-8$

$2a=-28$

따라서 $a=-14$

6. [출제의도] 도형의 평행이동과 대칭이동을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

원 $(x+5)^2+(y+11)^2=25$를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y+10)^2=25$

원 $(x+5)^2+(y+10)^2=25$를 x축에 대하여 대칭이동한 원의 방정식은

$(x+5)^2+(y-10)^2=25$

원 $(x+5)^2+(y-10)^2=25$가 점 $(0, a)$를 지나므로

$(0+5)^2+(a-10)^2=25$, $(a-10)^2=0$

따라서 $a=10$

7. [출제의도] 연립부등식을 이해하여 해를 구한다.

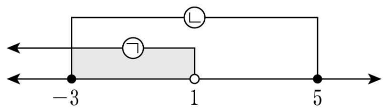
$2x+1<3$에서 $x<1$ …… ㉠

$x^2-2x-15\le0$에서

$(x-5)(x+3)\le0$

$-3\le x\le5$ …… ㉡

이다. 따라서 연립부등식의 해는 $-3\le x<1$이다.



이를 만족시키는 정수 x는 -3, -2, -1, 0이고 그 개수는 4이다.

8. [출제의도] 유리함수의 그래프를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $y=\dfrac{b}{x-a}$의 그래프가 점 $(2, 4)$를 지나므로

$4=\dfrac{b}{2-a}$

$4a+b=8$ …… ㉠

함수 $y=\dfrac{b}{x-a}$의 한 점근선의 방정식이 $x=4$이므로

$a=4$이고 이를 ㉠에 대입하면 $b=-8$

따라서 $a-b=4-(-8)=12$

9. [출제의도] 직선의 방정식을 이해하여 직선의 x절편을 구한다.

두 방정식 $x+3y+2=0$, $2x-3y-14=0$을 연립하면 $x=4$, $y=-2$이므로 두 직선의 교점의 좌표는 $(4, -2)$이다.

직선 $2x+y+1=0$의 기울기는 -2이므로 이 직선과 평행한 직선의 기울기는 -2이다. 기울기가 -2이고 점 $(4, -2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-(-2)=-2(x-4)$, 즉 $y=-2x+6$이다.

$y=-2x+6$에 $y=0$을 대입하면 $0=-2x+6$, $x=3$이므로 x절편은 3

10. [출제의도] 삼차방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

$f(x)=x^3+x^2-2$라 하면 $f(1)=0$이므로, $f(x)$는 $x-1$을 인수로 갖는다. 조립제법을 이용하여 $f(x)$를 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ & & 1 & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+x^2-2=(x-1)(x^2+2x+2)$이므로

$(x-1)(x^2+2x+2)=0$에서

$x=1$ 또는 $x^2+2x+2=0$

$x^2+2x+2=0$에서

$x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times2}}{2}$

$=\dfrac{-2\pm2i}{2}=-1\pm i$

$a=-1$, $b=1$ 또는 $a=-1$, $b=-1$

따라서 $|a|+|b|=2$

11. [출제의도] 집합의 연산 법칙을 이해하여 조건을 만족시키는 집합의 모든 원소의 합을 구한다.

조건 (나)에서 $A^C\cup B=\{1, 2, 8, 16\}$이고

드모르간의 법칙에 의하여 $A\cap B^C=(A^C\cup B)^C$이므로

$A\cap B^C=(A^C\cup B)^C=\{4, 32\}$이다.

$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^C)$

$=\{2, 8\}\cup\{4, 32\}$

$=\{2, 4, 8, 32\}$

따라서 집합 A의 모든 원소의 합은

$2+4+8+32=46$

12. [출제의도] 역함수를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 $f(x)$는 일대일대응이어야 한다.

$a+7=0$ 또는 $-a+5=0$일 때 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

그러므로 $a\ne-7$, $a\ne5$이다.

함수 $f(x)$가 일대일대응이기 위해서는

직선 $y=(a+7)x-1$의 기울기 $a+7$과

직선 $y=(-a+5)x+2a+1$의 기울기 $-a+5$의 부호가 같아야 한다.

그러므로 $(a+7)(-a+5)>0$, $(a+7)(a-5)<0$

$-7<a<5$

따라서 이를 만족시키는 정수 a는 -6, -5, $\cdots$, 4이고 그 개수는 11이다.

13. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

원 $(x-2)^2+(y-3)^2=r^2$의 중심을 C라 하자.

원의 중심 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{AH}=\overline{BH}$이고 $\overline{AB}=2\sqrt2$이므로 $\overline{AH}=\sqrt2$이다.

점 C(2, 3)과 직선 $x-y+5=0$ 사이의 거리를 구하면

$\overline{CH}=\dfrac{|2-3+5|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{4}{\sqrt2}=2\sqrt2$

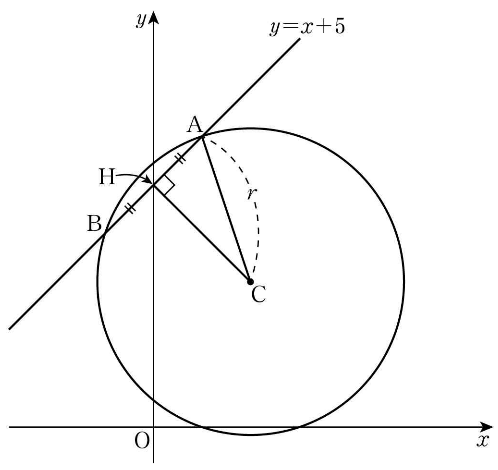
직각삼각형 ACH에서

$r^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2$

$=(\sqrt2)^2+(2\sqrt2)^2$

$=10$

따라서 $r=\sqrt{10}$



14. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 삼각형의 넓이를 구한다.

