2024학년도 5월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	④	**2**	②	**3**	③	**4**	③	**5**	④
6	⑤	**7**	②	**8**	⑤	**9**	①	**10**	⑤
11	①	**12**	⑤	**13**	①	**14**	②	**15**	④
16	5	**17**	7	**18**	16	**19**	11	**20**	25
21	64	**22**	114						

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$$4^{1-\sqrt{3}}\times 2^{1+2\sqrt{3}}=(2^2)^{1-\sqrt{3}}\times 2^{1+2\sqrt{3}}$$
$$=2^{(2-2\sqrt{3})+(1+2\sqrt{3})}=2^3=8$$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1}=2$$

3. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_5-a_3=(a_3+2d)-a_3=2d=8$에서 $d=4$

따라서 $a_2=1+4=5$

4. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-4}{h}=6$이고 $\lim_{h\to0}h=0$이므로

$\lim_{h\to0}\{f(1+2h)-4\}=0$, $f(1)=4$

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-4}{h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2$$
$$=f'(1)\times2=6$$

이므로 $f'(1)=3$

따라서 $f(1)+f'(1)=4+3=7$

5. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$$\sin(-\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta+(-\sin\theta)$$
$$=-2\sin\theta=\frac{8}{5}$$

에서 $\sin\theta=-\frac{4}{5}$이고 $\cos\theta<0$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}$$

따라서 $\tan\theta=\frac{4}{3}$

6. [출제의도] 함수의 극대와 극소 이해하기

$f(x)=x^3+ax^2+3a$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=-2$에서 극대이므로

$f'(-2)=12-4a=0$, $a=3$

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(0)=3a=9$

7. [출제의도] 부정적분 이해하기

다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이다.

그러므로

$f'(x)=\{3x-f(1)\}(x-1)=3(x-1)^2$

에서 $f(1)=3$

$$f(x)=\int(3x^2-6x+3)dx$$
$$=x^3-3x^2+3x+C\ (C\text{는 적분상수})$$

$f(1)=1+C=3$에서 $C=2$

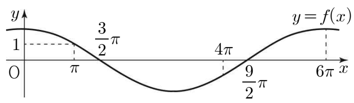
따라서 $f(x)=x^3-3x^2+3x+2$이므로 $f(2)=4$

8. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기

함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}=6\pi$이므로

$b=\frac{1}{3}$, $f(x)=a\cos\frac{x}{3}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



닫힌구간 $[\pi, 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은

$f(\pi)=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{a}{2}=1$이므로 $a=2$

따라서 $a+b=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

9. [출제의도] 등비수열을 활용하여 문제해결하기

$a_{n+1}=1-4\times S_n$에서 $S_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a_{n+1}$

$n=1$일 때, $a_1=S_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a_2$ ⋯ ㉠

$n\ge2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a_{n+1}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a_n\right)$$
$$=-\frac{1}{4}a_{n+1}+\frac{1}{4}a_n$$

이므로 $a_{n+1}=-3a_n$ $(n\ge2)$

즉, 수열 $\{a_{n+1}\}$은 첫째항이 a_2이고 공비가 -3인 등비수열이다.

$a_4=a_2\times(-3)^2=4$에서 $a_2=\frac{4}{9}$ ⋯ ㉡

$a_6=a_4\times(-3)^2=4\times9=36$

㉠, ㉡에서 $a_1=\frac{5}{36}$

따라서 $a_1\times a_6=\frac{5}{36}\times36=5$

10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^2|v_1(t)|dt=\int_0^2|3t^2+1|dt=\left[t^3+t\right]_0^2=10$$

시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 Q가 움직인 거리는

$$\int_0^2|v_2(t)|dt=\int_0^2|mt-4|dt$$

(i) $m\le2$일 때

$$\int_0^2|mt-4|dt=\int_0^2(-mt+4)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^2=-2m+8$$

이므로 $-2m+8=10$, $m=-1$

(ii) $m>2$일 때

$$\int_0^2|mt-4|dt$$
$$=\int_0^{\frac{4}{m}}|mt-4|dt+\int_{\frac{4}{m}}^2|mt-4|dt$$
$$=\int_0^{\frac{4}{m}}(-mt+4)dt+\int_{\frac{4}{m}}^2(mt-4)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{2}mt^2+4t\right]_0^{\frac{4}{m}}+\left[\frac{1}{2}mt^2-4t\right]_{\frac{4}{m}}^2$$
$$=2m-8+\frac{16}{m}$$

