정답 및 해설

수학 영역

정답

1	④	2	④	3	①	4	⑤	5	③
6	⑤	7	②	8	①	9	③	10	②
11	⑤	12	④	13	①	14	④	15	②
16	11	17	50	18	37	19	2	20	35
21	8	22	96						

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$\sqrt[3]{16}\times 2^{-\frac{1}{3}}=(2^4)^{\frac{1}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-\frac{1}{3}}=2$

2. [출제의도] 미분계수 계산하기

$f'(x)=4x+5$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=9$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-2$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{2}\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이므로

$\sin^2\theta+\left(-\dfrac{1}{2}\sin\theta\right)^2=\dfrac{5}{4}\sin^2\theta=1$

$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 또는 $\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로 $\sin\theta>0$

$\sin\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

따라서 $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=3$

따라서 $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=2+3=5$

5. [출제의도] 정적분의 정의 이해하기

함수 $f(x)$는 $f'(x)$의 부정적분이므로

$\int_1^2 f'(x)dx=[f(x)]_1^2=f(2)-f(1)$

모든 실수 x에 대하여

$f(x)-f(1)=x^3+4x^2-5x$

$x=2$일 때,

$f(2)-f(1)=2^3+4\times 2^2-5\times 2=14$

따라서 $\int_1^2 f'(x)dx=14$

6. [출제의도] 등비수열의 일반항 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 $a\ (a>0)$, 공비를 $r\ (r>0)$이라 하자.

$a_n=ar^{n-1}$ (단, n은 자연수)

$a_1+a_2=a+ar$

$a_3+a_4=ar^2+ar^3=r^2(a+ar)$

$\dfrac{a_3+a_4}{a_1+a_2}=\dfrac{r^2(a+ar)}{a+ar}=r^2=4$, $r=2\ (r>0)$

$a_2a_4=a^2r^4=16a^2=1$, $a=\dfrac{1}{4}\ (a>0)$

$a_n=\dfrac{1}{4}\times 2^{n-1}$, $a_6=8$, $a_7=16$

따라서 $a_6+a_7=24$

7. [출제의도] 함수의 극대와 극소를 활용하여 문제 해결하기

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

$f(1)=1-3+2a=a+3$ 이므로 $a=5$

$f(x)=x^3-3x+10$

따라서 $f(-1)=(-1)^3-3\times(-1)+10=12$

8. [출제의도] 부정적분의 성질 이해하기

모든 실수 x에 대하여

$xf'(x)=6x^3-x+f(0)+1$

$x=0$일 때, $0=f(0)+1$

$f(0)=-1$

$xf'(x)=6x^3-x+(-1)+1=x(6x^2-1)$

$f'(x)=6x^2-1$

$f(x)=2x^3-x+C$ (단, C는 적분상수)

$f(0)=C=-1$

$f(x)=2x^3-x-1$

따라서 $f(-1)=-2+1-1=-2$

9. [출제의도] 지수와 로그의 성질 이해하기

삼각형 ABC의 무게중심의 좌표는

$\left(\dfrac{0+2a+(-\log_2 9)}{3},\ \dfrac{(-\log_2 9)+\log_2 7+a}{3}\right)$

$\dfrac{0+2a+(-\log_2 9)}{3}=b$, $2a-\log_2 9=3b$

$b=\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{3}\log_2 9$ ⋯ ㉠

$\dfrac{(-\log_2 9)+\log_2 7+a}{3}=\log_8 7=\dfrac{1}{3}\log_2 7$

$-\log_2 9+\log_2 7+a=\log_2 7$

$a=\log_2 9$ ⋯ ㉡

두 식 ㉠, ㉡을 연립하면

$b=\dfrac{2}{3}\log_2 9-\dfrac{1}{3}\log_2 9=\dfrac{1}{3}\log_2 9$

$a+3b=\log_2 9+\log_2 9=\log_2 81$

$2^{a+3b}=2^{\log_2 81}$

$2^{\log_2 81}=k$라 하면

$\log_2 k=\log_2 81$, $k=81$

따라서 $2^{a+3b}=81$

10. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

시각 $t\ (t\geq 0)$에서의 점 P의 위치를 $x(t)$라 하자.

$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)dt$

$=16+\int_0^t 3t(a-t)dt$

$=16+\int_0^t(-3t^2+3at)dt$

$=16+\left[-t^3+\dfrac{3}{2}at^2\right]_0^t$

$=-t^3+\dfrac{3}{2}at^2+16$

시각 $t=2a$에서 점 P의 위치가 0이므로

$x(2a)=-(2a)^3+\dfrac{3}{2}a\times(2a)^2+16$

$=16-2a^3=0$

$a^3=8$, $a=2$

$v(t)=3t(2-t)=-3t^2+6t$

따라서 시각 $t=0$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는

$\int_0^5|v(t)|dt$

$=\int_0^5|-3t^2+6t|dt$

$=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^5(3t^2-6t)dt$

$=[-t^3+3t^2]_0^2+[t^3-3t^2]_2^5$

$=\{(-8+12)-0\}+\{(125-75)-(8-12)\}$

$=58$

11. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제 해결하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.

$a_n=a+(n-1)d$ (단, n은 자연수)

$a_5=a+4d$는 자연수이다.