점 $\mathrm{B}(k, \sqrt{k})$, 점 $\mathrm{C}(k, k)$이고 삼각형 OBC의 넓이가 삼각형 OAB의 넓이의 2배이므로

$\dfrac12\times\overline{OA}\times\overline{BC}=2\times\dfrac12\times\overline{OA}\times\overline{AB}$

$\overline{BC}=2\overline{AB}$이므로

$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}=3\overline{AB}$

$\overline{AB}=\sqrt{k}$, $\overline{AC}=k$에서

$k=3\sqrt{k}$, $k^2-9k=0$

$k>1$이므로 $k=9$

따라서 삼각형 OBC의 넓이는

$\dfrac12\times\overline{OA}\times\overline{BC}=\dfrac12\times9\times6=27$

15. [출제의도] 복소수가 서로 같을 조건을 이해하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구한다.

복소수 z를 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하자.

조건 (가)에서 $\bar{z}=-z$이므로

$a-bi=-a-bi$에서 $a=0$

즉 $z=bi$이다.

조건 (나)에 $z=bi$를 대입하면

$-b^2+(k^2-3k-4)bi+(k^2+2k-8)=0$

$k^2+2k-8-b^2+(k^2-3k-4)bi=0$

이고,

$k^2+2k-8-b^2=0$ …… ㉠

$(k^2-3k-4)b=0$ …… ㉡

이다.

㉡에서 $b=0$ 또는 $k^2-3k-4=0$

(i) $b=0$일 때

㉠에서 $k^2+2k-8=0$이므로 $k=-4$ 또는 $k=2$이다.

(ii) $k^2-3k-4=0$, 즉 $k=-1$ 또는 $k=4$일 때

$k=-1$이면 ㉠에서 $-9-b^2=0$이므로 이를 만족시키는 실수 b는 존재하지 않는다.

$k=4$이면 ㉠에서 $16-b^2=0$이므로 이를 만족시키는 실수 b는 -4, 4이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k는 -4, 2, 4이고 모든 실수 k의 값의 곱은 -32이다.

[다른 풀이]

$f(x)=x^2+(k^2-3k-4)x+(k^2+2k-8)$이라 하자.

조건 (나)에서 복소수 z는 x에 대한 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이다.

(i) z가 실수일 때

조건 (가)에서 $\bar{z}=-z$이고

z가 실수이므로 $\bar{z}=z$이다.

따라서 $z=0$

즉, 이차방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $x=0$이므로

$f(0)=0$

$k^2+2k-8=0$

$(k+4)(k-2)=0$

$k=-4$ 또는 $k=2$

(ii) z가 허수일 때

x에 대한 이차방정식

$x^2+(k^2-3k-4)x+(k^2+2k-8)=0$

에서 계수와 상수항이 모두 실수이므로 z의 켤레복소수 $\bar{z}$ 역시 이차방정식의 한 근이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\bar{z}=-(k^2-3k-4)$

조건 (가)에서 $\bar{z}=-z$이므로

$z+\bar{z}=0$

즉, $k^2-3k-4=0$

$(k-4)(k+1)=0$

$k=4$ 또는 $k=-1$

$k=4$이면 $f(x)=x^2+16$이고, 이차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=4i$ 또는 $x=-4i$이다.

$k=-1$이면 $f(x)=x^2-9$이고, 이차방정식 $f(x)=0$의 해는 $x=3$ 또는 $x=-3$이므로 z가 허수라는 조건에 모순이다.

(i), (ii)에서 조건을 만족시키는 실수 k는 -4, 2, 4이고, 모든 실수 k의 값의 곱은 -32이다.

16. [출제의도] 곱셈 공식을 이용하여 식의 값을 구하는 문제를 해결한다.

삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$에서 $x^2+y^2=10$ …… ㉠

삼각형 ABC와 삼각형 APS가 서로 닮음이고 닮음비가 $\overline{BC}:\overline{PS}=\sqrt{10}:\dfrac{2\sqrt{10}}{7}=7:2$이므로

$\overline{AP}=\dfrac{2}{7}x$, $\overline{AS}=\dfrac{2}{7}y$이고 $\overline{SC}=\dfrac{5}{7}y$

삼각형 APS와 삼각형 RSC가 서로 닮음이므로

$\overline{PS}:\overline{AP}=\overline{SC}:\overline{RS}$에서

$\dfrac{2\sqrt{10}}{7}:\dfrac{2x}{7}=\dfrac{5y}{7}:\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

$10xy=40$, $xy=4$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$

$=10-2\times4=2$

$x>y$이므로 $x-y=\sqrt{2}$

따라서

$x^3-y^3=(x-y)^3+3xy(x-y)$

$=(\sqrt{2})^3+3\times4\times\sqrt{2}$

$=14\sqrt{2}$

[다른 풀이]