이므로 $2m-8+\frac{16}{m}=10$

$m^2-9m+8=(m-1)(m-8)=0$

$m>2$이므로 $m=8$

(i), (ii)에 의하여 구하는 모든 m의 값의 합은

$-1+8=7$

11. [출제의도] 등차수열을 이용하여 추론하기

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, d'이라 하자. 조건 (나)에 의하여

$$a_{m+1}-b_{m+1}=(a_m+d)-(b_m+d')$$
$$=d-d'<0$$
$$a_m-b_m=\{a_1+(m-1)d\}-\{b_1+(m-1)d'\}$$
$$=(a_1-b_1)+(m-1)(d-d')=0$$

에서 $a_1-b_1=(m-1)(d'-d)$이고,

$m-1>0$, $d'-d>0$이므로 $a_1-b_1>0$

그러므로 조건 (가)에서 $a_1-b_1=5$

$(m-1)(d'-d)=5$

$m-1$, $d'-d$가 모두 자연수이고 $m\ge3$이므로

$m=6$

따라서

$$\sum_{k=1}^{m}b_k=\sum_{k=1}^{6}b_k=\frac{6\times(b_1+b_6)}{2}$$
$$=\frac{6\{(a_1-5)+a_6\}}{2}$$
$$=\frac{6(a_1+a_6)}{2}-15$$
$$=\sum_{k=1}^{6}a_k-15=9-15=-6$$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제해결하기

두 점 A, B의 좌표를 각각

$\left(a, \frac{a}{2}\right)$, $\left(b, \frac{b}{2}\right)$ $(0<a<b)$라 하자.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고 두 점 A, B에서 만나므로

$$f(x)-\frac{1}{2}x=x^2(x-a)(x-b)$$
$$=x^4-(a+b)x^3+abx^2$$
$$S_1-S_2=\int_0^a\left|f(x)-\frac{1}{2}x\right|dx-\int_a^b\left|f(x)-\frac{1}{2}x\right|dx$$
$$=\int_0^a\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx+\int_a^b\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx$$
$$=\int_0^b\left\{f(x)-\frac{1}{2}x\right\}dx$$
$$=\int_0^b\{x^4-(a+b)x^3+abx^2\}dx$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{a+b}{4}x^4 + \frac{ab}{3}x^3\right]_0^b$$

$$= -\frac{b^5}{20} + \frac{ab^4}{12} = 0$$

에서 $5a-3b=0$이고,

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(b-a) = \sqrt{5}$

에서 $b-a=2$이므로 두 식을 연립하여 계산하면

$a=3,\ b=5$

그러므로 $f(x)=x^4-8x^3+15x^2+\frac{1}{2}x$

따라서 $f(1)=\frac{17}{2}$

13. [출제의도] 지수함수의 그래프를 이용하여 추론하기

두 함수 $f_1(x),\ f_2(x)$를

$f_1(x)=2^{x+3}+b,\ f_2(x)=2^{-x+5}+3b$라 하자.

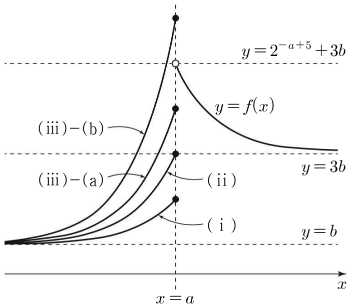
함수 $y=f_1(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값도 증가하고, 함수 $y=f_2(x)$는 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

또한 두 함수 $y=f_1(x),\ y=f_2(x)$의 그래프의 점근선이 각각 $y=b,\ y=3b$이므로

$\{f_1(x)\,|\,x \le a\}=\{y\,|\,b<y \le 2^{a+3}+b\}$,

$\{f_2(x)\,|\,x > a\}=\{y\,|\,3b<y < 2^{-a+5}+3b\}$

$2^{a+3}+b$와 $3b,\ 2^{-a+5}+3b$의 대소 관계에 따라 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $2^{a+3}+b<3b$일 때

$2^{a+3}+b<t<3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않으므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

(ii) $2^{a+3}+b=3b$일 때

$b<t<2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

또한 $t \ge 2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 만나지 않는다.

(iii) $2^{a+3}+b>3b$일 때

(a) $2^{a+3}+b \le 2^{-a+5}+3b$일 때

$3b<t<2^{a+3}+b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

(b) $2^{a+3}+b > 2^{-a+5}+3b$일 때

$3b<t<2^{-a+5}+3b$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 2이므로 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이 아니다.

조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값은 $4b+8$이므로

(i), (ii), (iii)에 의하여

$2^{a+3}+b=3b,\ 2^{-a+5}+3b=4b+8$이다.

