수학 영역

정답

1	③	2	②	3	①	4	③	5	①
6	④	7	⑤	8	⑤	9	②	10	②
11	①	12	④	13	③	14	⑤	15	②
16	③	17	④	18	①	19	③	20	④
21	⑤	22	13	23	9	24	3	25	18
26	20	27	32	28	30	29	67	30	144

해설

1. [출제의도] 다항식 계산하기

$A+B=(x^2+3xy+2y^2)+(2x^2-3xy-y^2)$
$=3x^2+y^2$

2. [출제의도] 복소수 계산하기

$\overline{z}=1+2i$
$z+\overline{z}=(1-2i)+(1+2i)=2$

3. [출제의도] 항등식의 성질 이해하기

$x^2+ax+b=x(x+3)+4$
$=x^2+3x+4$
$a=3,\ b=4$
따라서 $a\times b=12$

4. [출제의도] 두 점 사이의 거리 계산하기

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(2-1)^2+(a-3)^2}=\sqrt{17}$
$\sqrt{a^2-6a+10}=\sqrt{17}$
$a^2-6a-7=0$
$(a+1)(a-7)=0$
$a=-1$ 또는 $a=7$
$a>0$ 이므로 $a=7$

5. [출제의도] 평행이동 이해하기

직선 $y=kx+1$ 을 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y-(-2)=k(x-1)+1$
$y=kx-k-1$
이 직선이 점 $(3,\ 1)$ 을 지나므로
$1=3k-k-1$
따라서 $k=1$

6. [출제의도] 선분의 내분점 계산하기

선분 AB 를 $1:2$ 로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\dfrac{1\times a+2\times 1}{1+2},\ \dfrac{1\times b+2\times 2}{1+2}\right)=\left(\dfrac{a+2}{3},\ \dfrac{b+4}{3}\right)$
$\dfrac{a+2}{3}=2,\ a=4$
$\dfrac{b+4}{3}=3,\ b=5$
따라서 $a+b=9$

7. [출제의도] 이차방정식의 근과 계수의 관계 이해하기

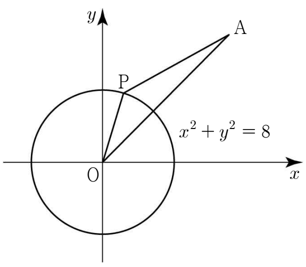
이차방정식 $x^2-x+k=0$ 의 서로 다른 두 근이 $\alpha,\ \beta$ 이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=k$
$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=1-3k=10$
따라서 $k=-3$

8. [출제의도] 이차부등식 이해하기

이차부등식 $x^2+ax-12\le 0$ 의 해가 $-4\le x\le b$ 이므로
$x^2+ax-12=(x+4)(x-b)$
$=x^2+(4-b)x-4b$
$a=4-b,\ -12=-4b$
$a=1,\ b=3$
따라서 $a-b=-2$

9. [출제의도] 원의 방정식 이해하기

원 $x^2+y^2=8$ 의 중심의 좌표는 $(0,\ 0)$
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{5^2+5^2}=5\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{OP}}=2\sqrt{2}$



$\overline{\mathrm{OA}}\le\overline{\mathrm{OP}}+\overline{\mathrm{PA}}$
$\overline{\mathrm{AP}}\ge\overline{\mathrm{OA}}-\overline{\mathrm{OP}}=5\sqrt{2}-2\sqrt{2}=3\sqrt{2}$
따라서 선분 AP 의 길이의 최솟값은 $3\sqrt{2}$

10. [출제의도] 두 직선의 수직 조건 이해하기

직선 $2x+3y+1=0$ 의 기울기가 $-\dfrac{2}{3}$ 이므로
점 $(1,\ a)$ 를 지나고 직선 $2x+3y+1=0$ 에 수직인 직선의 방정식은
$y-a=\dfrac{3}{2}(x-1)$
$y=\dfrac{3}{2}x+a-\dfrac{3}{2}$
$a-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$
따라서 $a=4$