$\overline{BQ}=\dfrac{\sqrt{10}}{7}a\ (0<a<5)$라 하면

$\overline{CR}=\overline{BC}-\overline{BQ}-\overline{QR}$

$=\sqrt{10}-\dfrac{\sqrt{10}}{7}a-\dfrac{2\sqrt{10}}{7}$

$=\dfrac{\sqrt{10}}{7}(5-a)$

삼각형 QBP와 삼각형 RSC는 서로 닮음이므로

$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}=\dfrac{\overline{CR}}{\overline{SR}}$에서

$\dfrac{\dfrac{2\sqrt{10}}{7}}{\dfrac{\sqrt{10}}{7}a}=\dfrac{\dfrac{\sqrt{10}}{7}(5-a)}{\dfrac{2\sqrt{10}}{7}}$, $\dfrac{2}{a}=\dfrac{5-a}{2}$

그러므로 $\dfrac{2}{a}=\dfrac{5-a}{2}$에서 $a^2-5a+4=0$이고

$(a-1)(a-4)=0$, $a=1$ 또는 $a=4$이다.

삼각형 ABC가 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이므로

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2$에서 $x^2+y^2=10$ …… ㉠

(i) $a=1$일 때

삼각형 ABC와 삼각형 QBP는 서로 닮음이므로

$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{BA}}=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$에서 $\dfrac{y}{x}=2$, $y=2x$

$x>0$, $y>0$이므로 $x<y$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=4$일 때

삼각형 ABC와 삼각형 QBP는 서로 닮음이므로

$\dfrac{\overline{CA}}{\overline{BA}}=\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{BQ}}$에서 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{2}$, $x=2y$

㉠에 대입하여 x, y의 값을 구하면

$(2y)^2+y^2=10$, $y^2=2$, $x>0$, $y>0$이므로

$x=2\sqrt{2}$, $y=\sqrt{2}$

$x^3-y^3=(2\sqrt{2})^3-(\sqrt{2})^3$

$=16\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$=14\sqrt{2}$

(i), (ii)에서 $x^3-y^3=14\sqrt{2}$

17. [출제의도] 유리함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$P\left(a, \dfrac{k}{a}\right)$, $Q\left(a+2, \dfrac{k}{a+2}\right)$이므로 조건 (가)에 의하여

$\dfrac{\dfrac{k}{a+2}-\dfrac{k}{a}}{a+2-a}=-1$, $\dfrac{k}{a+2}-\dfrac{k}{a}=-2$, $\dfrac{-2k}{a(a+2)}=-2$

즉, $k=a(a+2)$

$f(a)=\dfrac{k}{a}=a+2$, $f(a+2)=\dfrac{k}{a+2}=a$이다.

점 P의 좌표는 $(a, a+2)$, 점 Q의 좌표는 $(a+2, a)$

조건 (나)에 의하여 점 R의 좌표는 $(-a, -a-2)$, 점 S의 좌표는 $(-a-2, -a)$

직선 PS의 기울기는 $\dfrac{a+2-(-a)}{a-(-a-2)}=1$이고, 직선 RS의 기울기는 $\dfrac{-a-(-a-2)}{-a-2-(-a)}=-1$, 직선 QR의 기울기는 $\dfrac{-a-2-a}{-a-(a+2)}=1$이므로 사각형 PQRS는 직사각형이다.

$\overline{PQ}=\sqrt{(a+2-a)^2+\{a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}$이고,

$\overline{PS}=\sqrt{\{-(a+2)-a\}^2+\{-a-(a+2)\}^2}=2\sqrt{2}(a+1)$

사각형 PQRS의 넓이는

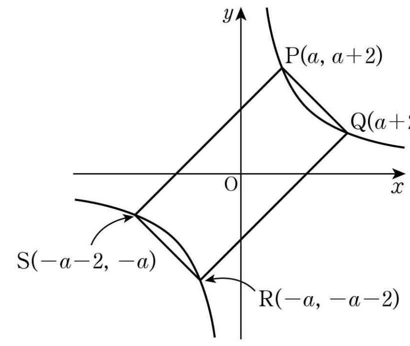
$2\sqrt{2}\times2\sqrt{2}(a+1)=8(a+1)=8\sqrt{5}$

따라서 $a=\sqrt{5}-1$이므로

$k=a(a+2)=(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)=4$

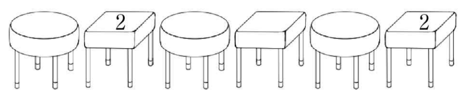
[보충 설명]

좌표평면 위의 네 점 P, Q, R, S의 위치는 다음과 같다.

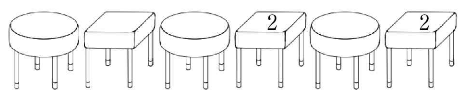


18. [출제의도] 순열을 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

(i) 2학년 학생이 오른쪽 끝 사각 의자에 앉을 때



또는



위와 같이 2학년 학생이 앉을 사각 의자를 선택하는 경우의 수는 2

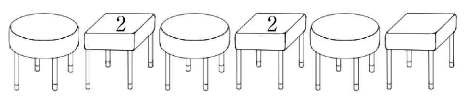
위의 각각의 경우에 대하여 2학년 학생이 두 사각 의자에 앉는 경우의 수는 ${}_2P_2=2!$

① 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 1학년 학생이 앉는다면 1학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 두 개의 둥근 의자에는 3학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는 $2!\times2!=4$

② 2학년 학생이 앉지 않은 사각 의자에 3학년 학생이 앉는다면 3학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃한 두 개의 둥근 의자에는 1학년 학생만 앉아야 하므로 경우의 수는 $2!\times2!=4$