두 식을 연립하여 계산하면

$2^a-2^{-a+3}+2=0$

$(2^a)^2+2\times 2^a-8=0$

$(2^a+4)(2^a-2)=0$

$2^a>0$이므로 $2^a=2,\ a=1$이고 $b=8$

따라서 $a+b=9$

14. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

$|f(k)|+|g(k)|=0$이려면 $f(k)=g(k)=0$이어야 한다. $f(k)=0$을 만족시키는 실수 k에 대하여

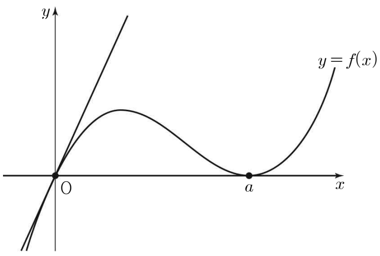
(i) $k=0$인 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의 접선의 y절편 $g(k)$의 값은 0이다.

(ii) $k \ne 0$인 경우

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(k,0)$에서의 접선의 y절편 $g(k)$의 값이 0이려면 $f'(k)=0$이어야 한다.

$|f(k)|+|g(k)|=0$을 만족시키는 실수 k의 개수가 2이므로 (i), (ii)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



$f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x\ (a \ne 0)$

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,f(t))$에서의 접선의 방정식은

$y-(t^3-2at^2+a^2t)=(3t^2-4at+a^2)(x-t)$

이 직선의 y절편이 $-2t^3+2at^2$이므로

$g(t)=-2t^3+2at^2$

$4f(1)+2g(1)=-1$에서

$4(1-2a+a^2)+2(-2+2a)=-1$

$4a^2-4a+1=(2a-1)^2=0,\ a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(4)=4\times\left(4-\frac{1}{2}\right)^2=49$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

a_n이 자연수라 하자. 자연수 k에 대하여

$a_n=3k-2$이면

$a_{n+1}=\frac{(3k-2)^2+5}{3}=\frac{9k^2-12k+9}{3}=3k^2-4k+3$,

$a_n=3k-1$이면

$a_{n+1}=\frac{(3k-1)^2+5}{3}=\frac{9k^2-6k+6}{3}=3k^2-2k+2$,

$a_n=3k$이면 $a_{n+1}=\frac{3k}{3}=k$

이므로 a_n이 자연수이면 a_{n+1}도 자연수이다.

a_1이 자연수이므로 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 자연수이다. … ㉠

a_4가 3의 배수이면 $a_5=\frac{a_4}{3}$이므로

$a_4+a_5=5$에서 $a_4+\frac{a_4}{3}=5,\ a_4=\frac{15}{4}$가 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 a_4는 3의 배수가 아니다.

$a_5=\frac{{a_4}^2+5}{3}$이므로 $a_4+a_5=5$에서

$a_4+\frac{{a_4}^2+5}{3}=5$

${a_4}^2+3a_4-10=(a_4+5)(a_4-2)=0$

㉠에 의하여 $a_4=2$

(i) a_3이 3의 배수인 경우

$a_4=\frac{a_3}{3}=2$이므로 $a_3=6$

a_2의 값을 구하면

(a) a_2가 3의 배수인 경우

$a_3=\frac{a_2}{3}=6$이므로 $a_2=18$

(b) a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\frac{{a_2}^2+5}{3}=6$이므로 ${a_2}^2=13$이 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=18$

a_1의 값을 구하면

(a) a_1이 3의 배수인 경우

$a_2=\frac{a_1}{3}=18$이므로 $a_1=54$

(b) a_1이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\frac{{a_1}^2+5}{3}=18$이므로 ${a_1}^2=49$

㉠에 의하여 $a_1=7$

(ii) a_3이 3의 배수가 아닌 경우

$a_4=\frac{{a_3}^2+5}{3}=2$이므로 ${a_3}^2=1$

㉠에 의하여 $a_3=1$

a_2의 값을 구하면

(a) a_2가 3의 배수인 경우

$a_3=\frac{a_2}{3}=1$이므로 $a_2=3$

(b) a_2가 3의 배수가 아닌 경우

$a_3=\frac{{a_2}^2+5}{3}=1$이므로 ${a_2}^2=-2$가 되어

㉠을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_2=3$

a_1의 값을 구하면

(a) a_1이 3의 배수인 경우

$a_2=\frac{a_1}{3}=3$이므로 $a_1=9$

(b) a_1이 3의 배수가 아닌 경우

$a_2=\frac{{a_1}^2+5}{3}=3$이므로 ${a_1}^2=4$

㉠에 의하여 $a_1=2$

(i), (ii)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$54+7+9+2=72$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$x-3,\ x-4$는 로그의 진수이므로

$x-3>0,\ x-4>0$에서 $x>4$

방정식 $\log_2(x-3)+\log_2(x-4)=1$에서

$\log_2(x-3)(x-4)=1$

$(x-3)(x-4)=2$

$x^2-7x+10=(x-2)(x-5)=0$

$x>4$이므로 $x=5$

17. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$f'(x)=1\times(x^3+x^2+5)+(x-1)(3x^2+2x)$

이므로 $f'(1)=7$

18. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$f(x)=3x^2+ax+b$라 하자.