11. [출제의도] 연립이차부등식 이해하기

부등식 $x^2-x-12\le 0$ 의 해는
$(x+3)(x-4)\le 0$ 에서
$-3\le x\le 4$ ⋯ ㉠
부등식 $x^2-3x+2>0$ 의 해는
$(x-1)(x-2)>0$ 에서
$x<1$ 또는 $x>2$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $-3\le x<1$ 또는 $2<x\le 4$
정수 x 는 $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 3,\ 4$
따라서 모든 정수 x 의 값의 합은 1

12. [출제의도] 인수분해 이해하기

$x^2+x=X$ 라 하면
$(x^2+x)(x^2+x+2)-8$
$=X(X+2)-8$
$=X^2+2X-8$
$=(X-2)(X+4)$
$=(x^2+x-2)(x^2+x+4)$
$=(x-1)(x+2)(x^2+x+4)$
$a=2,\ b=4$
따라서 $a+b=6$

13. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제 해결하기

점 $(1,\ 3)$ 을 지나고 기울기가 k 인 직선 l 의 방정식은
$y=k(x-1)+3$
원점과 직선 $kx-y-k+3=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|-k+3|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$
$|-k+3|=\sqrt{5k^2+5}$
$2k^2+3k-2=0$
$(k+2)(2k-1)=0$
$k=-2$ 또는 $k=\dfrac{1}{2}$
$k>0$ 이므로 $k=\dfrac{1}{2}$

14. [출제의도] 이차방정식의 판별식을 활용하여 문제 해결하기

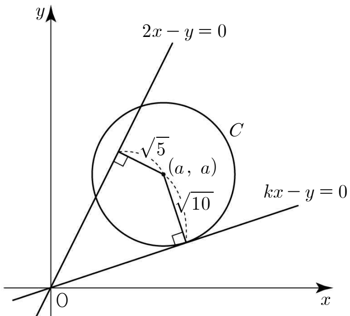
이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2-4k+b=0$ 의 판별식을 D 라 할 때
$\dfrac{D}{4}=(k-a)^2-(k^2-4k+b)$
$=k^2-2ak+a^2-k^2+4k-b$
$=(-2a+4)k+(a^2-b)=0$ ⋯ ㉠
㉠이 실수 k 의 값에 관계없이 성립하므로
$-2a+4=0,\ a^2-b=0$
$a=2,\ b=4$
따라서 $a+b=6$

15. [출제의도] 삼차방정식을 활용하여 문제 해결하기

삼차방정식 $x^3+5x^2+(a-6)x-a=0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 2 가 되기 위해서는 주어진 삼차방정식이 한 개의 중근을 가져야 한다.
$x^3+5x^2+(a-6)x-a=0$
$(x-1)(x^2+6x+a)=0$
(ⅰ) 이차방정식 $x^2+6x+a=0$ 이 1 과 1 이 아닌 실근을 갖는 경우
$1^2+6\times 1+a=0,\ a=-7$
주어진 삼차방정식은 $(x+7)(x-1)^2=0$
$x=-7$ 또는 $x=1$ (중근)
(ⅱ) 이차방정식 $x^2+6x+a=0$ 이 1 이 아닌 중근을 갖는 경우
이차방정식 $x^2+6x+a=0$ 의 판별식을 D 라 할 때
$\dfrac{D}{4}=3^2-a=0,\ a=9$
주어진 삼차방정식은 $(x+3)^2(x-1)=0$
$x=-3$ (중근) 또는 $x=1$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 실수 a의 값은 -7, 9
따라서 모든 실수 a의 값의 합은 2

16. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 문제 해결하기



원 C의 중심 $(a,\ a)$와 직선 $2x-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{5}$ 이므로

$\dfrac{|2a-a|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, $a=5$

원 C의 중심 $(5,\ 5)$와 직선 $kx-y=0$ 사이의 거리가 $\sqrt{10}$ 이므로

$\dfrac{|5k-5|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

$|5k-5|=\sqrt{10k^2+10}$

$3k^2-10k+3=0$

$(3k-1)(k-3)=0$

$k=\dfrac{1}{3}$ 또는 $k=3$

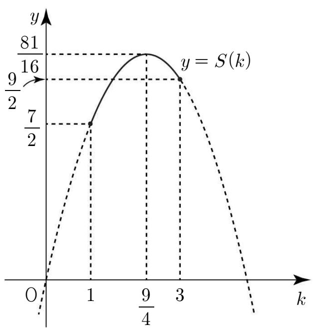
$0<k<1$ 이므로 $k=\dfrac{1}{3}$

17. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 문제 해결하기

점 P의 좌표는 $(-k,\ -k^2+4k)$
(사각형 PQOR의 넓이)
=(삼각형 PQO의 넓이)+(삼각형 POR의 넓이)
사각형 PQOR의 넓이를 $S(k)$라 하면

