2024학년도 6월 고1 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	③	2	④	3	④	4	①	5	③
6	②	7	④	8	⑤	9	③	10	①
11	②	12	⑤	13	②	14	④	15	⑤
16	③	17	⑤	18	①	19	④	20	①
21	②	22	6	23	4	24	29	25	23
26	8	27	11	28	20	29	13	30	154

해 설

1. [출제의도] 복소수 계산하기

$(1-3i)+2i=1+(-3i+2i)=1-i$
이다.

2. [출제의도] 다항식 계산하기

$A-B=(3x^2-5x+1)-(2x^2+x+3)$
$=x^2-6x-2$
이다.

3. [출제의도] 나머지정리 계산하기

$P(x)=2x^3-x^2-x+4$라 하자. $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 나머지정리에 의해 $P(1)$이므로
$P(1)=2-1-1+4=4$이다.
따라서 나머지는 4이다.

4. [출제의도] 이차부등식 계산하기

이차항의 계수가 1이고 해가 $2<x<3$인 이차부등식은 $(x-2)(x-3)<0$이다.
$x^2-5x+6<0$이므로 $a=-5$이다.

5. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

$x(x-3)+(x+1)(x+3)$
$=x^2-3x+x^2+4x+3$
$=2x^2+x+3$
이고, 주어진 등식은 x에 대한 항등식이므로 좌변과 우변의 계수를 비교하면 $a=1$, $b=3$이다.
따라서 $ab=3$이다.
[다른 풀이]
주어진 등식의 양변에 $x=0$을 대입하면 $b=3$이고, 주어진 등식의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$2-a+3=4$이므로 $a=1$이다.
따라서 $ab=3$이다.

6. [출제의도] 다항식의 연산 이해하기

$(x+y-z)^2$
$=x^2+y^2+(-z)^2+2xy+2y(-z)+2(-z)x$
$=x^2+y^2+z^2+2(xy-yz-zx)$
이므로 $5^2=x^2+y^2+z^2+2\times4$이다.
따라서 $x^2+y^2+z^2=17$이다.

7. [출제의도] 이차방정식의 판별식 이해하기

이차방정식 $x^2-2kx+k^2+3k-22=0$이 서로 다른 두 허근을 가지므로 판별식
$\dfrac{D}{4}=(-k)^2-1\times(k^2+3k-22)=-3k+22<0$이다.
따라서 $k>\dfrac{22}{3}$이므로 자연수 k의 최솟값은 8이다.

8. [출제의도] 나머지정리 이해하기

다항식 x^4+x^2+1을 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면 나머지정리에 의해
$R=2^4+2^2+1=21$이다.
그러므로 $x^4+x^2+1=(x-2)Q(x)+21$에
$x=2024$를 대입하면
$2024^4+2024^2+1=(2024-2)Q(2024)+21$이다.
따라서 2024^4+2024^2+1을 2022로 나눈 나머지는 21이다.

9. [출제의도] 절댓값을 포함한 일차부등식 이해하기

부등식 $|x-1|<n$의 해는 $-n+1<x<n+1$이므로 정수 x의 개수는 $(n+1)-(-n+1)-1=2n-1$이다.
따라서 $2n-1=9$이므로 $n=5$이다.

10. [출제의도] 사차방정식 문제 해결하기

$x^2-3x=X$라 하면
$X(X+6)+5=0$
$X^2+6X+5=0$
$(X+1)(X+5)=0$
$(x^2-3x+1)(x^2-3x+5)=0$
이다. 이차방정식 $x^2-3x+5=0$은 서로 다른 두 허근을 가지고, 이차방정식 $x^2-3x+1=0$은 서로 다른 두 실근 α, β를 가진다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해
$\alpha\beta=1$이다.

11. [출제의도] 인수분해를 이용하여 문제 해결하기

x^3+2x^2+3x+6
$=x^2(x+2)+3(x+2)$
$=(x+2)(x^2+3)$
이므로 $b=2$이다.
x^3+x+a가 $x+2$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의해 $-8-2+a=0$이므로 $a=10$이다.
따라서 $a+b=12$이다.

12. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

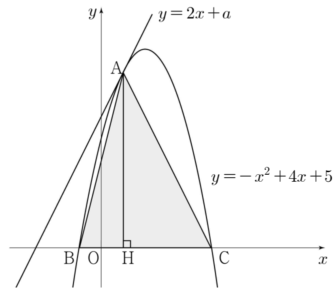
$x^3+x^2+x-3=0$에서 $(x-1)(x^2+2x+3)=0$
이므로 삼차방정식 $x^3+x^2+x-3=0$의 두 허근 α, β는 이차방정식 $x^2+2x+3=0$의 두 근이다.
그러므로 $\alpha^2+2\alpha+3=0$, $\beta^2+2\beta+3=0$이다.
따라서 $(\alpha^2+2\alpha+6)(\beta^2+2\beta+8)$
$=(0+3)(0+5)=15$이다.

13. [출제의도] 연립방정식 이해하기

$x-y=3$에서 $y=x-3$이므로 $x^2-xy-y^2=k$에 대입하면 $x^2-x(x-3)-(x-3)^2=k$에서
$x^2-9x+k+9=0$이다.
이차방정식 $x^2-9x+k+9=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 판별식
$D=(-9)^2-4\times1\times(k+9)>0$이고
$45-4k>0$, $k<\dfrac{45}{4}$이다.
따라서 자연수 k의 최댓값은 11이다.

14. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이용하여 문제 해결하기

점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



이차함수 $y=-x^2+4x+5$의 그래프와 직선 $y=2x+a$가 한 점 A에서만 만나므로
$-x^2+4x+5=2x+a$,
$x^2-2x+a-5=0$ ⋯ ㉠
은 중근을 가진다.
판별식 $\dfrac{D}{4}=(-1)^2-1\times(a-5)=0$에서 $a=6$이다.
$a=6$을 ㉠에 대입하면 $x^2-2x+1=0$,
$(x-1)^2=0$이므로 점 A의 x좌표는 1이다.
$\mathrm{A}(1,8)$이므로 $\overline{\mathrm{AH}}=8$이다.
이차함수 $y=-x^2+4x+5$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 x좌표는
이차방정식 $-x^2+4x+5=0$의 두 실근이다.
$-x^2+4x+5=-(x+1)(x-5)=0$이므로
$\mathrm{B}(-1,0)$, $\mathrm{C}(5,0)$이고 $\overline{\mathrm{BC}}=6$이다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\overline{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2}\times6\times8=24$이다.

15. [출제의도] 인수분해 문제 해결하기

$(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)+k$
$=(x+2)(x+5)(x+3)(x+4)+k$
$=(x^2+7x+10)(x^2+7x+12)+k$
$x^2+7x=X$라 하면
$(X+10)(X+12)+k=X^2+22X+120+k$가 완전제곱식이 되어야 하므로
$120+k=11^2=121$에서 $k=1$이다.
$X^2+22X+121=(X+11)^2$
$=(x^2+7x+11)^2$
$=(x^2+ax+b)^2$
이므로 $a=7$, $b=11$이다.
따라서 $a+b+k=7+11+1=19$이다.
[다른 풀이]
$x^2+7x+10=X$라 하면
$X(X+2)+k=X^2+2X+k$에서 $k=1$이다.
$X^2+2X+1=(X+1)^2$
$=(x^2+7x+11)^2$
$=(x^2+ax+b)^2$
이므로 $a=7$, $b=11$이다.
따라서 $a+b+k=7+11+1=19$이다.

16. [출제의도] 나머지정리를 이용하여 다항식의 나눗셈 문제 해결하기

다항식 x^3+ax^2+bx-4를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 $Q(x)$이고 나머지는 3이므로
$x^3+ax^2+bx-4=(x+1)Q(x)+3$ ⋯ ㉠
이다. ㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-1+a-b-4=3$, $a-b=8$이다.
$(x^2+a)Q(x-2)$가 $x-2$로 나누어떨어지므로 나머지정리에 의해 $(4+a)Q(0)=0$이다.
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $-4=Q(0)+3$,
$Q(0)=-7\neq0$이므로 $4+a=0$, $a=-4$이고

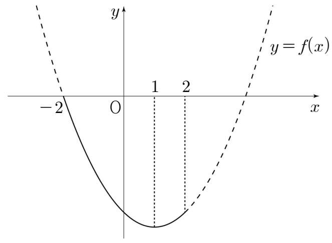
$a-b=8$이므로 $b=-12$이다.
㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면
$1-4-12-4=2Q(1)+3$이다.
따라서 $Q(1)=-11$이다.