$S_8=\dfrac{8(2a+7d)}{2}=4(2a+7d)=\dfrac{68}{3}$

$2a+7d=\dfrac{17}{3}$

$2(a+4d)-d=2a_5-d=\dfrac{17}{3}$

$a_5=\dfrac{1}{2}d+\dfrac{17}{6}$

$0<d<1$ 이므로 $\dfrac{17}{6}<a_5<\dfrac{10}{3}$

$a_5=3$, $d=\dfrac{1}{3}$

$a_5=a+4\times\dfrac{1}{3}=3$, $a=\dfrac{5}{3}$

$a_n=\dfrac{5}{3}+(n-1)\times\dfrac{1}{3}$

따라서 $a_{16}=\dfrac{5}{3}+15\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{20}{3}$

12. [출제의도] 정적분을 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서

미분가능하므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이므로
$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 4-} f(x) = f(4)$
$4 \le x < 8$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프는
$0 \le x < 4$에서의 함수 $y=f(x)$의 그래프를
x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 16만큼
평행이동한 그래프와 일치한다.
모든 실수 x에 대하여
$f(x+4)=f(x)+16$이므로

$$\lim_{x\to 4+} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x+4)$$
$$= \lim_{x\to 0+} \{f(x)+16\} = 0+16=16$$
$$\lim_{x\to 4-} f(x) = \lim_{x\to 4-} (x^3+ax^2+bx)$$
$$=64+16a+4b$$

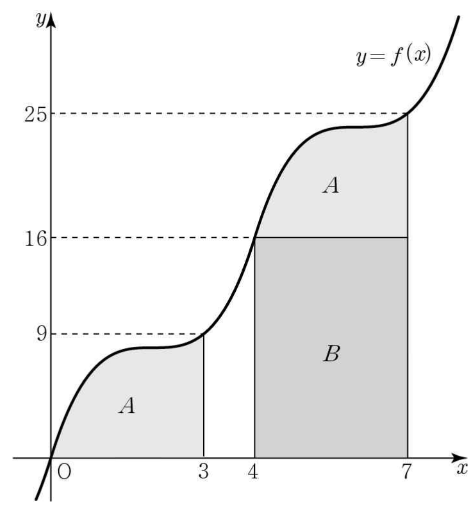
$f(4)=f(0)+16=16$
$16=64+16a+4b$
$b=-4a-12$
함수 $f(x)$가 $x=4$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 4+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4+} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{f(x+4)-f(4)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\{f(x)+16\}-16}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} \frac{x^3+ax^2+bx}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0+} (x^2+ax+b) = b = -4a-12$$

$$\lim_{x\to 4-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4-} \frac{(x^3+ax^2+bx)-16}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4-} \frac{x^3+ax^2+(-4a-12)x-16}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4-} \frac{ax(x-4)+(x-4)(x^2+4x+4)}{x-4}$$
$$= \lim_{x\to 4-} \{x^2+(a+4)x+4\} = 4a+36$$

$-4a-12=4a+36$
$a=-6$, $b=12$
$f(x)=x^3-6x^2+12x \ (0 \le x < 4)$
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및
직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A,
직선 $y=16$과 x축 및 두 직선 $x=4$, $x=7$로
둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하면

$$A=\int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^3-6x^2+12x)dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^3+6x^2\right]_0^3 = \frac{81}{4}$$

$B=3\times 16=48$
따라서 $\int_4^7 f(x)dx = A+B = \frac{81}{4}+48 = \frac{273}{4}$

13. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을
활용하여 문제 해결하기
삼각형 ABC의 외접원을 C_1,
삼각형 ADC의 외접원을 C_2라 하자.
원 C_1의 반지름의 길이를 R이라 하면
삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

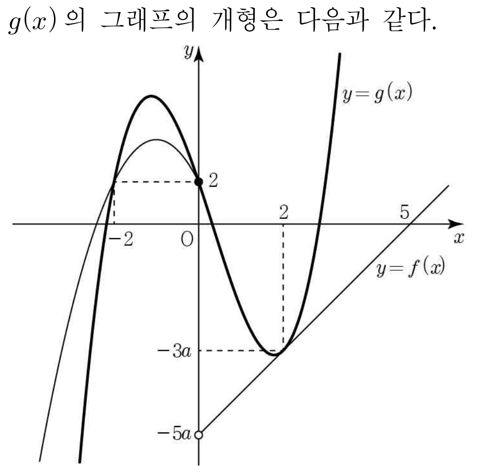
$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BAC})} = \frac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 18 = 2R,\ R=9$$

원 C_2에서 $\angle \mathrm{AO'D}$는 호 AD의 중심각,
$\angle \mathrm{ACD}$는 호 AD의 원주각이므로
$\angle \mathrm{AO'D} = 2\angle \mathrm{ACD} = \frac{2}{3}\pi$
이등변삼각형 O′AD에서 $\angle \mathrm{AO'D} = \frac{2}{3}\pi$이므로
$\angle \mathrm{DAO'} = \frac{\pi}{6}$
$\overline{\mathrm{OA}} = R = 9$, $\overline{\mathrm{AO'}} = 5\sqrt{3}$
$\angle \mathrm{OAO'} = \frac{\pi}{6}$이므로
삼각형 AOO′에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{OO'}}^2 = 9^2+(5\sqrt{3})^2-2\times 9\times 5\sqrt{3}\times \cos\frac{\pi}{6}$$
$$=81+75-135=21$$