그러므로 $2\times2!\times(4+4)=32$

(ii) 2학년 학생이 오른쪽 끝의 사각 의자에 앉지 않을 때



오른쪽 끝이 아닌 나머지 2개의 사각 의자에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_2P_2=2!$

① 오른쪽 끝의 사각 의자에 1학년 학생이 앉는다면 1학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃하지 않은 2개의 둥근 의자에 1학년 학생 1명이 앉아야 하므로 경우의 수는 $2\times2!\times2!=8$

② 오른쪽 끝의 사각 의자에 3학년 학생이 앉는다면 3학년 학생이 앉은 사각 의자와 이웃하지 않은 2개의 둥근 의자에 3학년 학생 1명이 앉아야 하므로 경우의 수는 $2\times2!\times2!=8$

그러므로 $2!\times(8+8)=32$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는 $32+32=64$

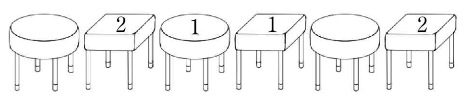
[다른 풀이]

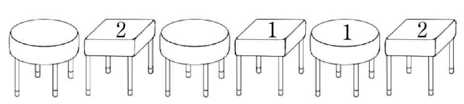
사각 의자 3개 중 2개의 의자에 2학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_3P_2=3\times2=6$

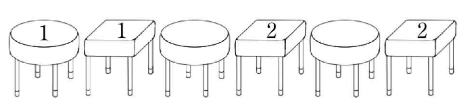
나머지 의자 4개에 1학년 학생 2명과 3학년 학생 2명이 앉는 경우의 수는 ${}_4P_4=4!=24$

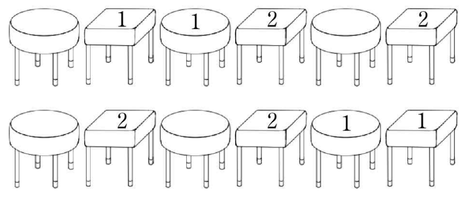
조건 (가)를 만족시키는 경우의 수는 $6\times24=144$

이 중 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우는 아래와 같이 다섯 가지이다.









각각의 경우 1, 2, 3학년 학생들이 앉는 경우의 수는

${}_2P_2 \times {}_2P_2 \times {}_2P_2 = 8$

따라서 1학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수는 $5 \times 8 = 40$

마찬가지로 3학년 학생 2명이 서로 이웃하여 앉는 경우의 수도 40

조건 (가), (나)를 모두 만족시키는 경우의 수는

$144 - 40 \times 2 = 144 - 80 = 64$

19. [출제의도] 원의 방정식과 접선의 방정식을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

두 점 $A(0, 6)$, $B(9, 0)$을 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times9+1\times0}{2+1},\ \dfrac{2\times0+1\times6}{2+1}\right)$

이므로 $P(6, 2)$이다.

점 $P(6, 2)$가 원 $x^2+y^2-2ax-2by=0$ 위의 점이므로

$6^2+2^2-2a\times6-2b\times2=0$

$3a+b=10$ …… ㉠

원의 중심과 점 P를 지나는 직선을 l이라 하면, 직선 l은 직선 AB와 서로 수직이고 직선 AB의 기울기가 $-\dfrac{2}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 $\dfrac{3}{2}$이다.

직선 l이 점 $P(6, 2)$를 지나므로 직선 l의 방정식은

$y=\dfrac{3}{2}(x-6)+2$

원의 방정식 $x^2+y^2-2ax-2by=0$을 정리하면

$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2$

원의 중심 (a, b)가 직선 l 위의 점이므로

$b=\dfrac{3}{2}(a-6)+2$

$3a-2b=14$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=\dfrac{34}{9}$, $b=-\dfrac{4}{3}$

따라서 $a+b=\dfrac{34}{9}+\left(-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{22}{9}$

20. [출제의도] 합성함수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 추론한다.

ㄱ. 조건 (가)에 의하여 $f(f(4)) \le 1$이므로 $f(f(4))=1$이다. (참)

ㄴ. (ⅰ) $f(4)=1$일 때

$f(f(4))=f(1)=1$이므로 $f(1)=1$이다.

① $f(3)=1$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$가 될 수 없으므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

② $f(3)=2$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이므로 $f(2)=4$이고

$f(f(3))=f(2)=4>2$가 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $f(3)=4$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이므로 $f(2)=2$이고 $f(f(1))=f(1)=1$,

$f(f(2))=f(2)=2$, $f(f(3))=f(4)=1$이 되어 조건을 만족시킨다.

(ⅱ) $f(4)=2$일 때

$f(f(4))=f(2)=1$이므로 $f(2)=1$이다.

① $f(3)=1$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이므로 $f(1)=4$이고

$f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $f(3)=2$이면 함수 f의 치역이 $\{1, 2, 4\}$이므로 $f(1)=4$이고

$f(f(2))=f(1)=4>3$이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $f(3)=4$일 때

$f(1)=1$이면 $f(f(1))=f(1)=1$,

$f(f(2))=f(1)=1$, $f(f(3))=f(4)=2$

가 되어 조건을 만족시킨다.

$f(1)=2$이면 $f(f(1))=f(2)=1$,

$f(f(2))=f(1)=2$, $f(f(3))=f(4)=2$

가 되어 조건을 만족시킨다.