17. [출제의도] 복소수 이해하기

$z^2=(a^2-1)^2+2(a^2-1)(a-1)i-(a-1)^2$
$\quad=(a^2-1)^2-(a-1)^2+2(a^2-1)(a-1)i$
가 음의 실수이므로 허수부분
$2(a^2-1)(a-1)=2(a+1)(a-1)^2=0$이다.
그러므로 $a=-1$ 또는 $a=1$이다.
$a=-1$이면 $z^2=-4$, $a=1$이면 $z^2=0$에서 z^2은 음의 실수이므로 $a=-1$이다.
$a=-1$을 $z=a^2-1+(a-1)i$에 대입하면 $z=-2i$
이고, $\dfrac{(z-\overline{z})i}{4}=\dfrac{\{-2i-(2i)\}i}{4}=\dfrac{(-4i)i}{4}=1$이므로
$\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n=1$이다. $\alpha=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$라 하면
$\alpha^2=\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{-2i}{2}=-i$
$\alpha^3=\alpha^2\alpha=(-i)\times\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$
$\alpha^4=\alpha^2\alpha^2=(-i)\times(-i)=-1$
$\alpha^5=\alpha^4\alpha=(-1)\times\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$
$\alpha^6=\alpha^4\alpha^2=(-1)\times(-i)=i$
$\alpha^7=\alpha^4\alpha^3=(-1)\times\left(\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$
$\alpha^8=\alpha^4\alpha^4=(-1)\times(-1)=1$
$\alpha^8=1$ 이므로
$\alpha=\alpha^9=\alpha^{17}=\cdots=\alpha^{97}=\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$
$\alpha^2=\alpha^{10}=\alpha^{18}=\cdots=\alpha^{98}=-i$
$\alpha^3=\alpha^{11}=\alpha^{19}=\cdots=\alpha^{99}=\dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$
$\alpha^4=\alpha^{12}=\alpha^{20}=\cdots=\alpha^{100}=-1$
$\alpha^5=\alpha^{13}=\alpha^{21}=\cdots=\alpha^{93}=\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$
$\alpha^6=\alpha^{14}=\alpha^{22}=\cdots=\alpha^{94}=i$
$\alpha^7=\alpha^{15}=\alpha^{23}=\cdots=\alpha^{95}=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$
$\alpha^8=\alpha^{16}=\alpha^{24}=\cdots=\alpha^{96}=1$
이다.
따라서 $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n=1$이 되도록 하는 100 이하의 자연수 n은 8의 배수이므로 n의 개수는 12이다.

18. [출제의도] 이차함수 문제 해결하기

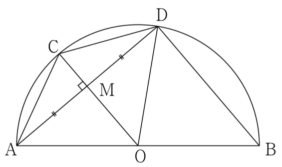
$f(x)=\left(x-\dfrac{2a-b}{2}\right)^2+a^2-4b-\left(\dfrac{2a-b}{2}\right)^2$이므로
$x=\dfrac{2a-b}{2}$에서 최솟값을 가진다.
조건 (가)에 의해 $\dfrac{2a-b}{2}=1$이므로 $b=2a-2$이다.
그러므로 $f(x)=x^2-2x+a^2-8a+8$이다.
이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 $x=1$이므로 $-2\le x\le 2$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(-2)$이다.
조건 (나)에 의해 $f(-2)=0$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(-2)=4+4+a^2-8a+8=(a-4)^2=0$
에서 $a=4$이고 $b=2a-2$이므로 $b=6$이다.
따라서 $a+b$의 값은 10이다.