$\int_0^x f(t)dt=2x^3+\int_0^{-x}f(t)dt$에서

$$2x^3=-\int_0^{-x}f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_{-x}^0 f(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$
$$=\int_{-x}^x f(t)dt$$
$$=\left[t^3+\frac{a}{2}t^2+bt\right]_{-x}^x=2x^3+2bx$$

모든 실수 x에 대하여 $2x^3=2x^3+2bx$이므로

$b=0$이고, $f(1)=3+a+b=5$에서 $a=2$

따라서 $f(2)=12+2a+b=16$

19. [출제의도] 거듭제곱근의 정의 이해하기

집합 X의 원소 중 양수의 개수를 p,

음수의 개수를 q라 하자.

$0\notin X$이면 $n(A)=2p$이므로 $n(A)=9$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $0\in X$

$n(A)=2p+1=9$에서 $p=4$

$n(B)=p+q+1=7$에서 $q=2$

따라서 집합 X의 모든 원소의 합은

$X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$일 때 최대이고 그 값은

$-2+(-1)+0+2+3+4+5=11$

20. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제해결하기

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)g(x)-x^3+2x^2 \ \cdots \ ㉠$$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=0$

㉠에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=g(2)$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}$ 의 값이 0이 아닌 실수이고

$\lim\limits_{x\to 2}\{f(x)-g(x)\}=f(2)-g(2)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}g(x-1)=g(1)=0$

$g(0)=g(1)=0$이므로 함수 $g(x)$는 상수함수이거나 차수가 2 이상이다.

함수 $g(x)$가 상수함수이면 $g(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 의 값이 존재하지 않는다.

그러므로 함수 $g(x)$의 차수는 2 이상이다.

또한 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}$ 의 값이 0이 아닌 실수이므로

함수 $\{f(x)\}^2$의 차수는 함수 $g(x)$의 차수와 같다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 차수를 각각 n, $2n$이라 하자.

(i) $n=1$일 때

함수 $g(x)$의 차수가 2이고 $g(0)=g(1)=0$이므로

$g(x)=ax(x-1)$ $(a\neq 0)$

㉠에서 양변의 x^3의 계수가 같아야 하므로

$0=-\frac{1}{2}\times a-1$, $a=-2$이고 $g(x)=-2x^2+2x$

또한 ㉠에서

$$xf(x)=\left(-\frac{1}{2}x+3\right)\times(-2x^2+2x)-x^3+2x^2$$
$$=-5x^2+6x$$

이므로 $f(x)=-5x+6$

$$\lim_{x\to 2}\frac{g(x-1)}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to 2}\frac{-2(x-1)(x-2)}{(2x-3)(x-2)}=-2$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\{f(x)\}^2}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{(-5x+6)^2}{-2x^2+2x}=-\frac{25}{2}$$

그러므로 $k=-2\times\left(-\frac{25}{2}\right)=25$

(ii) $n\geq 2$일 때

㉠의 좌변과 우변의 차수가 각각

$n+1$, $2n+1$이고 $n+1\neq 2n+1$이므로

㉠이 성립하지 않는다.

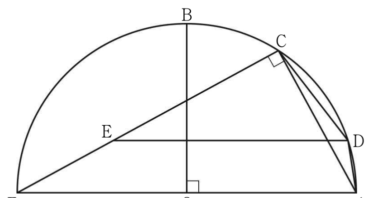
(i), (ii)에 의하여 구하는 k의 값은 25

21. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제해결하기

중심이 O이고 반지름의 길이가 6인 원을 C라 하고, 원 C와 직선 OA가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 F라 하자. 선분 FA는 원 C의 지름이므로

$\angle\mathrm{FCA}=\frac{\pi}{2}$이다. 또한 $\angle\mathrm{ECA}=\frac{\pi}{2}$이므로

세 점 C, E, F는 한 직선 위에 있다.