따라서 $\overline{\mathrm{OO'}}^2=21$

14. [출제의도] 함수의 그래프의 개형을
활용하여 문제 해결하기
$f(-2)=g(-2)=2$, $f(0)=g(0)=2$이므로
삼차방정식 $g(x)=2$의 서로 다른 세 실근을
-2, 0, t라 하면
$g(x)-2=x(x+2)(x-t)$
$g(x)=x(x+2)(x-t)+2$
$\quad =x^3+(2-t)x^2-2tx+2$
$f(k)=g(k)$를 만족시키는 양수 k의 값은
2뿐이므로, 이를 만족시키는 두 함수 $y=f(x)$,
$y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$x>0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선
$y=g(x)$ 위의 점 $(2, g(2))$에서의 접선과
일치한다.
$f(2)=g(2)$이고 $f'(2)=g'(2)$
$f(2)=a(2-5)=-3a$
$g(2)=8+4(2-t)-4t+2=18-8t$
$-3a=18-8t$ ⋯ ㉠
$f'(2)=g'(2)$이므로
$f'(x)=a \ (x>0)$에서
$f'(2)=a$
$g'(x)=3x^2+2(2-t)x-2t$에서
$g'(2)=20-6t$
$a=20-6t$ ⋯ ㉡
두 식 ㉠, ㉡을 연립하면 $a=2$, $t=3$
$g(x)=x^3-x^2-6x+2$
따라서 $g(2a)=g(4)=26$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 활용하여
추론하기
a_1이 자연수이고 모든 자연수 n에 대하여
$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ 또는 $a_{n+1}=(a_n-1)^2$이므로
수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 음이 아닌 정수이다.
a_{n+1}의 값에 따라 가능한 a_n의 값은 다음과 같다.
(Ⅰ) $a_{n+1}=(2k)^2$인 자연수 k가 존재하는 경우
$\quad a_n=\sqrt{a_{n+1}}+1$ 또는 $a_n=2a_{n+1}$
(Ⅱ) $a_{n+1}=1$인 경우, $a_n=0$ 또는 $a_n=2$
(Ⅲ) $a_{n+1}=0$인 경우, $a_n=1$
(Ⅳ) 그 외의 경우, $a_n=2a_{n+1}$
(Ⅰ)~(Ⅳ)에 의하여
$a_7=1$이므로 $a_6=0$ 또는 $a_6=2$
(ⅰ) $a_6=0$인 경우
$a_5=1$이고 순서쌍 $(a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1)$은
(0, 1, 0, 1) 또는 (0, 1, 2, 4) 또는
(2, 4, 3, 6) 또는 (2, 4, 8, 16)이므로
$a_1=1$ 또는 $a_1=4$ 또는 $a_1=6$ 또는
$a_1=16$
(ⅱ) $a_6=2$인 경우
$a_5=4$이고 순서쌍 $(a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1)$은
(3, 6, 12, 24) 또는 (8, 16, 5, 10) 또는
(8, 16, 32, 64)이므로
$a_1=24$ 또는 $a_1=10$ 또는 $a_1=64$
따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여
모든 a_1의 값의 합은
$1+4+16+6+24+10+64=125$

16. [출제의도] 로그 계산하기
로그의 진수는 양수이므로
$x+9>0$, $x-6>0$에서
$x>6$
$\log_5(x+9)=\log_5 4+\log_5(x-6)$
$\log_5(x+9)=\log_5\{4(x-6)\}=\log_5(4x-24)$
$x+9=4x-24$
따라서 $x=11$

17. [출제의도] 곱의 미분 계산하기
$f(x)=(x-3)(x^2+x-2)$
$f'(x)=1\times(x^2+x-2)+(x-3)(2x+1)$
따라서

$f'(5)=1\times(25+5-2)+(5-3)\times(10+1)$
$=50$

18. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

$\sum_{k=1}^{15}(3a_k+2)=3\sum_{k=1}^{15}a_k+\sum_{k=1}^{15}2$

$=3\sum_{k=1}^{15}a_k+30=45$

$3\sum_{k=1}^{15}a_k=15$, $\sum_{k=1}^{15}a_k=5$

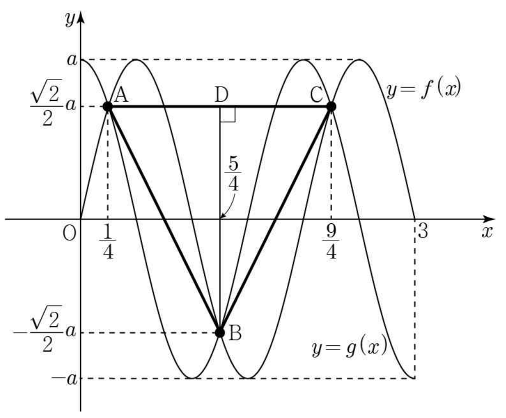
$2\sum_{k=1}^{15}a_k=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$

$10=42+\sum_{k=1}^{14}a_k$, $\sum_{k=1}^{14}a_k=-32$

따라서 $a_{15}=\sum_{k=1}^{15}a_k-\sum_{k=1}^{14}a_k=5-(-32)=37$

19. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기

삼각함수 $y=a\sin\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$,
최댓값은 a , 최솟값은 $-a$ 이다.
삼각함수 $y=a\cos\pi x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\pi}=2$,
최댓값은 a , 최솟값은 $-a$ 이다.
곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표는 방정식 $f(x)=g(x)$ 의 실근이므로
$a\sin\pi x=a\cos\pi x$, $\tan\pi x=1$
$\pi x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{9}{4}\pi$ $(0\le\pi x\le 3\pi)$
$x=\frac{1}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{4}$
곡선 $y=f(x)$ 와 곡선 $y=g(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점을 $\mathrm{A}\left(\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\ -\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\mathrm{C}\left(\frac{9}{4},\ \frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 라 하고, 점 B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\overline{\mathrm{AC}}=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}=2$

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{2}}{2}a-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\sqrt{2}\,a$