$f(1)=4$이면 $f(f(2))=f(1)=4>3$이

되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $f(4)=4$일 때

$f(f(4))=f(4)=4\neq1$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가능한 모든 함수 f에 대하여 $f(3)=4$이다. (참)

ㄷ. (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 가능한 함수 f의 개수는 3이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 이용하여 조건을 만족시키는 선분의 길이를 추론한다.

원의 중심을 $A(a, b)$라 하면 점 A와 직선 $l_1 : mx-y=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|ma-b|}{\sqrt{m^2+1}}$

점 A와 직선 $l_2 : x-my=0$ 사이의 거리는 $\dfrac{|a-mb|}{\sqrt{1+m^2}}$

이므로

$\dfrac{|ma-b|}{\sqrt{m^2+1}}=\dfrac{|a-mb|}{\sqrt{1+m^2}}$, $|ma-b|=|a-mb|$

즉, $ma-b=\pm(a-mb)$이므로 $a=b$ 또는 $a=-b$

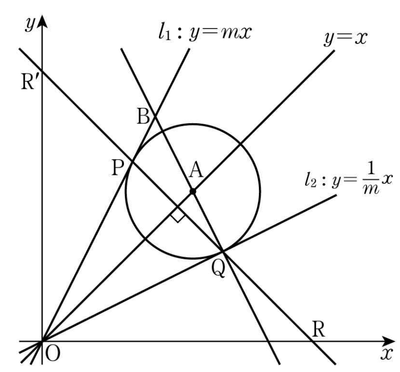
원의 중심이 제1사분면에 있으므로 $a=b$

그러므로 직선 OA의 방정식은 $y=x$이다.

삼각형 OPQ가 $\overline{OP}=\overline{OQ}$인 이등변삼각형이므로 선분 PQ의 수직이등분선은 점 O를 지나고, 현의 성질에 의해 선분 PQ의 수직이등분선은 원의 중심 A를 지난다. 즉, 직선 $y=x$는 선분 PQ의 수직이등분선이다.

직선 PQ의 기울기는 -1이므로 직선 PQ가 y축과 만나는 점을 R′이라 하면 $\overline{OR}=\overline{OR'}$이고

$\angle OR'P=\angle ORQ=45^\circ$이다.



삼각형 OPQ가 이등변삼각형이므로

$\angle OPQ=\angle OQP$에서 $\angle OPR'=\angle OQR$이다.

$\overline{OR'}=\overline{OR}$, $\angle PR'O=\angle QRO$, $\angle OPR'=\angle OQR$에서

삼각형 OPR′과 삼각형 OQR은 서로 합동이다.

따라서 $\overline{R'P}=\overline{PQ}=\overline{QR}$이므로 세 삼각형 OR′P, OPQ, OQR의 넓이는 모두 24로 같다.

그러므로 삼각형 ORR′의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{OR}\times\overline{OR'}=\dfrac{1}{2}\times\overline{OR}^2=3\times24=72$

$\overline{OR}=12$

따라서 $R(12, 0)$, $R'(0, 12)$이다.

두 점 P, Q는 선분 RR′의 삼등분점이고

선분 RR′을 $2:1$로 내분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times0+1\times12}{2+1},\ \dfrac{2\times12+1\times0}{2+1}\right)$,

선분 RR′을 $1:2$로 내분하는 점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{1\times0+2\times12}{1+2},\ \dfrac{1\times12+2\times0}{1+2}\right)$

이므로 $P(4, 8)$, $Q(8, 4)$이다.

직선 l_1의 기울기 m은 $m=\dfrac{8-0}{4-0}=2$이다.

따라서 직선 l_1의 방정식은 $y=2x$, 직선 l_2의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$이다.

직선 BQ는 직선 l_2와 수직이므로 기울기가 -2이고 점 $Q(8, 4)$를 지난다. 따라서 직선 BQ의 방정식은 $y=-2x+20$이다.

직선 l_1과 직선 BQ의 교점 B의 x좌표는

$2x=-2x+20$에서 $4x=20$, $x=5$

이므로 $B(5, 10)$이다.

따라서 $\overline{BQ}=\sqrt{(8-5)^2+(4-10)^2}$

$=\sqrt{45}$

$=3\sqrt{5}$

[다른 풀이]

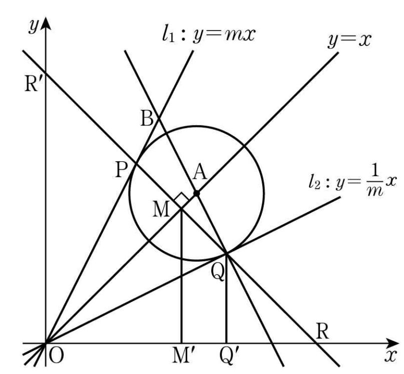
선분 PQ의 중점을 M이라 하고 $\overline{PM}=\overline{MQ}=k(k>0)$이라 하자.

$\overline{PQ}=\overline{QR}=2k$이므로 $\overline{OM}=\overline{MR}=3k$

조건 (나)로부터 삼각형 OPQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times2k\times3k=3k^2=24$이므로 $k=2\sqrt{2}$

두 점 M, Q에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 M′, Q′이라 하자.