19. [출제의도] 다항식의 연산 문제 해결하기

선분 AB의 중점을 O, 선분 AD와 선분 OC가 만나는 점을 M이라 하자.
$\triangle\mathrm{AOC}\equiv\triangle\mathrm{DOC}$이므로 $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{DCO}$이다.
$\overline{\mathrm{CM}}$이 $\angle\mathrm{ACD}$의 이등분선이고 $\triangle\mathrm{ACD}$가 $\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 이등변삼각형이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\overline{\mathrm{DM}}$, $\angle\mathrm{AMC}=90^\circ$이다.



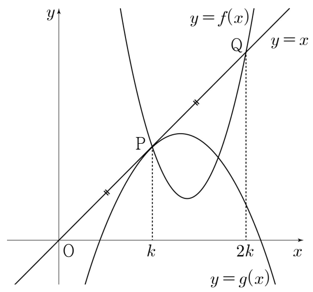
$\angle\mathrm{ADB}=90^\circ$이고 $\triangle\mathrm{AMO}\backsim\triangle\mathrm{ADB}$, $\overline{\mathrm{BD}}=8$이므로 $\overline{\mathrm{OM}}=4$이다.
직각삼각형 AMC에서 $\overline{\mathrm{AM}}^2=\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CM}}^2$,
직각삼각형 AMO에서 $\overline{\mathrm{AM}}^2=\overline{\mathrm{AO}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2$이므로
$\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{CM}}^2=\overline{\mathrm{AO}}^2-\overline{\mathrm{OM}}^2$이다.
그러므로 $(a-1)^2-(a-4)^2=a^2-4^2$,
$a^2-6a-1=0$에서 $a>4$이므로 $a=3+\sqrt{10}$이다.
$a^2-6a-1=0$의 양변을 a로 나누면 $a-\dfrac{1}{a}=6$이다.
따라서
$a^3-\dfrac{1}{a^3}=\left(a-\dfrac{1}{a}\right)^3+3\left(a-\dfrac{1}{a}\right)=6^3+3\times6=234$
이다.

20. [출제의도] 삼차방정식 이해하기

$x^3-(a^2+a-1)x^2-a(a-3)x+4a$
$=(x+1)\{x^2-a(a+1)x+4a\}=0$이므로 $x=-1$은 주어진 삼차방정식의 한 실근이다.
i) $\alpha=-1$인 경우
$-1\times\gamma=-4$에서 $\gamma=4$이므로 $-1<\beta<4$이다.
이차방정식 $x^2-a(a+1)x+4a=0$의 두 근이 β, 4이므로 근과 계수의 관계에 의해 $4\beta=4a$에서 $\beta=a$이다.
$\gamma=4$를 $x^2-a(a+1)x+4a=0$에 대입하면
$16-4a^2=0$에서 $a=\pm2$이다.
① $a=-2$인 경우
$\beta=-2$이므로 $-1<\beta<4$를 만족시키지 않는다.
② $a=2$인 경우
$\beta=2$이므로 $-1<\beta<4$를 만족시킨다.
①, ②에 의해 $a=2$이다.
ii) $\beta=-1$인 경우
α, γ는 이차방정식 $x^2-a(a+1)x+4a=0$의 두 근이므로 근과 계수의 관계에 의해 $\alpha\gamma=4a=-4$에서 $a=-1$이다. $a=-1$을 $x^2-a(a+1)x+4a=0$에 대입하면 $x^2=4$, $x=\pm2$이다.
$\alpha=-2$, $\gamma=2$이므로 $\alpha<\beta<\gamma$를 만족시킨다.
iii) $\gamma=-1$인 경우
$\alpha\times(-1)=-4$에서 $\alpha=4$이므로 $\alpha<\beta<\gamma$를 만족시키지 않는다.
따라서 i), ii), iii)에 의해 $a=2$ 또는 $a=-1$이므로 모든 a의 값의 합은 1이다.

21. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 추론하기

조건 (다)에 의해 점 P의 x좌표를 $k\,(k>0)$이라 하면 점 Q의 x좌표는 $2k$이므로 $y=f(x)$, $y=g(x)$, $y=x$의 위치 관계는 다음 그림과 같다.