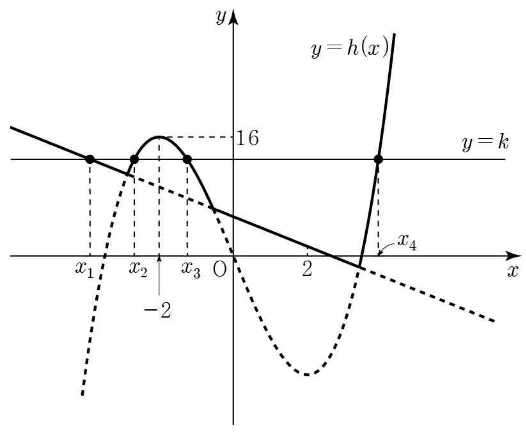
삼각형 ABC의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{2}\,a=2$
$a=\sqrt{2}$
따라서 $a^2=2$

20. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제 해결하기

직선 $y=k$ 가 곡선 $y=f(x)$, 직선 $y=g(x)$ 와 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 각각 3 , 1 이므로
함수 $y=h(x)$ 의 그래프와 직선 $y=k$ 가 서로 다른 네 점에서 만나는 경우는
직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 는 서로 다른 세 점에서 만나고
직선 $y=k$ 와 직선 $y=g(x)$ 는 한 점에서 만나며 이 네 점이 모두 서로 다른 경우이다.

함수 $h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\ge g(x)) \\ g(x) & (f(x)<g(x)) \end{cases}$ 이므로

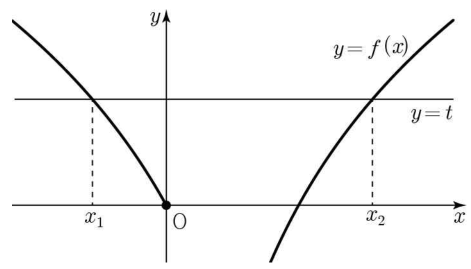
직선 $y=k$ 와 직선 $y=g(x)$ 가 만나는 점의 x 좌표를 x_1 이라 하면 $f(x_1)<g(x_1)$
직선 $y=k$ 와 곡선 $y=f(x)$ 가 만나는 서로 다른 세 점의 x 좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_2 , x_3 , x_4 라 하면
$f(x_2)>g(x_2)$, $f(x_3)>g(x_3)$, $f(x_4)>g(x_4)$
이를 만족시키는 함수 $y=h(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



직선 $y=g(x)$ 가 점 $(2,\ 2)$ 를 지나고
$x_1<x_2$, $f(x_1)<g(x_1)=k$ 인 실수 x_1 이 존재하므로 직선 $y=g(x)$ 의 기울기는 음수이다.
$y=g(x)=a(x-2)+2$ 에서 $a<0$ ⋯ ㉠
$f'(x)=3x^2-12=3(x-2)(x+2)$
함수 $f(x)$ 는 $x=-2$ 에서 극댓값을 갖고
$x=-2$ 에서 함수 $f(x)$ 의 함숫값은 함수 $g(x)$ 의 함숫값보다 크다.
$f(-2)>g(-2)$
$16>-4a+2$
$a>-\frac{7}{2}$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에 의하여 $-\frac{7}{2}<a<0$
$m=-\frac{7}{2}$, $M=0$
따라서 $10\times(M-m)=10\times\left\{0-\left(-\frac{7}{2}\right)\right\}=35$

21. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제 해결하기

(ⅰ) $m=-10$ 인 경우
$f(0)=|10-10|=0$
$t>0$ 일 때,
방정식 $5\log_2(4-x)-10=t$ 의 실근을 x_1 ,
방정식 $5\log_2 x-10=t$ 의 실근을 x_2 라 하자.



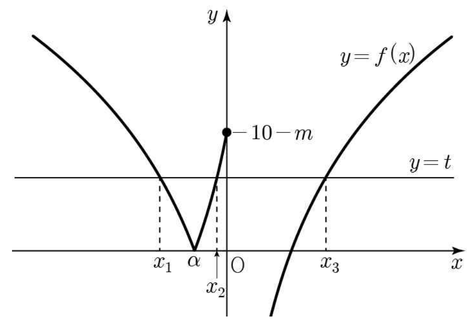
$5\log_2(4-x_1)-10=5\log_2 x_2-10$
$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$
$4-x_1=x_2$, $x_1+x_2=4$
$t>0$ 인 모든 실수 t 에 대하여
$g(t)=4$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $m<-10$ 인 경우
$x<0$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 가 x 축과 만나는 점의 x 좌표를 α 라 하면

$f(x)=\begin{cases} 5\log_2(4-x)+m & (x\le\alpha) \\ -5\log_2(4-x)-m & (\alpha<x\le 0) \\ 5\log_2 x+m & (x>0) \end{cases}$

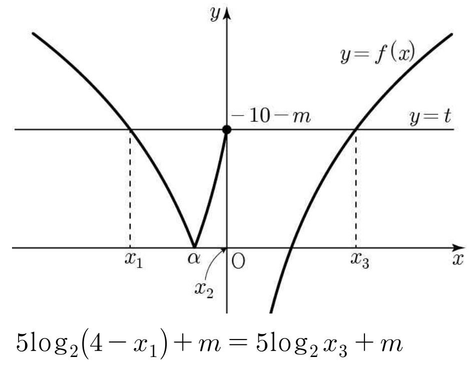
$f(0)=|10+m|=-10-m$

① $0<t<-10-m$ 일 때,
방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1,
방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$ 의 실근을 x_2,
방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_3이라 하자.