직선 ED가 직선 OA에 평행하므로

$$\sin(\angle\mathrm{DEC})=\sin(\angle\mathrm{AFC})=\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AF}}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

삼각형 CED에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin(\angle\mathrm{DEC})}=2\times 3\sqrt{2}=6\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{CD}}=4$$

사각형 ADCF가 원 C에 내접하므로

$$\cos(\angle\mathrm{CDA})=\cos(\pi-\angle\mathrm{AFC})$$
$$=-\cos(\angle\mathrm{AFC})$$
$$=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{3}$$

삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$$(4\sqrt{2})^2=4^2+\overline{\mathrm{AD}}^2-2\times 4\times\overline{\mathrm{AD}}\times\left(-\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

$$3\times\overline{\mathrm{AD}}^2+8\sqrt{7}\times\overline{\mathrm{AD}}-48=0$$

$\overline{\mathrm{AD}}>0$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\frac{16}{3}-\frac{4}{3}\sqrt{7}$

따라서 $p=\frac{16}{3}$, $q=-\frac{4}{3}$이므로 $9\times|p\times q|=64$

22. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

함수 $f(x)$가 극대 또는 극소가 되는 x의 값을

α_1, α_2, $\alpha_3(\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3)$이라 하자.

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	α_1	$\cdots$	α_2	$\cdots$	α_3	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)|=f(x)$

이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이고,

임의의 실수 k에 대하여

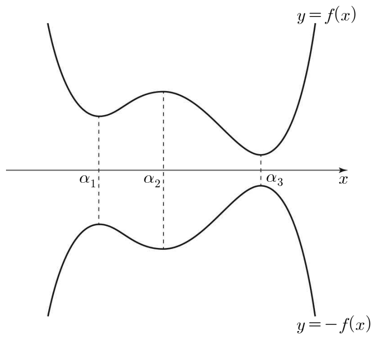
$g(k)=f(k)$ 또는 $g(k)=-f(k)$이다.

또한

$\lim\limits_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=|f'(k)|$이고 $\lim\limits_{t\to 0+}t=0$이므로

$\lim\limits_{t\to 0+}\{g(k+t)-g(k)\}=0$,

$g(k)=\lim\limits_{t\to 0+}g(k+t)$ $\cdots$ ㉠



실수 k에 대하여

(i) $k<\alpha_1$ 또는 $\alpha_2\leq k<\alpha_3$일 때

(a) $k<\alpha_1$ 또는 $\alpha_2<k<\alpha_3$일 때

$g(k)=f(k)$이면 ㉠에 의하여

$\lim\limits_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=f'(k)<0$이므로

$\lim\limits_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=|f'(k)|$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $g(k)=-f(k)$

(b) $k=\alpha_2$일 때

(a)와 ㉠에 의하여

$g(\alpha_2)=\lim\limits_{t\to 0+}g(\alpha_2+t)=-f(\alpha_2)$

(ii) $\alpha_1\leq k<\alpha_2$ 또는 $k\geq\alpha_3$일 때

(a) $\alpha_1<k<\alpha_2$ 또는 $k>\alpha_3$일 때

$g(k)=-f(k)$이면 ㉠에 의하여

$\lim\limits_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=-f'(k)<0$이므로

$\lim\limits_{t\to 0+}\frac{g(k+t)-g(k)}{t}=|f'(k)|$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $g(k)=f(k)$

(b) $k=\alpha_1$ 또는 $k=\alpha_3$일 때

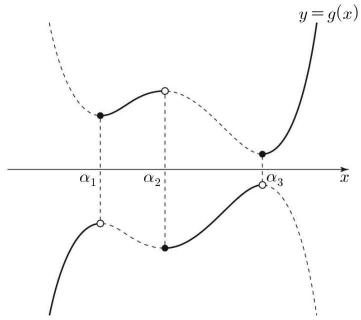
(a)와 ㉠에 의하여

$g(\alpha_1)=\lim\limits_{t\to 0+}g(\alpha_1+t)=f(\alpha_1)$,

$g(\alpha_3)=\lim\limits_{t\to 0+}g(\alpha_3+t)=f(\alpha_3)$

그러므로

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & (x<\alpha_1 \text{ 또는 } \alpha_2\leq x<\alpha_3)\\ f(x) & (\alpha_1\leq x<\alpha_2 \text{ 또는 } x\geq\alpha_3)\end{cases}$$



함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속이면

$f'(k)=0$이고 $f(k)\neq 0$이다.

함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(\alpha_1)$ 또는 $f(\alpha_3)$이고

$f(\alpha_1)\neq f(\alpha_3)$이므로

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속인 실수 k의 개수는

$f(\alpha_1)>0$이고 $f(\alpha_3)>0$이면 3,

$f(\alpha_1)=0$ 또는 $f(\alpha_3)=0$이면 2이다.

함수 $g(x)$가 $x=k$에서 불연속이라 하자.

