정답 및 해설

수학 영역

정답

1	⑤	2	④	3	①	4	③	5	④
6	④	7	②	8	④	9	②	10	②
11	①	12	②	13	⑤	14	③	15	①
16	①	17	③	18	②	19	③	20	④
21	③	22	2	23	12	24	385	25	20
26	36	27	271	28	40	29	11	30	28

해설

1. [출제의도] 지수 계산하기

$2^{-1}\times 8^{\frac{5}{3}}=2^{-1}\times(2^3)^{\frac{5}{3}}=2^{-1}\times 2^5=2^4=16$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+1)^2}{x^2+4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+4x+1}{x^2+4x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}=4$$

3. [출제의도] 등차수열 계산하기

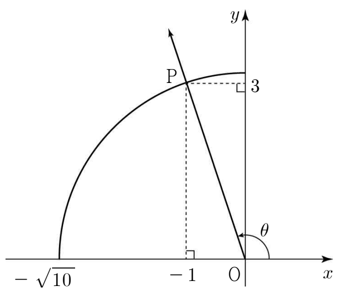
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_7-a_5=(a_1+6d)-(a_1+4d)=2d=6$, $d=3$

$a_4=a_1+3d=a_1+9=10$

따라서 $a_1=1$

4. [출제의도] 삼각함수 이해하기



$\sin\theta=-3\cos\theta$ 에서 $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-3$, $\tan\theta=-3$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이므로 중심이 원점이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$ 인 원과 각 θ 를 나타내는 동경이 만나는 점을 P 라 하면 $\mathrm{P}(-1, 3)$

따라서 $\cos\theta=-\frac{1}{\sqrt{10}}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x\to -1-}f(x)=-1$, $\lim_{x\to -1+}f(x)=-1$ 이므로

$\lim_{x\to -1}f(x)=-1$

$\lim_{x\to 1-}f(x)=2$

따라서 $\lim_{x\to -1}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)=-1+2=1$

6. [출제의도] 로그 계산하기

$\log_2 5\times\log_5 3+\log_2\frac{16}{3}$

$=\log_2 5\times\frac{\log_2 3}{\log_2 5}+\log_2\frac{16}{3}=\log_2 3+\log_2\frac{16}{3}$

$=\log_2\left(3\times\frac{16}{3}\right)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

7. [출제의도] 일반각과 호도법 이해하기

부채꼴의 반지름의 길이를 r,
중심각의 크기를 θ 라 하자.

$\theta=\frac{\pi}{4}$ 이므로 부채꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}r^2\theta=\frac{1}{2}r^2\times\frac{\pi}{4}=18\pi$, $r=12$

따라서 부채꼴의 호의 길이는

$r\theta=12\times\frac{\pi}{4}=3\pi$

8. [출제의도] 삼각함수가 포함된 방정식 이해하기

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 이므로

$\cos^2 x-1=2\sin x$ 에서

$(1-\sin^2 x)-1=2\sin x$

$\sin^2 x+2\sin x=0$, $\sin x(\sin x+2)=0$

$-1\le\sin x\le 1$ 이므로 $\sin x=0$

$0<x\le 2\pi$ 에서 $x=\pi$ 또는 $x=2\pi$

따라서 모든 해의 합은 3π

9. [출제의도] 지수함수와 로그함수 이해하기

함수 $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+m)$ 은

x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소하므로

$x=-3$ 에서 최댓값 -2 를 갖는다.

$\log_{\frac{1}{3}}(-3+m)=-2$, $m-3=9$

따라서 $m=12$

10. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a,
공비를 r $(r>0)$ 이라 하자.

(i) $r=1$ 인 경우

$a_2=ar=a=2$

$S_6=6a=12$

$S_3=3a=6$

$S_6\neq 9S_3$

(ii) $r\neq 1$ 인 경우

$S_6=9S_3$, $\frac{a(r^6-1)}{r-1}=9\times\frac{a(r^3-1)}{r-1}$

$(r^3+1)(r^3-1)=9(r^3-1)$

$r^3+1=9$, $r^3=8$, $r=2$

따라서 $a_4=a_2\times r^2=2\times 2^2=8$

11. [출제의도] 지수함수와 로그함수 이해하기

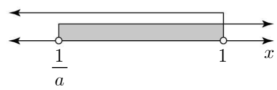
$4^x-2^x-2<0$ 에서 $2^x=t$ $(t>0)$ 이라 하면

$t^2-t-2<0$, $(t+1)(t-2)<0$

$-1<t<2$ 에서 $0<t<2$

$0<2^x<2$, $x<1$

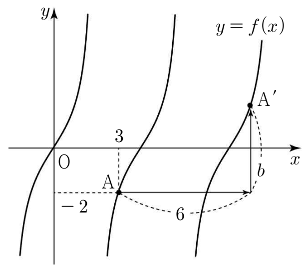
$\log_a x+1>0$ 에서 $a>1$ 이므로 $x>\frac{1}{a}$