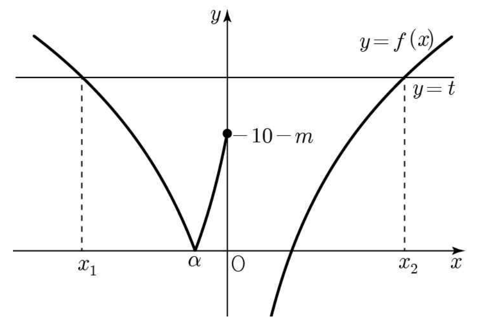
$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$
$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$
$4-x_1=x_3$, $x_1+x_3=4$
$g(t)=x_1+x_2+x_3=x_2+4<4$ 이고
$g(t)$ 의 값은 일정하지 않다.

② $t=-10-m$ 일 때,
방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1,
방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$ 의 실근을 x_2,
방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_3이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$
$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$, $4-x_1=x_3$
$x_1+x_3=4$, $x_2=0$ 이므로
$g(t)=x_1+x_2+x_3=4$

③ $t>-10-m$ 일 때,
방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$ 의 실근을 x_1 ,
방정식 $5\log_2 x+m=t$ 의 실근을 x_2 라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_2+m$
$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$
$4-x_1=x_2$, $x_1+x_2=4$
$g(t)=x_1+x_2=4$
①, ②, ③에 의하여
$t\ge -10-m$ 인 모든 실수 t 에 대하여
$g(t)=4$
(i), (ii)에 의하여
$t\ge a$ 인 모든 실수 t 에 대하여
$g(t)=g(a)$ 가 되도록 하는 a 의 최솟값은
$-10-m$ 이다.
$-10-m=2$, $m=-12$
따라서 $f(m)=f(-12)$
$=|5\log_2(4+12)-12|$
$=8$

22. [출제의도] 함수의 연속성을 활용하여 함수 추론하기

함수 $f(x)$ 는 $x=a$ 와 $x=b$ 에서만 불연속이고,
함수 $f(x+k)$ 는 $x=a-k$ 와 $x=b-k$ 에서만 불연속이므로
함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a$, $x=b$, $x=a-k$, $x=b-k$ 에서 연속이면 함수 $f(x)f(x+k)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
$a-k<a$, $b-k<b$ 이므로 두 수 a 와 $b-k$ 에 대하여 다음과 같은 경우가 존재한다.

(i) $a\ne b-k$ $(k\ne b-a)$ 인 경우

① $x=a-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성
$\lim_{x\to(a-k)+}f(x)f(x+k)$
$=\lim_{x\to(a-k)+}f(x)\times\lim_{x\to(a-k)+}f(x+k)$
$=f(a-k)\times(a-10)$
$\lim_{x\to(a-k)-}f(x)f(x+k)$
$=\lim_{x\to(a-k)-}f(x)\times\lim_{x\to(a-k)-}f(x+k)$
$=f(a-k)\times(a+2)$
$f(a-k)f(a-k+k)=f(a-k)\times(a-10)$
함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a-k$ 에서 연속이므로
$f(a-k)\times(a-10)=f(a-k)\times(a+2)$
$f(a-k)=0$

② $x=a$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성
$\lim_{x\to a+}f(x)f(x+k)=(a-10)f(a+k)$
$\lim_{x\to a-}f(x)f(x+k)=(a+2)f(a+k)$
$f(a)f(a+k)=(a-10)f(a+k)$
함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=a$ 에서 연속이므로
$(a-10)f(a+k)=(a+2)f(a+k)$
$f(a+k)=0$

③ $x=b-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성
$\lim_{x\to(b-k)+}f(x)f(x+k)$
$=f(b-k)\times(-b+8)$
$\lim_{x\to(b-k)-}f(x)f(x+k)=f(b-k)\times(b-10)$
$f(b-k)f(b-k+k)=f(b-k)\times(-b+8)$
함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=b-k$ 에서 연속이므로
$f(b-k)\times(-b+8)=f(b-k)\times(b-10)$
$f(b-k)=0$

④ $x=b$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성
$\lim_{x\to b+}f(x)f(x+k)=(-b+8)f(b+k)$
$\lim_{x\to b-}f(x)f(x+k)=(b-10)f(b+k)$
$f(b)f(b+k)=(-b+8)f(b+k)$
함수 $f(x)f(x+k)$ 가 $x=b$ 에서 연속이므로
$(-b+8)f(b+k)=(b-10)f(b+k)$
$f(b+k)=0$

①~④에 의하여
$f(a-k)=f(a+k)=f(b-k)=f(b+k)=0$
$a+k=b-k$ $\left(k=\dfrac{b-a}{2}\right)$ 이면
$a+k=b-k=\dfrac{a+b}{2}$
$a<\dfrac{a+b}{2}<b<8$ 이므로
$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)-10<0$
$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=f(a+k)=f(b-k)=0$ 을
만족시키지 않는다.
$a+k\ne b-k$ 이므로 네 수 $a-k$, $a+k$, $b-k$, $b+k$ 는 방정식 $f(x)=0$ 의 서로 다른 네 실근이다.
방정식 $f(x)=0$ 의 모든 실근은
-4, -2, 8, 10 이므로
$\{a-k,\ a+k,\ b-k,\ b+k\}$
$=\{-4,\ -2,\ 8,\ 10\}$
$0<a+k<b+k$ 이므로
$a+k=8$, $b+k=10$
$a-k<b-k$ 이므로
$a-k=-4$, $b-k=-2$
두 식 $a-k=-4$, $a+k=8$ 을 연립하면
$a=2$, $k=6$
$b+k=b+6=10$, $b=4$
$a<b<k$ 이므로
$f(k)=f(6)=|6-9|-1=2$
$f(k)>0$ 이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a=b-k$ $(k=b-a)$ 인 경우

① $x=a-k$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성
(i)의 ①에 의하여 $f(a-k)=0$
$a-k=2a-b$ 이므로 $f(2a-b)=0$