$\overline{OQ'}=\overline{OM'}+\overline{M'Q'}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{OM}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{MQ}$

$=\dfrac{3}{\sqrt{2}}k+\dfrac{1}{\sqrt{2}}k$

$=\dfrac{4}{\sqrt{2}}k=8$

$\overline{QQ'}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\overline{QR}$

$=\dfrac{2}{\sqrt{2}}k=4$

이므로 $Q(8, 4)$이고 직선 OQ의 기울기 $\dfrac{1}{m}$은

$\dfrac{1}{m}=\dfrac{4-0}{8-0}=\dfrac{1}{2}$이므로 $m=2$

따라서 직선 l_1의 방정식은 $y=2x$, 직선 l_2의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$이다.

직선 BQ는 직선 l_2와 수직이므로 기울기가 -2이고 점 $Q(8, 4)$를 지난다. 따라서 직선 BQ의 방정식은 $y=-2x+20$이다.

직선 l_1과 직선 BQ의 교점 B의 x좌표는

$2x=-2x+20$에서

$4x=20$

$x=5$

이므로 $B(5, 10)$이다.

따라서 $\overline{BQ}=\sqrt{(8-5)^2+(4-10)^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$

22. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 원소의 합을 계산한다.

$A-B=\{8, 12\}$이므로 모든 원소의 합은 20

23. [출제의도] 선분의 외분을 이용하여 점의 좌표를 계산한다.

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times7-1\times3}{2-1},\ \frac{2\times11-1\times3}{2-1}\right)$

즉, $(11, 19)$에서 $a=11$, $b=19$이므로

$a+b=30$

24. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하여 미지수의 최솟값을 구한다.

직선 $y=-x+k$가 이차함수 $y=x^2-2x+6$의 그래프와 만나므로 이차방정식 $x^2-2x+6=-x+k$가 실근을 가져야 한다.

이차방정식 $x^2-x+6-k=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=(-1)^2-4\times(6-k)=-23+4k\geq0$

$k\geq\frac{23}{4}$

따라서 자연수 k의 최솟값은 6

25. [출제의도] 도형의 평행이동을 이해하여 직선의 y절편을 구한다.

점 $\mathrm{A}(3, -1)$을 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 점 B의 좌표는

$(3+1, -1-4)$, 즉 $(4, -5)$

직선 AB의 기울기가

$\frac{-5-(-1)}{4-3}=-4$이므로 직선 AB의 방정식은

$y-(-5)=-4(x-4)$, 즉 $y=-4x+11$

이 직선을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-1=-4(x-3)+11$, 즉 $y=-4x+24$이다.

$y=-4x+24$에 $x=0$을 대입하면 $y=24$이므로

y절편은 24

26. [출제의도] 명제의 참, 거짓을 이용하여 미지수의 값을 추론한다.

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

명제 $p\rightarrow\sim q$가 참이므로 $P\subset Q^C$에서 $Q\subset P^C$이다.

명제 $\sim p\rightarrow q$가 참이므로 $P^C\subset Q$이다.

그러므로 $Q=P^C$이다.

$p: 2x-a=0$에서 $P=\left\{\frac{a}{2}\right\}$이고,

$Q=P^C$에서

$Q=\left\{x \,\middle|\, x\neq\frac{a}{2}\text{인 실수}\right\}$이다.

즉, 부등식 $x^2-bx+9>0$의 해가 $x\neq\frac{a}{2}$인 모든 실수이므로 이차함수 $y=x^2-bx+9$의 그래프는 x축에 접해야 한다. 따라서 이차방정식 $x^2-bx+9=0$의 판별식을 D라 할 때

$D=(-b)^2-4\times1\times9=0$이다.

즉, $b^2=36$이므로 양수 b의 값은 6이다.

조건 $q: x^2-6x+9>0$에서

$Q=\{x\,|\,x\neq3\text{인 실수}\}$이고 $\frac{a}{2}=3$, $a=6$이다.

따라서 $a+b=6+6=12$

27. [출제의도] 조합을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의하여 집합 X의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개의 원소를 선택하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 정해진다.

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 선택하는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

조건 (나)에 의하여 함수 f는 일대일대응이 아니다.

(ⅰ) $f(5)$의 값이 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값 중 하나의 값과 같을 때

$f(6)$의 값은 집합 X의 6개의 원소 중 임의의 값이 될 수 있으므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_1\times{}_6\mathrm{C}_1=24$

(ⅱ) $f(5)$의 값이 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값과 다를 때

$f(6)$의 값은 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값 중 하나의 값이 되어야 하므로 $f(5)$, $f(6)$의 값을 선택하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_1=10$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 함수의 개수는

$15\times(24+10)=510$

[다른 풀이]

조건 (가)에 의하여 집합 X의 6개의 원소 중에서 서로 다른 4개의 원소를 선택하면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 정해진다.

즉, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값을 선택하는 경우의 수는

${}_6\mathrm{C}_4={}_6\mathrm{C}_2=\frac{6\times5}{2\times1}=15$

조건 (나)에 의하여 함수 f는 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, $f(6)$ 중에서 적어도 두 개의 함숫값이 같아야 한다. $f(5)$, $f(6)$의 값으로 집합 X의 6개의 원소 중 임의의 값을 선택하는 경우 중에서 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 값이 아닌 나머지 2개의 원소를 각각 $f(5)$, $f(6)$의 값으로 선택하는 경우를 제외하여야 하므로 그 경우의 수는

$6\times6-{}_2\mathrm{P}_2=34$

따라서 구하는 함수의 개수는

$15\times34=510$

28. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 집합을 추론한다.