조건 (나)에 의하여 함수 $g(x)h(x)$는 $x=k$에서 연속이므로

$g(k)h(k)=\lim\limits_{x\to k+}g(x)h(x)=\lim\limits_{x\to k-}g(x)h(x)$

그러므로

$h(k)=\lim\limits_{x\to k+}h(x)=\lim\limits_{x\to k-}h(x)=0$ ⋯ ㉡

또는

$h(k)\neq 0$이고 $h(k)=\lim\limits_{x\to k+}h(x)=-\lim\limits_{x\to k-}h(x)$ ⋯ ㉢

㉡을 만족시키는 실수 k의 값은

$a\le -\frac{3}{2}$이면 $-\frac{3}{2}$이고

$-\frac{3}{2}<a\le -\frac{1}{2}$이면 존재하지 않으며

$a>-\frac{1}{2}$이면 $-\frac{1}{2}$이다.

실수 k가 ㉢을 만족시키면 함수 $h(x)$는 $x=k$에서 불연속이므로 $k=a$이고

$4k+2=-(-2k-3)$에서 $k=a=\frac{1}{2}$

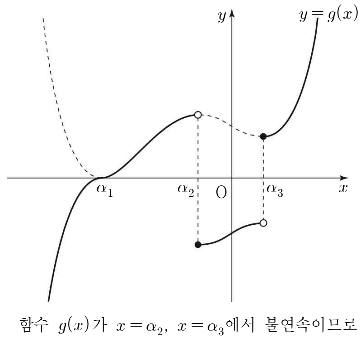
그러므로 ㉡ 또는 ㉢을 만족시키는 실수 k의 개수는 실수 a의 값에 따라서 최대 2이다.

그러므로 $a=\frac{1}{2}$이고

$f(\alpha_1)=0$ 또는 $f(\alpha_3)=0$이며

함수 $g(x)$는 $x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$에서만 불연속이다.

(i) $f(\alpha_1)=0$일 때

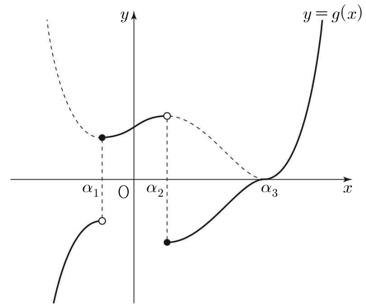


함수 $g(x)$가 $x=\alpha_2$, $x=\alpha_3$에서 불연속이므로

$\alpha_2=-\frac{1}{2}$, $\alpha_3=\frac{1}{2}$

$g(0)<0$이므로 $g(0)=\frac{40}{3}$을 만족시키지 않는다.

(ii) $f(\alpha_3)=0$일 때



함수 $g(x)$가 $x=\alpha_1$, $x=\alpha_2$에서 불연속이므로

$\alpha_1=-\frac{1}{2}$, $\alpha_2=\frac{1}{2}$

$$f'(x)=16\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-\alpha_3)$$
$$=16x^3-16\alpha_3x^2-4x+4\alpha_3$$

에서

$$f(x)=\int(16x^3-16\alpha_3x^2-4x+4\alpha_3)dx$$
$$=4x^4-\frac{16}{3}\alpha_3x^3-2x^2+4\alpha_3x+C$$

(C는 적분상수)

$f(0)=g(0)=\frac{40}{3}$이므로 $C=\frac{40}{3}$

$f(\alpha_3)=-\frac{4}{3}{\alpha_3}^4+2{\alpha_3}^2+\frac{40}{3}=0$

$2{\alpha_3}^4-3{\alpha_3}^2-20=0$

$(\alpha_3+2)(\alpha_3-2)(2{\alpha_3}^2+5)=0$

$\alpha_3>\frac{1}{2}$이므로 $\alpha_3=2$

그러므로

$f(x)=4x^4-\frac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\frac{40}{3}$,

$$g(x)=\begin{cases}-f(x) & \left(x<-\frac{1}{2} \text{ 또는 } \frac{1}{2}\le x<2\right)\\ f(x) & \left(-\frac{1}{2}\le x<\frac{1}{2} \text{ 또는 } x\ge 2\right)\end{cases},$$

$$h(x)=\begin{cases}4x+2 & \left(x<\frac{1}{2}\right)\\ -2x-3 & \left(x\ge\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 $g(1)\times h(3)=\left(-\frac{38}{3}\right)\times(-9)=114$

[미적분]

23	①	**24**	③	**25**	④	**26**	④	**27**	⑤
28	②	**29**	40	**30**	138				

23. [출제의도] 이계도함수 계산하기

$f'(x)=2\cos 2x$, $f''(x)=-4\sin 2x$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-4\sin\frac{\pi}{2}=-4\times 1=-4$