$S(k)=\dfrac{1}{2}\times 2\times(-k^2+4k)+\dfrac{1}{2}\times 1\times k$

$\quad=-\left(k-\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{81}{16}\ \ (1\le k\le 3)$



$k=\dfrac{9}{4}$ 일 때, $S(k)$의 최댓값은 $\dfrac{81}{16}$

18. [출제의도] 다항식의 나눗셈을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에 의하여 $f(x)$를 x^3-1로 나눈 몫과 나머지를 $Q(x)$라 하면 $Q(x)$는 차수가 2 이하인 다항식이다.

$f(x)=(x^3-1)Q(x)+Q(x)$
$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지가 72이므로
$f(2)=(8-1)Q(2)+Q(2)=8Q(2)=72$
$Q(2)=9$ ⋯ ㉠
조건 (나)에 의하여
$f(x)-x$는 x^2+x+1로 나누어떨어지므로
$f(x)-x=(x-1)(x^2+x+1)Q(x)+Q(x)-x$
$Q(x)-x=0$ 또는
$Q(x)-x=a(x^2+x+1)$ (단, $a\ne 0$)
(ⅰ) $Q(x)-x=0$인 경우
$Q(x)=x$
$Q(2)=2\ne 9$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $Q(x)-x=a(x^2+x+1)$인 경우
$Q(x)=a(x^2+x+1)+x$
$Q(2)=a\times(4+2+1)+2=9$
$7a=7$, $a=1$
$Q(x)=(x^2+x+1)+x=x^2+2x+1$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여
$f(x)=(x^3-1)(x^2+2x+1)+x^2+2x+1$
$\quad=x^3(x+1)^2$
따라서 $f(1)=4$

19. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 문제 해결하기

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 최고차항의 계수의 절댓값이 같으므로 조건 (가)에 의하여
이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수는 -2,
이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수는 2이다.
$f(-3)-g(-3)=0$, $f(-3)=g(-3)$
$f(2)-g(2)=0$, $f(2)=g(2)$
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표는 -3, 2이다.
직선 AB의 기울기가 -1이므로

$\dfrac{f(2)-f(-3)}{2-(-3)}=-1$

$f(2)-f(-3)=-5$
조건 (나)에 의하여
$f(-3)+g(2)=f(-3)+f(2)=5$
$f(2)=g(2)=0$, $f(-3)=g(-3)=5$
$f(x)=-2(x-2)(x-a)$ (단, a는 상수이다.)

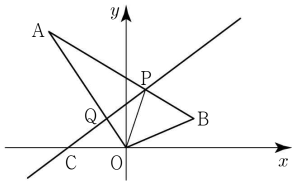
$f(-3)=-30-10a=5$, $a=-\dfrac{7}{2}$

$f(x)=-(x-2)(2x+7)$
$g(x)=2(x-2)(x-b)$ (단, b는 상수이다.)

$g(-3)=30+10b=5$, $b=-\dfrac{5}{2}$

$g(x)=(x-2)(2x+5)$
$f(-1)=15$, $g(-1)=-9$
따라서 $f(-1)+g(-1)=6$

20. [출제의도] 선분의 내분을 활용하여 문제 해결하기



직선 PC와 선분 AO가 만나는 점을 Q라 하고 삼각형 AOB의 넓이를 S라 하자.

두 삼각형 AOP, AQP의 넓이가 각각 $\dfrac{2}{3}S$, $\dfrac{1}{2}S$이므로 삼각형 QOP의 넓이는 $\dfrac{1}{6}S$이다.