$n(A)\times n((A\cup B)^C)=15$에서 $n(A)$는 15의 양의 약수이다.

(ⅰ) $n(A)=1$일 때

$A=\{2\}$이므로 $k=2$ 또는 $k=3$

$k=2$이면 $U=\{1, 2\}$, $B=\{1, 2\}$에서

$(A\cup B)^C=\varnothing$, $n((A\cup B)^C)=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=3$이면 $U=\{1, 2, 3\}$, $B=\{1, 3\}$에서

$(A\cup B)^C=\varnothing$, $n((A\cup B)^C)=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $n(A)=3$일 때

$A=\{2, 4, 6\}$이므로 $k=6$ 또는 $k=7$

$k=6$이면 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 6\}$, $B=\{1, 2, 3, 6\}$에서

$(A\cup B)^C=\{5\}$, $n((A\cup B)^C)=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=7$이면 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 7\}$, $B=\{1, 7\}$에서

$(A\cup B)^C=\{3, 5\}$, $n((A\cup B)^C)=2$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $n(A)=5$일 때

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$이므로 $k=10$ 또는 $k=11$

$k=10$이면

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $B=\{1, 2, 5, 10\}$에서

$(A\cup B)^C=\{3, 7, 9\}$, $n((A\cup B)^C)=3$이므로 조건을 만족시킨다.

$k=11$이면 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 11\}$, $B=\{1, 11\}$에서

$(A\cup B)^C=\{3, 5, 7, 9\}$, $n((A\cup B)^C)=4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅳ) $n(A)=15$일 때

$A=\{2, 4, 6, \cdots, 30\}$이므로 $k=30$ 또는 $k=31$

$k=30$이면 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 30\}$,

$B=\{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$에서

$(A\cup B)^C=\{7, 9, 11, 13, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29\}$,

$n((A\cup B)^C)=11$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$k=31$이면 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 31\}$, $B=\{1, 31\}$에서

$(A\cup B)^C=\{3, 5, 7, \cdots, 29\}$, $n((A\cup B)^C)=14$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서 두 집합 A, B가 조건을 만족시키도록 하는 k는 $k=10$이고

$U=\{1, 2, 3, \cdots, 10\}$, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$,

$B=\{1, 2, 5, 10\}$, $(A\cup B)^C=\{3, 7, 9\}$이므로

집합 $(A\cup B)^C=\{3, 7, 9\}$의 모든 원소의 곱은

$3\times7\times9=189$

29. [출제의도] 다항식의 나눗셈과 항등식을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의하여 다항식 $f(x)$는 계수와 상수항이 모두 실수인 일차식을 인수로 갖지 않으므로 계수와 상수항이 모두 실수인 삼차식도 인수로 갖지 않는다.

조건 (나)에서 $h(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지가 일차식이므로 $g(x)$는 차수가 2 이상인 다항식이고 $h(x)$는 차수가 1 이상인 다항식이다. 두 다항식 $g(x)$와 $h(x)$는 다항식 $f(x)$의 인수이므로, 두 다항식 $g(x)$와 $h(x)$의 차수는 2 또는 4이다.

다항식 $h(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 다항식 $h(x)$의 차수가 4이면 $h(x)=f(x)$이다. 그러므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 다항식 $h(x)$의 차수는 2이다.

다항식 $g(x)$의 차수가 4이면, 다항식 $h(x)$를 $g(x)$로 나눈 나머지가 $h(x)$이므로, 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 두 다항식 $g(x)$와 $h(x)$는 각각 최고차항의 계수가 1인 이차식이고, 조건 (나)에 의하여 $h(x)=g(x)-4x-1$이다.

그러므로 $g(x)\neq h(x)$이고 복소수 k에 대하여 $g(x)$와 $h(x)$가 일차식 $x-k$를 공통인수로 가지면

$g(k)=h(k)=0$이고 $h(k)=g(k)-4k-1$에서 $k=-\frac{1}{4}$이다. 이때 $x=-\frac{1}{4}$은 방정식 $f(x)=0$의 실근이 되어 조건 (가)를 만족시키지 않는다. 따라서 $g(x)$와 $h(x)$는 차수가 1 이상인 다항식을 공통인수로 갖지 않고 $f(x)=g(x)h(x)$이다.

$g(x)=x^2+px+q$라 하자. (단, p, q는 실수)

$h(x)=g(x)-4x-1=x^2+px-4x+q-1$

$f(x)=g(x)h(x)$에서

$x^4+(a+2)x^3+bx^2+ax+6$

$=(x^2+px+q)(x^2+px-4x+q-1)$

양변의 상수항을 비교하면

$6=q^2-q$에서 $q^2-q-6=(q+2)(q-3)=0$

$q=-2$ 또는 $q=3$

그런데 $q=-2$이면 이차방정식

$g(x)=x^2+px-2=0$의 판별식을 D라 할 때,

$D=p^2+8\geq0$이므로 $g(x)=0$은 실근을 갖고, 방정식 $f(x)=g(x)h(x)=0$은 실근을 갖게 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

따라서 $q=3$이고

$g(x)=x^2+px+3$, $h(x)=x^2+px-4x+2$

$f(x)=g(x)h(x)=(x^2+px+3)(x^2+px-4x+2)$에서

$x^4+(a+2)x^3+bx^2+ax+6$

$=x^4+(2p-4)x^3+(p^2-4p+5)x^2+(5p-12)x+6$

양변의 계수를 비교하면

$2p-4=a+2$, $5p-12=a$

$2p-6=5p-12$에서 $p=2$이고

$g(x)=x^2+2x+3$, $h(x)=x^2-2x+2$이다.