② $x=b$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성
(i)의 ④에 의하여 $f(b+k)=0$
$b+k=2b-a$ 이므로 $f(2b-a)=0$

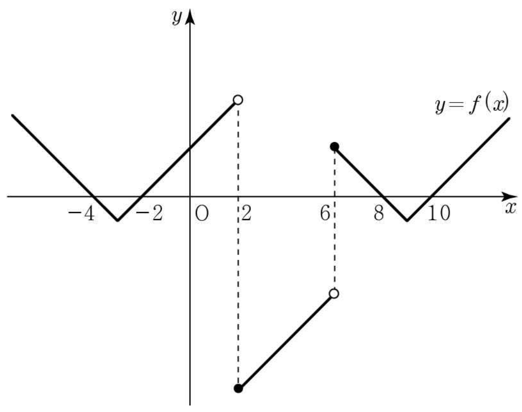
③ $x=a(=b-k)$ 에서 함수 $f(x)f(x+k)$ 의 연속성
$\lim_{x\to a+}f(x)f(x+k)$
$=\lim_{x\to a+}f(x)f(x+b-a)$
$=(a-10)(-b+8)$
$\lim_{x\to a-}f(x)f(x+k)$
$=\lim_{x\to a-}f(x)f(x+b-a)$
$=(a+2)(b-10)$
$f(a)f(a+k)=f(a)f(b)=(a-10)(-b+8)$
함수 $f(x)f(x+k)$ 가
$x=a=b-k$ 에서 연속이므로
$(a-10)(-b+8)=(a+2)(b-10)$
$a(b-9)-4b+30=0$
$a=4+\dfrac{6}{b-9}$
$a<b<8$ 이므로 이를 만족시키는
두 자연수 a, b 의 순서쌍 (a, b) 는
$(1,\ 7)$, $(2,\ 6)$ 이다.
$a=1$, $b=7$ 이면 $f(2a-b)=f(-5)=1$
이므로 $f(2a-b)=0$ 을 만족시키지 않는다.
$a=2$, $b=6$ 이면
$f(2a-b)=f(-2)=0$,
$f(2b-a)=f(10)=0$ 을 만족시킨다.
$k=6-2=4$
$a<k<b$ 이므로
$f(k)=f(4)=4-10=-6$
$f(k)<0$ 이므로 조건 (나)를 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a=2$, $b=6$, $k=4$ 이고
함수 $f(x)$ 는 다음과 같다.

$$f(x)=\begin{cases} |x+3|-1 & (x<2) \\ x-10 & (2\le x<6) \\ |x-9|-1 & (x\ge 6) \end{cases}$$

따라서
$f(a)\times f(b)\times f(k)=f(2)\times f(6)\times f(4)$
$=(-8)\times 2\times(-6)=96$

[참고] 함수 $y=f(x)$ 의 그래프



미적분 정답

23	③	24	①	25	②	26	④	27	③
28	②	29	12	30	144				

미적분 해설

23. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to 0}\frac{5^{2x}-1}{e^{3x}-1}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5^{2x}-1}{2x}\times\frac{3x}{e^{3x}-1}\times\frac{2x}{3x}\right)$$

$$=(\ln 5)\times 1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\ln 5$$

24. [출제의도] 매개변수로 나타내어진 함수의 미분법 이해하기

$x=3t-\dfrac{1}{t}$, $y=te^{t-1}$

$\dfrac{dx}{dt}=3+\dfrac{1}{t^2}$, $\dfrac{dy}{dt}=e^{t-1}+te^{t-1}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^{t-1}+te^{t-1}}{3+\frac{1}{t^2}}=\frac{(t^2+t^3)e^{t-1}}{3t^2+1}$$

따라서 $t=1$ 일 때, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$b_n=a_n\times\left(\sqrt{n^2+4}-n\right)$ 이라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$ 이고

$a_n=\dfrac{b_n}{\sqrt{n^2+4}-n}=\dfrac{b_n}{4}\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_n+6n^2}{na_n+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{2}\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)+6n^2}{\frac{nb_n}{4}\left(\sqrt{n^2+4}+n\right)+5}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{b_n}{2}\times\frac{\sqrt{n^2+4}+n}{n^2}+6}{\frac{b_n}{4}\times\frac{\sqrt{n^2+4}+n}{n}+\frac{5}{n^2}}$$

$$=\frac{\frac{6}{2}\times 0+6}{\frac{6}{4}\times 2+0}=\frac{6}{3}=2$$

26. [출제의도] 삼각함수의 덧셈정리 이해하기

$\angle\mathrm{EAB}=\alpha$, $\angle\mathrm{CDB}=\beta$,

$\overline{\mathrm{BE}}=x\left(0<x<\dfrac{1}{2}\right)$ 이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=2x$, $\overline{\mathrm{DB}}=1-2x$

$\tan\alpha=x$, $\tan\beta=\dfrac{1}{1-2x}$

$$\tan(\angle\mathrm{CFE})=\tan(\beta-\alpha)$$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\times\tan\alpha}$$

$$=\frac{\frac{1}{1-2x}-x}{1+\frac{1}{1-2x}\times x}$$

$$=\frac{1-x(1-2x)}{(1-2x)+x}$$

$$=\frac{2x^2-x+1}{1-x}=\frac{16}{15}$$

$15(2x^2-x+1)=16(1-x)$

$30x^2+x-1=0$

$(5x+1)(6x-1)=0$

$0<x<\dfrac{1}{2}$ 이므로 $x=\dfrac{1}{6}$

따라서 $\tan(\angle\mathrm{CDB})=\dfrac{1}{1-2x}=\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{2}$