두 삼각형 AQP와 QOP의 넓이의 비는 선분 AQ와 선분 QO의 길이의 비와 같다.
두 삼각형 AQP와 QOP의 넓이의 비가 $3:1$이므로 $\overline{AQ}:\overline{QO}=3:1$
점 Q의 좌표는

$\left(\dfrac{3\times 0+1\times(-8)}{3+1},\ \dfrac{3\times 0+1\times a}{3+1}\right)=\left(-2,\ \dfrac{a}{4}\right)$

점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times 7+1\times(-8)}{2+1},\ \dfrac{2\times 3+1\times a}{2+1}\right)=\left(2,\ \dfrac{a+6}{3}\right)$

직선 PC의 방정식은

$y=\dfrac{\frac{a+6}{3}}{2-(-6)}(x+6)=\dfrac{a+6}{24}(x+6)$

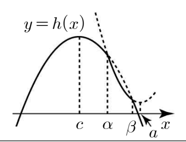
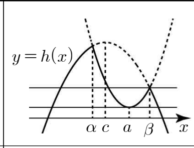
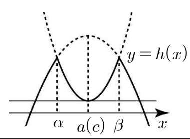
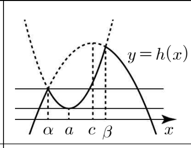
점 Q가 직선 PC 위의 점이므로

$\dfrac{a}{4}=\dfrac{a+6}{24}\times(-2+6)$

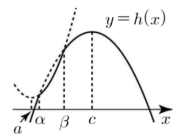
따라서 $a=12$

21. [출제의도] 이차방정식과 이차함수의 관계를 활용하여 추론하기

네 실수 a, c, α, β의 대소관계에 따른 함수 $y=h(x)$의 그래프의 개형과 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 개수는 다음과 같다.

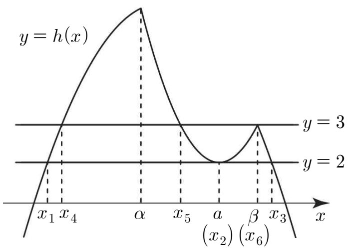
① $\beta\le a$, $c<a$	② $\alpha<a<\beta$, $c<a$
	
실수 k의 개수는 0	실수 k의 개수는 2
③ $\alpha<a<\beta$, $a=c$	④ $\alpha<a<\beta$, $a<c$
	
실수 k의 개수는 1	실수 k의 개수는 2

⑤ $a \le \alpha$, $a < c$

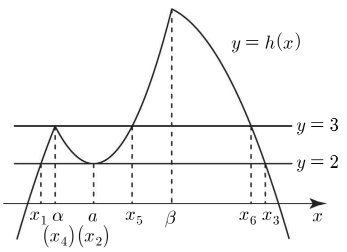


실수 k의 개수는 0

(ⅰ) ①, ③, ⑤인 경우
조건을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) ②인 경우 ($\alpha < a < \beta$, $c < a$)
조건에 의하여 $b=2$, $h(\beta)=3$이다.
함수 $y=h(x)$의 그래프가
직선 $y=2$와 만나는 세 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3이라 하고,
직선 $y=3$과 만나는 세 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_4, x_5, x_6이라 하자.



$x_1+x_3=2c$, $x_2=a$이므로 $S=2c+a$
$x_4+x_6=2c$이므로 $T=2c+x_5$
$T-S=(2c+x_5)-(2c+a)=x_5-a$
$x_5-a<0<\dfrac{a}{2}$이므로 $T-S\ne\dfrac{a}{2}$
(ⅲ) ④인 경우 ($\alpha < a < \beta$, $a < c$)
조건에 의하여 $b=2$, $h(\alpha)=3$이다.
함수 $y=h(x)$의 그래프가
직선 $y=2$와 만나는 세 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_1, x_2, x_3이라 하고,
직선 $y=3$과 만나는 세 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 x_4, x_5, x_6이라 하자.