연립부등식을 만족시키는 모든 x 의 값의 범위가 $\frac{1}{5}<x<b$ 이므로 $a=5$, $b=1$

따라서 $a+b=5+1=6$

12. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기



점 $\mathrm{A}(3, -2)$ 는 함수 $f(x)=a\tan\frac{\pi}{4}x$ 의 그래프 위의 점이므로

$f(3)=a\tan\frac{3}{4}\pi=-a=-2$, $a=2$

점 $\mathrm{A}(3, -2)$ 를 x 축의 방향으로 6 만큼, y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동한

점 $\mathrm{A}'(9, -2+b)$ 는 함수 $f(x)=2\tan\frac{\pi}{4}x$ 의 그래프 위의 점이므로

$f(9)=2\tan\frac{9}{4}\pi=2\tan\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$=2\tan\frac{\pi}{4}=2\times 1=2=-2+b$, $b=4$

따라서 $a+b=2+4=6$

13. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a $(a<0)$,
공비를 r $(r\neq 0)$ 이라 하자.

$a_3a_5=8a_8$ 에서 $ar^2\times ar^4=8ar^7$

$a=8r<0$, $r<0$

모든 자연수 n 에 대하여

$a_n=8r\times r^{n-1}=8r^n$

$a_2=8r^2>0$, $a_3=8r^3<0$ 이므로

$a_1+|a_2|+|2a_3|=a_1+a_2-2a_3$

$=8r+8r^2-16r^3=0$

$2r^2-r-1=0$, $(2r+1)(r-1)=0$

$r=-\frac{1}{2}$ 또는 $r=1$

$r<0$ 이므로 $r=-\frac{1}{2}$

따라서 $a_2=8r^2=8\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=2$

14. [출제의도] 거듭제곱근 이해하기

$2\le n\le 10$ 인 자연수 n 에 대하여

$n^2+1>0$ 이므로

$$f(n)=\begin{cases} 1 & (n=3,\ 5,\ 7,\ 9) \\ 2 & (n=2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10) \end{cases}$$

$n^2-8n+12=(n-2)(n-6)$ 에서

$$g(n)=\begin{cases} 0 & (n=4) \\ 1 & (n=2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9) \\ 2 & (n=8,\ 10) \end{cases}$$

$f(n)=2g(n)$ 이므로 $f(n)=2$ 이고 $g(n)=1$
따라서 $n=2$ 또는 $n=6$ 이고 그 합은 8

15. [출제의도] 지수함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)=4^{x-a}-8\times 2^{x-a}$
$=2^{-2a}\times 2^{2x}-2^3\times 2^{-a}\times 2^x$
$=2^{-2a}\times (2^x)^2-2^{3-a}\times 2^x$
$2^x=t\ (t>0)$ 이라 하면
$g(t)=2^{-2a}\times t^2-2^{3-a}\times t$
$=2^{-2a}(t^2-2^{a+3}\times t)$
$=2^{-2a}(t-2^{a+2})^2-16$
$2^{a+2}=2^5,\ a+2=5,\ a=3$
$b=-16$
따라서 $a+b=3+(-16)=-13$

16. [출제의도] 상용로그 이해하기

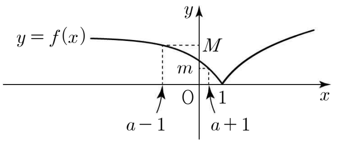
조건 (가)에서 $a<b<10a$
조건 (나)에서 $0<\log b<9-2a$ 이므로
$1\le a\le 4$ 이고 $1<b<10^{9-2a}$
(i) $a=1,\ 2,\ 3$ 인 경우
$10a<10^{9-2a}$ 이므로 $a<b<10a$
(b 의 개수)$=9a-1$
(ii) $a=4$ 인 경우
$4<b<40$ 이고 $1<b<10$ 이므로
$4<b<10$
(b 의 개수)$=5$
(i), (ii)에 의하여 조건을 만족시키는 두 자연수 $a,\ b$ 의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$ 의 개수는
$\sum_{k=1}^{3}(9k-1)+5=51+5=56$