27. [출제의도] 부분적분법 이해하기

$\mathrm{Q}(t,\ 0)$, $\mathrm{R}(0,\ 2\ln(t+1))$ 이므로

직사각형 OQPR 의 넓이는 $f(t)=2t\ln(t+1)$

따라서

$$\int_1^3 f(t)dt$$

$$=\int_1^3\{2t\ln(t+1)\}dt$$

$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3\frac{t^2}{t+1}dt$$

$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\int_1^3\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\left[t^2\ln(t+1)\right]_1^3-\left[\frac{1}{2}t^2-t+\ln(t+1)\right]_1^3$$

$$=(9\ln 4-\ln 2)-\left(\frac{9}{2}-3+\ln 4-\frac{1}{2}+1-\ln 2\right)$$

$$=-2+16\ln 2$$

28. [출제의도] 역함수의 미분법을 활용하여 추론하기

조건 (가)에 의하여 $h(0)=\dfrac{g(0)-k}{0-k}=1$

$g(0)=0$, $f(0)=0$

조건 (나)에 의하여

함수 $h(x)$ 는 $x=k$ 에서 연속이므로

$h(k)=\lim\limits_{x\to k}h(x)=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}$

$g(k)=k$, $f(k)=k$

$\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-k}{x-k}=\lim\limits_{x\to k}\dfrac{g(x)-g(k)}{x-k}=\dfrac{1}{3}$

$g'(k)=\dfrac{1}{3}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(k)=\dfrac{1}{f'(g(k))}=\dfrac{1}{f'(k)}=\dfrac{1}{3}$

$f'(k)=3$

$f(0)=0$, $f(k)=k$ 이고 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $f(x)$ 는

$f(x)-x=x(x-k)(x-t)$ (t 는 상수)

$f(x)=x(x-k)(x-t)+x$

$f(x)=x^3-(k+t)x^2+(tk+1)x$

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1$

$f'(k)=3$ 이므로 $k^2-tk-2=0$

$t=k-\dfrac{2}{k}$ $\cdots$ ㉠

역함수가 존재하는 삼차함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$f'(x)=3x^2-2(k+t)x+tk+1\geq 0$

x 에 대한 이차방정식

$3x^2-2(k+t)x+tk+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$D=4(k+t)^2-12(tk+1)\leq 0$

㉠을 대입하여 정리하면 $k^2-5+\dfrac{4}{k^2}\leq 0$ 이고

$k>0$ 이므로 양변에 k^2 을 곱하면

$k^4-5k^2+4\leq 0$

$(k^2-1)(k^2-4)\leq 0$

$(k-1)(k+1)(k-2)(k+2)\leq 0$

$k+1>0$, $k+2>0$ 이므로

$(k-1)(k-2)\leq 0$

$1\leq k\leq 2$

$f'(0)=tk+1=k^2-1$ 이므로

$k=2$ 일 때, $f'(0)$ 의 값이 최대이다.

그러므로 $\alpha=2$ 이고 이때 $t=1$ 이므로

$f(x)=x^3-3x^2+3x$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2$ $\cdots$ ㉡

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-2}{x-2} & (x\neq 2)\\[2ex] \dfrac{1}{3} & (x=2)\end{cases}$$

이다.

$h(9)=\dfrac{g(9)-2}{9-2}$ $\cdots$ ㉢

$g(9)=p$ 라 할 때, $f(p)=9$ 이므로

$p^3-3p^2+3p=9$

$p^3-3p^2+3p-9=0$

$(p-3)(p^2+3)=0$

$p=3$ 이므로 $g(9)=3$

㉢에 대입하여 정리하면 $h(9)=\dfrac{1}{7}$

역함수의 미분법에 의하여

$g'(9)=\dfrac{1}{f'(g(9))}=\dfrac{1}{f'(3)}$

㉡에 의하여 $f'(3)=12$ 이므로

$g'(9)=\dfrac{1}{12}$

따라서

$\alpha\times h(9)\times g'(9)=2\times\dfrac{1}{7}\times\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{42}$

29. [출제의도] 등비급수를 활용하여 문제 해결하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비를 r 이라 하면

$a_1=1$ 이므로 $a_n=r^{n-1}$ (단, n 은 자연수)

급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 이 수렴하므로

$-1<r<0$ 또는 $0<r<1$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21\left|a_{3n-1}\right|\right)=0$ 에서

$0<r<1$ 이면

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(20a_{2n}+21\left|a_{3n-1}\right|\right)>0$ 이므로

주어진 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $-1<r<0$

$\{a_{2n}\}$ 은 공비가 r^2 인 등비수열이고

$\{\left|a_{3n-1}\right|\}$ 은 공비가 $-r^3$ 인 등비수열이다.

$0 < r^2 < 1$, $-1 < -r^3 < 0$ 이므로

두 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{3n-1}|$ 은 수렴한다.

$\sum_{n=1}^{\infty}(20a_{2n}+21|a_{3n-1}|)$

$= \dfrac{20r}{1-r^2} + \dfrac{21|a_2|}{1-(-r^3)} = \dfrac{20r}{1-r^2} + \dfrac{21\times(-r)}{1+r^3} = 0$

$20(1-r+r^2) - 21(1-r) = 0$

$20r^2 + r - 1 = 0$

$(5r-1)(4r+1) = 0$

$-1 < r < 0$ 이므로 $r = -\dfrac{1}{4}$

$a_n = \left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n}$ 이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n} = 0$

등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 s라 하면

$\dfrac{b_n}{a_n} = b_1 \times (-4s)^{n-1}$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n}$

$= \lim_{n\to\infty} \{3\times(-1)^{n-1} + b_1\times(-4s)^{n-1}\}$

$= \lim_{n\to\infty} [(-1)^{n-1}\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\}]$

(ⅰ) $-1 < 4s < 1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty}(4s)^{n-1} = 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\} = 3$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n}$ 이 발산한다.