$x_1+x_3=2c$, $x_2=a$이므로 $S=2c+a$
$x_4+x_6=2c$이므로 $T=2c+x_5$
$T-S=(2c+x_5)-(2c+a)=x_5-a=\dfrac{a}{2}$
$x_5=\dfrac{3}{2}a$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
$\alpha<a<\beta$, $a<c$, $f(x)=(x-a)^2+2$,
$f(x_5)=3$, $x_5=\dfrac{3}{2}a$이다.
$f\left(\dfrac{3}{2}a\right)=\left(\dfrac{3}{2}a-a\right)^2+2$
$=\dfrac{a^2}{4}+2=3$
$a>0$이므로 $a=2$, $x_5=3$
$f(x)=(x-2)^2+2$
$\alpha=x_4$이고 $x_4+x_5=2a$이므로
$\alpha+3=4$, $\alpha=1$
$h(\alpha)=3$이므로 $f(\alpha)=g(\alpha)=3$
$g(1)=-\dfrac{1}{2}(1-c)^2+11=3$, $c=5$
$g(x)=-\dfrac{1}{2}(x-5)^2+11$
이차방정식 $f(x)=g(x)$에서
$f(x)-g(x)=\dfrac{3}{2}(x-1)(x-5)=0$
$\beta=5$
$h(\alpha+\beta)=h(6)=g(6)$
$=-\dfrac{1}{2}(6-5)^2+11=\dfrac{21}{2}$

22. [출제의도] 나머지정리 계산하기

$f(x)=x^3+2x^2-9x+a$라 하면 나머지정리에 의하여 $f(1)=1+2-9+a=-6+a=7$
따라서 $a=13$

23. [출제의도] 연립일차부등식 이해하기

부등식 $2x \le x+11$의 해는 $x \le 11$ ⋯ ㉠
부등식 $x+5<4x-2$의 해는 $x>\dfrac{7}{3}$ ⋯ ㉡
㉠, ㉡에서 $\dfrac{7}{3}<x\le 11$
정수 x는 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11
따라서 모든 정수 x의 개수는 9

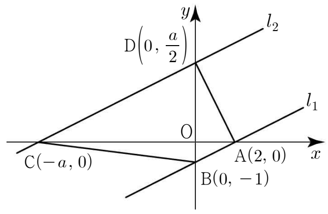
24. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계 이해하기

직선 $y=2x$를 y축의 방향으로 m만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=2x+m$
직선 $y=2x+m$이 이차함수
$y=x^2-4x+12$의 그래프에 접하므로
$x^2-4x+12=2x+m$
$x^2-6x+12-m=0$
이차방정식 $x^2-6x+12-m=0$의 판별식을 D라 할 때
$\dfrac{D}{4}=(-3)^2-(12-m)=9-12+m=0$
따라서 $m=3$

25. [출제의도] 연립이차방정식 이해하기

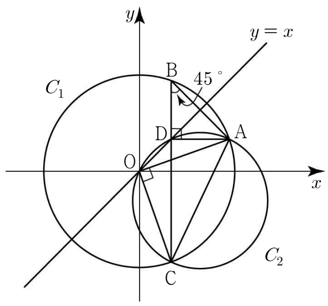
$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=0 & \cdots ㉠ \\ x^2-6x-12y+36=0 & \cdots ㉡ \end{cases}$
㉠에서 $(x-2y)^2=0$이므로 $x=2y$ ⋯ ㉢
㉡, ㉢에서
$x^2-6x-6x+36=x^2-12x+36$
$=(x-6)^2=0$
$x=6$, $y=3$에서 $\alpha=6$, $\beta=3$
따라서 $\alpha\times\beta=18$

26. [출제의도] 직선의 방정식 이해하기



두 직선 l_1, l_2가 서로 평행하므로
$l_2: x-2y+a=0$ $(a>0)$
(사각형 ADCB의 넓이)
=(삼각형 ADC의 넓이)+(삼각형 ACB의 넓이)
$=\dfrac{1}{2}\times(a+2)\times\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{2}\times(a+2)\times 1$
$=\dfrac{1}{2}(a+2)\left(\dfrac{a}{2}+1\right)$
$=\dfrac{a^2}{4}+a+1=25$
$a^2+4a-96=0$
$(a+12)(a-8)=0$
$a=-12$ 또는 $a=8$
$a>0$이므로 $a=8$
두 직선 l_1과 l_2 사이의 거리는
직선 l_1 위의 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$과 직선
$l_2: x-2y+8=0$ 사이의 거리와 같으므로
$d=\dfrac{|2+8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=2\sqrt{5}$
따라서 $d^2=20$