조건 (가)에 의해 이차방정식 $f(x)=x$는 k, $2k$를 두 근으로 가지므로
$f(x)-x=2(x-k)(x-2k)$,
$f(x)=2(x-k)(x-2k)+x$이다.
조건 (나)에 의해 이차방정식 $g(x)=x$는 k를 중근으로 가지므로
$g(x)-x=-(x-k)^2$, $g(x)=-(x-k)^2+x$이다.
그러므로
$f(x)+g(x)=2(x-k)(x-2k)+x-(x-k)^2+x$
$\qquad\qquad=x^2+2(1-2k)x+3k^2$
이다.
이차부등식 $x^2+2(1-2k)x+3k^2\ge0$의 해가 모든 실수이므로
이차방정식 $x^2+2(1-2k)x+3k^2=0$의 판별식
$\dfrac{D}{4}=(1-2k)^2-1\times3k^2=k^2-4k+1\le0$이고
$2-\sqrt{3}\le k\le 2+\sqrt{3}$이다.
따라서 점 P의 x좌표의 최댓값은 $2+\sqrt{3}$이다.

22. [출제의도] 다항식 계산하기

$(2x+y)^3=8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3$이다.
따라서 xy^2의 계수는 6이다.

23. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 계산하기

이차방정식 $x^2-3x+a=0$에서 근과 계수의 관계에 의해 $1+b=3$, $1\times b=a$이다.
따라서 $a=2$, $b=2$이므로 $ab=4$이다.

24. [출제의도] 복소수 이해하기

복소수 z를 $z=a+bi$(a, b는 실수)라 하면
$3z-2\overline{z}=3(a+bi)-2(a-bi)=a+5bi$
이다.
$a+5bi=5+10i$에서 $a=5$, $b=2$이므로
$z=5+2i$, $\overline{z}=5-2i$
이다.
따라서 $z\overline{z}=(5+2i)(5-2i)=5^2+2^2=29$이다.

25. [출제의도] 다항식의 나눗셈 이해하기

$$\begin{array}{r} x^2 \qquad\qquad -3 \\ x^2+2x+3\,\overline{)\,x^4+2x^3 \qquad +11x-4} \\ \underline{x^4+2x^3+3x^2 \qquad\qquad} \\ -3x^2+11x-4 \\ \underline{-3x^2-\ \,6x-9} \\ 17x+5 \end{array}$$

이므로 $Q(x)=x^2-3$, $R(x)=17x+5$이다.
따라서 $Q(2)=1$, $R(1)=22$이고

$Q(2)+R(1)=1+22=23$ 이다.

26. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\frac{5}{3}$, $\alpha\beta=\frac{k}{3}$ 이다.

$(3\alpha-k)(\alpha-1)+(3\beta-k)(\beta-1)$

$=3\alpha^2-(k+3)\alpha+k+3\beta^2-(k+3)\beta+k$

$=3(\alpha^2+\beta^2)-(k+3)(\alpha+\beta)+2k$

$=3\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}-(k+3)(\alpha+\beta)+2k$

$=\frac{25}{3}-2k-\frac{5}{3}(3+k)+2k$

$=-10$

$5k=40$ 이다.

따라서 $k=8$ 이다.

[다른 풀이]

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$\alpha+\beta=\frac{5}{3}$ 이다.

$3\alpha^2+k=5\alpha$, $3\beta^2+k=5\beta$ 이므로

$(3\alpha-k)(\alpha-1)+(3\beta-k)(\beta-1)$

$=3\alpha^2-(k+3)\alpha+k+3\beta^2-(k+3)\beta+k$

$=3\alpha^2+k-(k+3)\alpha+3\beta^2+k-(k+3)\beta$

$=5\alpha-(k+3)\alpha+5\beta-(k+3)\beta$

$=5(\alpha+\beta)-(k+3)(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)(2-k)$

$=\frac{5}{3}(2-k)$

$=-10$

이고 $2-k=-6$ 이다.

따라서 $k=8$ 이다.

27. [출제의도] 연립부등식 문제 해결하기

$x^2-11x+24=(x-3)(x-8)<0$ 이므로

$3<x<8$ 이다.