(ⅱ) $4s < -1$ 또는 $4s > 1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty}\{3+b_1\times(4s)^{n-1}\}$ 은 발산하므로

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n}$ 이 발산한다.

(ⅲ) $4s = -1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n}$

$= \lim_{n\to\infty}\{3\times(-1)^{n-1} + b_1\}$

$\lim_{n\to\infty}\{3\times(-1)^{n-1}\}$ 은 발산하므로

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n}$ 이 발산한다.

(ⅳ) $4s = 1$ 인 경우

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n}$

$= \lim_{n\to\infty}\{(-1)^{n-1}\times(3+b_1)\}$

$b_1 = -3$ 일 때,

모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n} = 0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n} = 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{3|a_n|+b_n}{a_n} = 0$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여

$b_1 = -3$, $s = \dfrac{1}{4}$

$b_n = (-3)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \dfrac{-3}{1-\dfrac{1}{4}} = -4$

따라서 $b_1 \times \sum_{n=1}^{\infty} b_n = 12$

30. [출제의도] 치환적분법을 활용하여 문제 해결하기

$f'(x) = \ln(e^{|x|} - a)$

조건 (가)에 의하여

$f'\left(\ln\dfrac{3}{2}\right) = \ln\left(\dfrac{3}{2} - a\right) = 0$ 이므로 $a = \dfrac{1}{2}$

$f'(x) = \ln\left(e^{|x|} - \dfrac{1}{2}\right)$

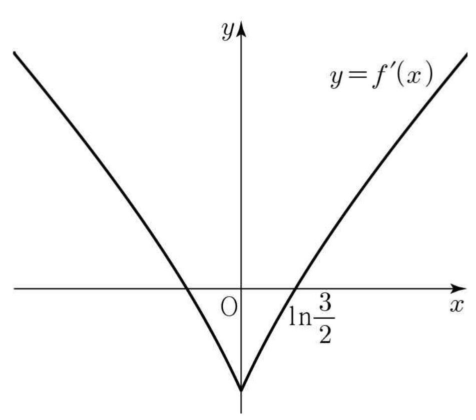
모든 실수 x에 대하여 $f'(-x) = f'(x)$ 이므로

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프는 y축에 대하여 대칭이고,

$f'(0) = \ln\dfrac{1}{2} < 0$

$x > 0$ 일 때, $f''(x) = \dfrac{e^x}{e^x - \dfrac{1}{2}} > 0$

함수 $y = f'(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



모든 실수 x에 대하여 $f'(-x) = f'(x)$ 이므로

$f(x) = -f(-x) + C$ (단, C는 적분상수)

$f(0) = 0$ 이므로 $C = 0$

그러므로 모든 실수 x에 대하여

$f(-x) = -f(x)$

$x \geq 0$ 에서 함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\ln\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$\ln\frac{1}{2}$	$-$	0	$+$
$f''(x)$		$+$	$+$	$+$
$f(x)$	0	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 의 극솟값을 m $(m < 0)$이라 하면,

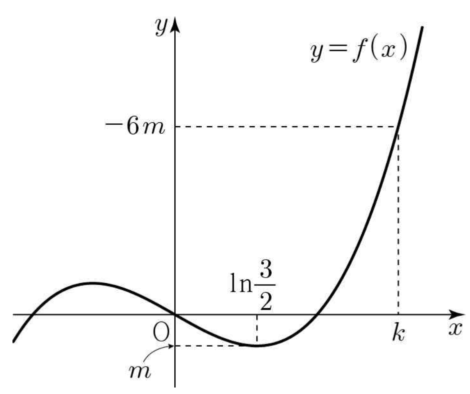
$f\left(\ln\dfrac{3}{2}\right) = m$

조건 (나)에 의하여

$f\left(-\ln\dfrac{3}{2}\right) = -f\left(\ln\dfrac{3}{2}\right) = -m$

$f(k) = -6m$ $\left(k > \ln\dfrac{3}{2}\right)$

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$\int_0^k \dfrac{|f'(x)|}{f(x)-f(-k)}dx$

$= \int_0^k \dfrac{|f'(x)|}{f(x)+f(k)}dx$

$= \int_0^{\ln\frac{3}{2}} \dfrac{-f'(x)}{f(x)+f(k)}dx + \int_{\ln\frac{3}{2}}^k \dfrac{f'(x)}{f(x)+f(k)}dx$

$= \int_0^{\ln\frac{3}{2}} \dfrac{-\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx$

$+ \int_{\ln\frac{3}{2}}^k \dfrac{\{f(x)+f(k)\}'}{f(x)+f(k)}dx$

$= -\left[\ln|f(x)+f(k)|\right]_0^{\ln\frac{3}{2}}$

$+ \left[\ln|f(x)+f(k)|\right]_{\ln\frac{3}{2}}^k$

$= -\left[\ln\{f(x)+f(k)\}\right]_0^{\ln\frac{3}{2}}$

$+ \left[\ln\{f(x)+f(k)\}\right]_{\ln\frac{3}{2}}^k$

$= -\ln(m-6m) + \ln(0-6m)$

$+ \ln(-6m-6m) - \ln(m-6m)$

$= \ln\dfrac{-6m}{-5m} + \ln\dfrac{-12m}{-5m} = \ln\dfrac{6}{5} + \ln\dfrac{12}{5} = \ln\dfrac{72}{25}$

이므로 $p = \ln\dfrac{72}{25}$

따라서 $100 \times a \times e^p = 100 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{72}{25} = 144$