이차방정식 $g(x)=x^2+2x+3=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $\frac{D_1}{4}=1^2-3=-2<0$이므로

이차방정식 $g(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

이차방정식 $h(x)=x^2-2x+2=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $\frac{D_2}{4}=(-1)^2-2=-1<0$이므로

이차방정식 $h(x)=0$은 실근을 갖지 않는다.

그러므로 방정식 $f(x)=g(x)h(x)=0$은 실근을 갖지 않고, 두 다항식 $g(x)=x^2+2x+3$, $h(x)=x^2-2x+2$는 조건을 만족시킨다.

따라서 $a=5p-12=-2$, $b=p^2-4p+5=1$

$a^2+b^2=(-2)^2+1^2=5$

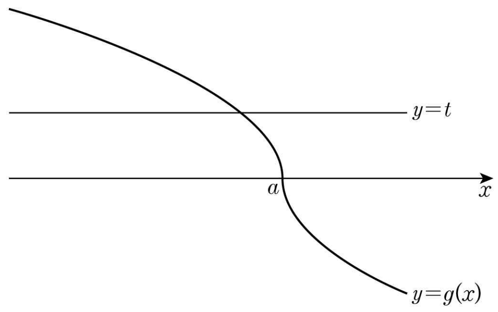
30. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이용하여 함숫값

을 구하는 문제를 해결한다.

(i) $b \le 0$일 때

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+a} & (x \le a)\\ -\sqrt{x-a} & (x>a)\end{cases}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

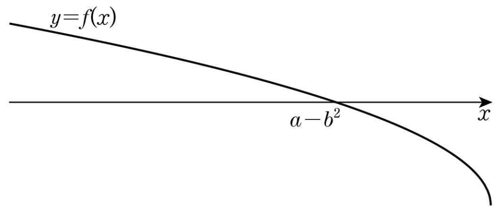


그림과 같이 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 항상 1이므로 $h(t)=1$

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $b>0$일 때

$0=\sqrt{-x+a}-b$에서 $x=a-b^2$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$x \le a-b^2$이면 $f(x) \ge 0$이므로

$g(x)=|f(x)|+b=f(x)+b=\sqrt{-x+a}$

$a-b^2<x \le a$이면 $f(x)<0$이므로

$g(x)=|f(x)|+b=-f(x)+b=-\sqrt{-x+a}+2b$

$x>a$일 때

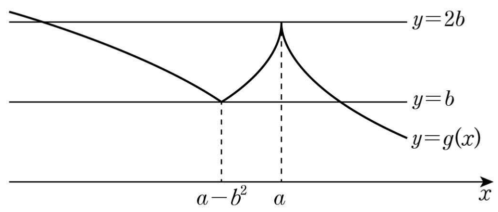
$g(x)=-f(-x+2a)+|b|$

$\quad=-\sqrt{-(-x+2a)+a}+b+|b|$

$\quad=-\sqrt{x-a}+2b$

그러므로 함수 $g(x)$는 다음과 같다.

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+a} & (x \le a-b^2)\\ -\sqrt{-x+a}+2b & (a-b^2<x \le a)\\ -\sqrt{x-a}+2b & (x>a)\end{cases}$$



$h(t) \le 3$이고 $h(\alpha)\times h(\beta)=4$에서

$h(\alpha)=h(\beta)=2$이므로 조건 (가)를 만족시키는 실수 α, β의 값은 $\alpha=b$, $\beta=2b$이다.

조건 (나)에서 x에 대한 방정식

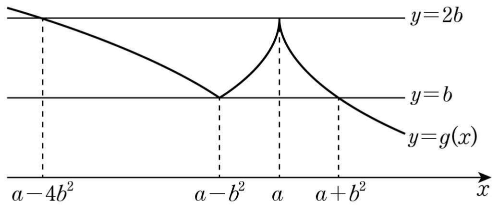
$\{g(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}=0$의 서로 다른 실근은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $y=\alpha$, $y=\beta$의 교점의 x좌표이므로 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

그러므로 x에 대한 방정식

$\{g(x)-\alpha\}\{g(x)-\beta\}=0$의 서로 다른 실근 중 최솟값은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=2b$의 교점의 x좌표 중 a가 아닌 값이고, 최댓값은 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=b$의 교점의 x좌표 중 $a-b^2$이 아닌 값이다.

즉, $-30<a-b^2<a<15$이고

$g(-30)=2b$, $g(15)=b$이다.



$g(-30)=2b$에서

$\sqrt{30+a}=2b$, $30+a=4b^2$

$a-4b^2=-30$ …… ㉠

$g(15)=b$에서

$-\sqrt{15-a}+2b=b$, $-\sqrt{15-a}=-b$, $15-a=b^2$

$a+b^2=15$ …… ㉡

이므로 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=6$, $b=3$이고

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x+6} & (x \le -3)\\ -\sqrt{-x+6}+6 & (-3<x \le 6)\\ -\sqrt{x-6}+6 & (x>6)\end{cases}$$

$\{g(150)\}^2=(-\sqrt{150-6}+6)^2=36$