27. [출제의도] 대칭이동을 활용하여 문제 해결하기



점 $\mathrm{A}(a,\ 2)$를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{B}(2,\ a)$이고, 점 B를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{C}(2,\ -a)$
$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=\sqrt{a^2+4}$이므로 점 O는 삼각형 ABC의 외접원의 중심이고 $r_1=\overline{\mathrm{OA}}$
선분 BC와 직선 $y=x$가 만나는 점을 D라 하면 삼각형 BDA는 직각이등변삼각형이므로
$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ABC}=45^\circ$
두 삼각형 ABC, AOC의 외접원을 각각 C_1, C_2라 하자.
$\angle\mathrm{ABC}$는 원 C_1의 호 AC에 대한 원주각이고,
$\angle\mathrm{AOC}$는 원 C_1의 호 AC에 대한 중심각이므로 $\angle\mathrm{AOC}=2\times\angle\mathrm{ABC}=90^\circ$
$\angle\mathrm{AOC}=90^\circ$이므로 선분 AC는 원 C_2의 지름이다.
$r_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}r_1$

$r_1 \times r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} r_1{}^2 = 18\sqrt{2}$

$r_1 = 6$

$\overline{\mathrm{OA}} = \sqrt{a^2+4} = 6$

따라서 $a^2 = 32$

[참고]

$\mathrm{A}(a,\ 2)$, $\mathrm{C}(2,\ -a)$이므로

직선 OA 의 기울기 $\frac{2}{a}$

직선 OC 의 기울기 $-\frac{a}{2}$

두 직선 OA, OC 의 기울기의 곱이

$\frac{2}{a}\times\left(-\frac{a}{2}\right) = -1$이므로

두 직선 OA, OC 가 서로 수직이다.

$\angle \mathrm{AOC} = 90^\circ$

28. [출제의도] 점과 직선 사이의 거리를 활용하여 문제 해결하기

$f(x) = k(x-2)(x-a)\ (k>0)$이라 하면

$f(x) = k\left(x - \frac{a+2}{2}\right)^2 - \frac{k(a-2)^2}{4}$

$\mathrm{P}\left(\frac{a+2}{2},\ -\frac{k(a-2)^2}{4}\right)$, $\mathrm{C}(0,\ 2ak)$

사각형 APRQ 가 정사각형이므로 두 직선 AP, BC 가 서로 평행하다.

$\dfrac{-\dfrac{k(a-2)^2}{4}}{\dfrac{a+2}{2}-2} = \dfrac{-2ak}{a}$

$\frac{-k(a-2)}{2} = -2k$, $a = 6$

$\mathrm{P}(4,\ -4k)$, $\mathrm{C}(0,\ 12k)$

직선 BC 의 방정식은 $2kx + y - 12k = 0$

사각형 APRQ 가 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AQ}}$

$\sqrt{2^2+(-4k)^2} = \frac{|4k-12k|}{\sqrt{(2k)^2+1^2}}$

$\sqrt{4(4k^2+1)} = \frac{8k}{\sqrt{4k^2+1}}$

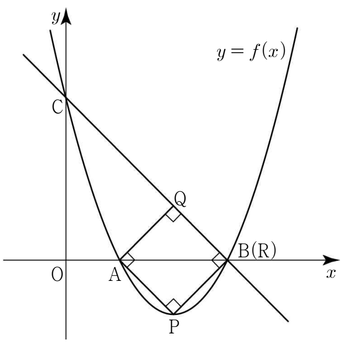
$4k^2+1 = 4k$

$(2k-1)^2 = 0$, $k = \frac{1}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x-6)$

따라서 $f(12) = 30$

[참고]



29. [출제의도] 이차함수의 최대, 최소를 활용하여 추론하기

조건 (가), (나)에 의하여

$0 \le x \le 3$에서 함수 $f(x)$의 최솟값과

$0 \le x \le 5$에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 m으로 같으므로

$0 < p \le 3$, $q = m$

$f(x) = (x-p)^2 + m$

(i) $0 < p \le \frac{3}{2}$인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 최댓값을 갖는다.

$f(3) = (3-p)^2 + m = m + 4$

$(3-p)^2 = 4$

$0 < p \le \frac{3}{2}$이므로 $p = 1$

$f(x) = (x-1)^2 + m$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값을 갖는다.

$f(5) = (5-1)^2 + m = 4m$, $m = \frac{16}{3}$

m이 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $\frac{3}{2} < p \le 3$인 경우

조건 (가)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최댓값을 갖는다.