$x^2-2kx+k^2-9$

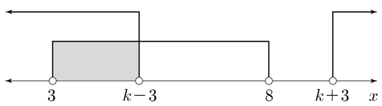
$=x^2-2kx+(k-3)(k+3)$

$=\{x-(k-3)\}\{x-(k+3)\}>0$ 이므로

$x<k-3$ 또는 $x>k+3$ 이다.

i) $3<k-3<8$ 인 경우

$k>6$ 이므로 $k+3>9$ 이다.

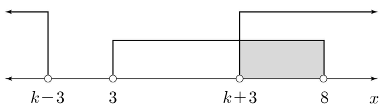


연립부등식의 해가 $3<x<k-3$ 이므로

$(k-3)-3=2$, $k=8$ 이다.

ii) $3<k+3<8$ 인 경우

$k<5$ 이므로 $k-3<2$ 이다.



연립부등식의 해가 $k+3<x<8$ 이므로

$8-(k+3)=2$, $k=3$ 이다.

따라서 i), ii)에 의해 모든 k 의 값의 합은

$8+3=11$ 이다.

28. [출제의도] 다항식의 나눗셈을 이용하여 다항식 추론하기

$f(x)g(x)$ 를 $f(x)-2x^2$ 으로 나누었을 때의 몫은

x^2-3x+3 이고 나머지는 $f(x)+xg(x)$ 이므로

$f(x)g(x)$

$=\{f(x)-2x^2\}(x^2-3x+3)+f(x)+xg(x)$ $\cdots$ ㉠

이다.

㉠의 좌변이 삼차식이므로 우변도 삼차식이다.

$\{f(x)-2x^2\}(x^2-3x+3)$ 이 삼차식이므로

$f(x)-2x^2$ 은 일차식이고

나머지 $f(x)+xg(x)$ 는 상수이다.

$f(x)-2x^2=ax+b$ 라 하면

나머지 $f(x)+xg(x)=(2x^2+ax+b)+xg(x)$ 는

상수이므로 $g(x)=-2x-a$ 이고 $f(x)+xg(x)=b$ 이다.

㉠에 $f(x)=2x^2+ax+b$, $g(x)=-2x-a$ 를

대입하면

$(2x^2+ax+b)(-2x-a)$

$=(ax+b)(x^2-3x+3)+b$ $\cdots$ ㉡

이다.

㉡의 좌변의 최고차항의 계수가 -4 이므로 $a=-4$ 이다.

㉡의 양변에 $x=2$ 를 대입하면

$0=(-8+b)\times1+b$ 에서 $b=4$ 이다.

따라서 $f(x)=2x^2-4x+4$ 이므로 $f(-2)=20$ 이다.

29. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소 문제 해결하기

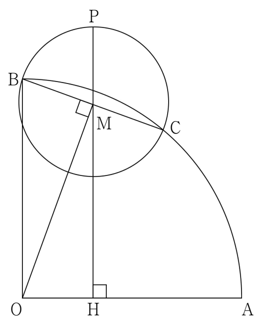
선분 BC 의 중점을 M 이라 하고 점 M 을 지나고

직선 OB 에 평행한 직선이 선분 OA 와 만나는 점을

H 라 하자.

$\overline{OB}=\overline{OC}$ 인 이등변삼각형 OBC 에서

점 M 이 선분 BC 의 중점이므로 $\angle OMB=90^\circ$ 이다.



삼각형 OAP 의 넓이 $S(x)$ 는

$S(x)=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times\overline{PH}$

$=\frac{1}{2}\times\overline{OA}\times(\overline{MH}+\overline{PM})$ $\cdots$ ㉠

이다.

$\overline{PM}=\overline{BM}=\frac{1}{2}\times\overline{BC}=\frac{x}{2}$ 이므로

직각삼각형 OMB 에서

$\overline{OM}^2=\overline{OB}^2-\overline{BM}^2$

$=1-\left(\frac{x}{2}\right)^2=1-\frac{x^2}{4}$ 이다.

$\angle OMH=\angle BOM$ 이므로

$\triangle OHM \backsim \triangle BMO$

이다. 그러므로

$\overline{MH}:\overline{OM}=\overline{OM}:\overline{OB}=\overline{OM}:1$ 이고

$\overline{MH}=\overline{OM}^2=1-\frac{x^2}{4}$ $\cdots$ ㉡

이다. ㉠, ㉡에서

$S(x)=\frac{1}{2}\times1\times\left(1-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{2}\right)$

$=-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{5}{8}$ $(0<x<\sqrt{2})$

$S(x)$ 의 최댓값은 $\frac{5}{8}$ 이므로 $p=8$, $q=5$ 이다.