24. [출제의도] 급수의 뜻 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은 $a_n=1+(n-1)d$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{a_k}-\frac{k+1}{a_{k+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{2}{a_2}\right)+\left(\frac{2}{a_2}-\frac{3}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{a_n}-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{n+1}{dn+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1+\frac{1}{n}}{d+\frac{1}{n}}\right)$$
$$=1-\frac{1}{d}=\frac{2}{3}$$

따라서 $d=3$

25. [출제의도] 지수함수의 극한 이해하기

두 점 P, Q의 좌표는 각각 $\mathrm{P}(t, e^{2t}-1)$, $\mathrm{Q}(f(t), 0)$

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=\overline{\mathrm{OQ}}^2$이므로

$\{f(t)-t\}^2+(e^{2t}-1)^2=\{f(t)\}^2$에서

$f(t)=\frac{t}{2}+\frac{(e^{2t}-1)^2}{2t}$

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)}{t}=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{t}\right)^2\right\}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}\times 2\right)^2\right\}$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times(1\times 2)^2=\frac{5}{2}$$

26. [출제의도] 수열의 극한을 활용하여 문제해결하기

(i) $0<x<\frac{4}{x}$일 때,

$0<x<2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n=0$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x\times\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+1}{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n+\frac{4}{x}}=\frac{x}{4}$$

$f(x)=2x-3$에서 $x=\frac{12}{7}$

(ii) $x=\frac{4}{x}$일 때,

$x=2$이므로 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+2^n}{2^n+2^{n+1}}=1$

그러므로 $x=2$는 방정식 $f(x)=2x-3$의 실근이다.

(iii) $0<\frac{4}{x}<x$일 때,

$x>2$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4}{x^2}\right)^n=0$

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x+\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}{1+\frac{4}{x}\times\left(\frac{4}{x^2}\right)^n}=x$$

$f(x)=2x-3$에서 $x=3$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 실근의 합은

$\frac{12}{7}+2+3=\frac{47}{7}$

27. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$g(3)=k$라 하면 $f(k)=k^3+k+1=3$에서 $k=1$

$f'(x)=3x^2+1$이므로 $f'(1)=4$

$g'(3)=g'(f(1))=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{dx}{dt}=g'(t)+1$, $\dfrac{dy}{dt}=g'(t)-1$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)-1}{g'(t)+1}$$

따라서 $t=3$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은

$$\frac{g'(3)-1}{g'(3)+1}=\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+1}=-\frac{3}{5}$$

28. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 추론하기

$f(x)=0$에서 $a\sin x-\cos x=0$, $\tan x=\dfrac{1}{a}$

$\tan x=\dfrac{1}{a}$을 만족시키는 실수 x는 열린구간

$\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 오직 하나뿐이므로

$\tan k=\dfrac{1}{a}$ ⋯ ㉠

$g(k)=0$이므로 $e^{2k-b}-1=0$에서 $2k=b$ ⋯ ㉡

$\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$에서

$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)-2f(x)=0$

$f'(x)g(x)+f(x)\{g'(x)-2\}=0$

$f'(x)=a\cos x+\sin x$, $g'(x)=2e^{2x-b}$이므로

$$(a\cos x+\sin x)\left(e^{2x-b}-1\right)+(a\sin x-\cos x)\left(2e^{2x-b}-2\right)=0$$

$\left(e^{2x-b}-1\right)\{(2a+1)\sin x+(a-2)\cos x\}=0$

$e^{2x-b}-1=0$ 또는 $(2a+1)\sin x+(a-2)\cos x=0$

$x=\dfrac{b}{2}$ 또는 $\tan x=\dfrac{2-a}{2a+1}$

㉠, ㉡에 의하여 $\tan\dfrac{b}{2}=\tan k=\dfrac{1}{a}$이고,

$\tan x=\dfrac{2-a}{2a+1}$인 실수 x를 $\alpha\left(-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$라

하면 $\dfrac{1}{a}\neq\dfrac{2-a}{2a+1}$이므로 $\dfrac{b}{2}\neq\alpha$이다.

그러므로 열린구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$에서

방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 모든 해는 $\dfrac{b}{2}$, α이다.