$f(0) = (0-p)^2 + m = m+4$, $p^2 = 4$

$\frac{3}{2} < p \le 3$이므로 $p = 2$

$f(x) = (x-2)^2 + m$

조건 (나)에 의하여 함수 $f(x)$는 $x=5$에서 최댓값을 갖는다.

$f(5) = (5-2)^2 + m = 4m$, $m = 3$

(i), (ii)에 의하여

$m = 3$, $f(x) = (x-2)^2 + 3$

따라서 $f(10) = 67$

30. [출제의도] 원과 직선의 위치 관계를 활용하여 추론하기

$x_1 < x_2 < x_3$이라 하면

조건 (가)에 의하여 $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$

또는 $x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_3 > 0$

조건 (나)에 의하여 세 점 $(x_1,\ f(x_1))$, $(x_2,\ f(x_2))$, $(x_3,\ f(x_3))$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 y좌표가 음수이므로 $a < 0$

원의 중심을 $\mathrm{P}(p,\ q)$라 하면 $q < 0$

점 P 와 직선 $4x - 3y = 0$ 사이의 거리는 점 P 와 x축 사이의 거리 $-q$와 같다.

$\frac{|4p-3q|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|4p-3q|}{5} = -q$

(i) $4p - 3q = -5q$인 경우

$q = -2p$이므로

점 P 는 이차함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = -2x$가 만나는 점이다.

(ii) $-(4p-3q) = -5q$인 경우

$q = \frac{1}{2}p$이므로

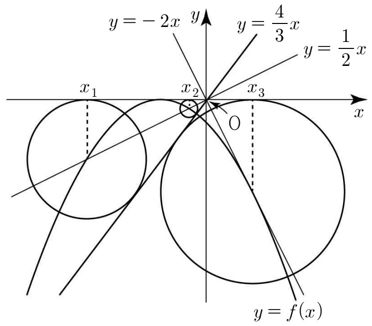
점 P 는 이차함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = \frac{1}{2}x$가 만나는 점이다.

조건 (가)와 (i), (ii)에 의하여

$x_1 < 0$, $x_2 < 0$, $x_3 > 0$이고 $b < 0$

이차함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $y = -2x$에 접하고, 직선 $y = \frac{1}{2}x$와 서로 다른 두 점에서 만난다.

함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



실수 t에 대하여 $\mathrm{P}(t,\ a(t-b)^2)$이라 하자.

① 점 P 가 직선 $y = -2x$ 위의 점인 경우

t에 대한 이차방정식 $a(t-b)^2 = -2t$가 중근 x_3을 갖는다.

$at^2 - 2(ab-1)t + ab^2 = 0$ ⋯ ㉠

이차방정식 $at^2 - 2(ab-1)t + ab^2 = 0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (ab-1)^2 - a^2b^2 = 0$

$a^2b^2 - 2ab + 1 - a^2b^2 = 0$

$b = \frac{1}{2a}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$at^2 + t + \frac{1}{4a} = 0$

$a\left(t + \frac{1}{2a}\right)^2 = 0$

$x_3 = -\frac{1}{2a}$

② 점 P 가 직선 $y = \frac{1}{2}x$ 위의 점인 경우

t에 대한 이차방정식 $a(t-b)^2 = \frac{1}{2}t$가 서로 다른 두 근 x_1, x_2를 갖는다.

$2at^2 - (4ab+1)t + 2ab^2 = 0$

㉡에서 $b = \frac{1}{2a}$이므로

$2at^2 - 3t + \frac{1}{2a} = 0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1 + x_2 = \frac{3}{2a}$

조건 (나)와 ①, ②에 의하여

$\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3} = -\frac{7}{3}$

$$\begin{aligned} f(x_1)+f(x_2)+f(x_3) &= \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} - 2x_3 \\ &= \frac{1}{2}(x_1+x_2) - 2x_3 \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{3}{2a} - 2\times\left(-\frac{1}{2a}\right) \\ &= \frac{3}{4a} + \frac{1}{a} = \frac{7}{4a} = -7 \end{aligned}$$

$a = -\frac{1}{4}$

㉡에서 $b = \frac{1}{2a}$ 이므로 $b = -2$

$f(x) = -\frac{1}{4}(x+2)^2$

따라서 $f(4) \times f(6) = 144$