따라서 $p+q=13$ 이다.

30. [출제의도] 이차함수 추론하기

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\le0$ 이므로

함수 $f(x)$ 는 최고차항의 계수가 음수이고 최댓값은

0 보다 작거나 같다.

조건 (가)에서 모든 실수 x 에 대하여 $g(x)\ge0$ 이므로

함수 $g(x)$ 는 최고차항의 계수가 양수이고 최솟값은

0 보다 크거나 같다.

조건 (나)에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값과 함수 $g(x)$ 의

최솟값이 같아지기 위해서는 함수 $f(x)$ 의 최댓값과

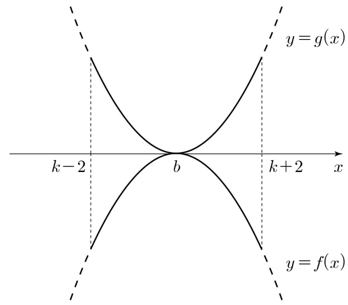
함수 $g(x)$ 의 최솟값이 모두 0 이어야 한다. 그러므로

$f(x)=a(x-b)^2$ $(a<0)$ $\cdots$ ㉠

$g(x)=c(x-d)^2$ $(c>0)$ $\cdots$ ㉡

이라 하자.

i) $b=d$ 인 경우

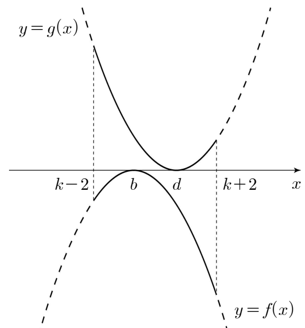


$k-2\le b\le k+2$ 에서 $b-2\le k\le b+2$ 이므로 k 의

최솟값이 0, 최댓값이 1 이 되도록 하는 실수 b 는

존재하지 않는다.

ii) $b<d$ 인 경우



k 의 최솟값이 0, 최댓값이 1 이고

$k-2\le b$, $d\le k+2$ 에서 $d-2\le k\le b+2$ 이므로

$b=-1$, $d=2$ 이다.

㉠에 $b=-1$ 을 대입하고 ㉡에 $d=2$ 를 대입하면

$f(x)=a(x+1)^2$, $g(x)=c(x-2)^2$ 이다.

방정식 $f(x)=f(0)$ 은 $a(x+1)^2=a$ 이고

$(x+1)^2=1$, $x^2+2x=0$ 에서 모든 실근의 합은

-2 이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

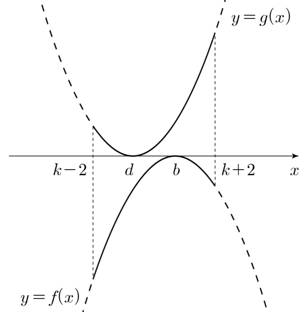
$f(1)=4a=-2$ 에서 $a=-\frac{1}{2}$ 이고 $g(1)=c=2$ 이다.

$f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)^2$, $g(x)=2(x-2)^2$ 이므로

$f(3)=-8$, $g(11)=162$ 이다.

그러므로 $f(3)+g(11)=154$ 이다.

iii) $d<b$ 인 경우



k 의 최솟값이 0, 최댓값이 1 이고

$k-2 \le d$, $b \le k+2$에서 $b-2 \le k \le d+2$이므로
$b=2$, $d=-1$이다.
㉠에 $b=2$를 대입하고 ㉡에 $d=-1$을 대입하면
$f(x)=a(x-2)^2$, $g(x)=c(x+1)^2$이다.
방정식 $f(x)=f(0)$은 $a(x-2)^2=4a$이고
$(x-2)^2=4$, $x^2-4x=0$에서 모든 실근의 합은
4이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.
따라서 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해 $f(3)+g(11)=154$이다.
[참고] 조건 (다)에 의해 b는 음수이므로 함수
$y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.