$\dfrac{b}{2}+\alpha=\dfrac{\pi}{4}$이므로

$$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{b}{2}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\times\tan\frac{b}{2}}=\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}=\frac{a-1}{a+1}$$

$\tan\alpha=\dfrac{2-a}{2a+1}$이므로

$\dfrac{a-1}{a+1}=\dfrac{2-a}{2a+1}$에서 $3a^2-2a-3=0$

$2a=3\left(a^2-1\right)$, $a^2-1=\dfrac{2}{3}a$

따라서 $\tan b=\tan\left(\dfrac{b}{2}+\dfrac{b}{2}\right)=\dfrac{2\tan\frac{b}{2}}{1-\tan^2\frac{b}{2}}$

$$=\frac{2\times\frac{1}{a}}{1-\left(\frac{1}{a}\right)^2}=\frac{2a}{a^2-1}=\frac{2a}{\frac{2}{3}a}=3$$

29. [출제의도] 음함수 미분을 활용하여 문제해결하기

$\angle\mathrm{APD}=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$라 하면 $\angle\mathrm{ADQ}=\theta+\alpha$

삼각형 AQD에서 코사인법칙에 의하여

$\{f(\theta)\}^2=2^2+1^2-2\times2\times1\times\cos(\theta+\alpha)$

$\{f(\theta)\}^2=5-4\cos(\theta+\alpha)$ ⋯ ㉠

삼각형 ADP에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$에서 $\sin\alpha=2\sin\theta$

이 식의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\cos\alpha\dfrac{d\alpha}{d\theta}=2\cos\theta$에서 $\dfrac{d\alpha}{d\theta}=\dfrac{2\cos\theta}{\cos\alpha}$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$2f(\theta)f'(\theta)=4\sin(\theta+\alpha)\left(1+\dfrac{d\alpha}{d\theta}\right)$

$f(\theta)f'(\theta)=2\sin(\theta+\alpha)\left(1+\dfrac{2\cos\theta}{\cos\alpha}\right)$

$\theta=\theta_0$일 때 α의 값을 α_0이라 하면

$\cos\theta_0=\dfrac{7}{8}$이므로 $\sin\theta_0=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$이고,

$\sin\alpha_0=2\sin\theta_0=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$, $\cos\alpha_0=\dfrac{1}{4}$

$$\cos(\theta_0+\alpha_0)=\cos\theta_0\cos\alpha_0-\sin\theta_0\sin\alpha_0=\frac{7}{8}\times\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{15}}{8}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=-\frac{1}{4}$$

이므로 $\sin(\theta_0+\alpha_0)=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

㉠에 의하여 $\{f(\theta_0)\}^2=5-4\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)=6$

에서 $f(\theta_0)=\sqrt{6}$

$\sqrt{6}f'(\theta_0)=2\times\dfrac{\sqrt{15}}{4}\times(1+7)$

그러므로 $k=f'(\theta_0)=2\sqrt{10}$

따라서 $k^2=40$

30. [출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

조건 (가)에 의하여 $\dfrac{a}{1-r}=4$ ⋯ ㉠

수열 $\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$\frac{a_n}{b_n}=\begin{cases}1 & (|a_n|<\alpha)\\ -\dfrac{{a_n}^2}{5} & (|a_n|\geq\alpha)\end{cases}$$

모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|<\alpha$라 하면

$\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{m}1=m$의 값이 최소가 되도록 하는

자연수 m의 값은 1이므로 조건 (나)에 의하여

$\displaystyle\sum_{n=1}^{1}b_n=\sum_{n=1}^{1}a_n=a=51$

㉠에 의하여 $r=-\dfrac{47}{4}<-1$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴한다는 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $|a_k|\geq\alpha$, $|a_{k+1}|<\alpha$인 자연수 k가 존재한다.

$1\leq n\leq k$일 때, $\dfrac{a_n}{b_n}=-\dfrac{{a_n}^2}{5}<0$

$n\geq k+1$일 때, $\dfrac{a_n}{b_n}=1>0$

그러므로 $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는

자연수 m은 k이고

$\displaystyle\sum_{n=k+1}^{\infty}b_n=\sum_{n=k+1}^{\infty}a_n=\frac{ar^k}{1-r}=\frac{1}{64}$

㉠에 의하여 $r^k=\dfrac{1}{256}$

$$\sum_{n=1}^{k}b_n=\sum_{n=1}^{k}\left(-\frac{5}{a_n}\right)=\sum_{n=1}^{k}\left\{-\frac{5}{a}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}\right\}=\frac{-\frac{5}{a}\left\{1-\left(\frac{1}{r}\right)^k\right\}}{1-\frac{1}{r}}=51$$

$r^k=\dfrac{1}{256}$이므로 $a(r-1)=25r$

㉠에 의하여 $4(1-r)(r-1)=25r$, $4r^2+17r+4=0$

$-1<r<1$이므로 $r=-\dfrac{1}{4}$, $a=5$

그러므로 $p=k=4$

따라서 $32\times(a_3+p)=32\times\left\{5\times\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2+4\right\}=138$