17. [출제의도] $\sum$ 의 성질을 활용하여 문제 해결하기

$n\ge 2$ 인 자연수 n 에 대하여
$\sum_{k=1}^{n}a_{2k}-\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k}$
$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{2k-1}+n^2\right)-\left\{\sum_{k=1}^{n-1}a_{2k-1}+(n-1)^2\right\}$
$a_{2n}=a_{2n-1}+2n-1$
$n=6$ 일 때, $a_{12}=a_{11}+11$
$n=5$ 일 때, $a_{10}=a_9+9$
$a_{12}-a_{10}=a_{11}-a_9+2$
$5=a_{11}-16+2$
따라서 $a_{11}=19$

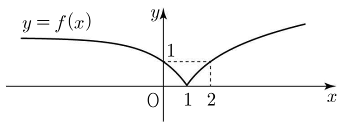
18. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

$a-1\le x\le a+1$ 에서 함수 $f(x)$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 하자.
(i) $a<0$ 인 경우



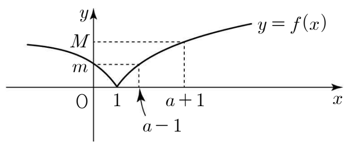
$a-1<a+1<1$ 이므로
$M=f(a-1)=-2^{a-1}+2$
$m=f(a+1)=-2^{a+1}+2$
$M-m=(-2^{a-1}+2)-(-2^{a+1}+2)$
$=\frac{3}{2}\times 2^a=1$
$a=\log_2\frac{2}{3}$

(ii) $0\le a\le 2$ 인 경우



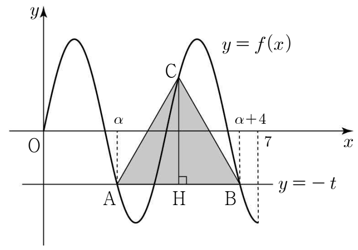
$a-1\le 1\le a+1$ 이므로
① 최댓값이 $f(a-1)$ 인 경우
$M=f(a-1)=-2^{a-1}+2$
$m=f(1)=\log_2 1=0$
$M-m=(-2^{a-1}+2)-0=1$
$a=1$
② 최댓값이 $f(a+1)$ 인 경우
$M=f(a+1)=\log_2(a+1)$
$m=f(1)=\log_2 1=0$
$M-m=\log_2(a+1)-0=1$
$a=1$
①, ②에 의하여 $a=1$

(iii) $a>2$ 인 경우



$1<a-1<a+1$ 이므로
$M=f(a+1)=\log_2(a+1)$
$m=f(a-1)=\log_2(a-1)$
$M-m=\log_2(a+1)-\log_2(a-1)=1$
$a=3$
(i) ~ (iii)에 의하여 모든 실수 a 의 값은
$\log_2\frac{2}{3}$, 1, 3 이고
그 합은 $\log_2\frac{2}{3}+1+3=\log_2\frac{32}{3}$

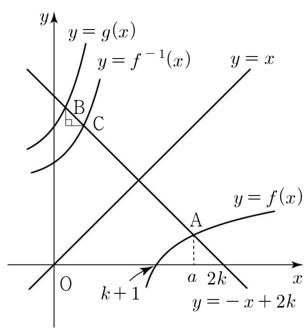
19. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기



함수 $f(x)=3\sin\frac{\pi}{2}x$ 의 주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}}=4$
곡선 $y=f(x)$ 와 직선 $y=-t$ 가 만나는 점의 x 좌표 중 가장 작은 값을 $\alpha\ (2<\alpha<3)$ 이라 할 때, 두 점 A, B를
$A(\alpha,\ -t)$, $B(\alpha+4,\ -t)$ 라 하자.
점 C의 x 좌표는
$\frac{\alpha+(\alpha+4)}{2}=\alpha+2$
점 C의 y 좌표는
$f(\alpha+2)=3\sin\left\{\frac{\pi}{2}\times(\alpha+2)\right\}$
$=3\sin\left(\frac{\pi}{2}\alpha+\pi\right)=-3\sin\frac{\pi}{2}\alpha$
$=-f(\alpha)=t$
이므로 점 $C(\alpha+2,\ t)$
삼각형 ABC는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이므로 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{CH}=f(\alpha+2)-(-t)=t-(-t)=2\sqrt{3}$
따라서 $t=\sqrt{3}$

20. [출제의도] 지수함수와 로그함수를 활용하여 문제 해결하기

함수 $f(x)$ 의 역함수 $f^{-1}(x)=2^x+k$ 의 그래프에 대하여 함수 $g(x)=2^{x+1}+k+1$ 의 그래프는 함수 $f^{-1}(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 그래프와 일치한다.
함수 $f^{-1}(x)$ 의 그래프와 직선 $y=-x+2k$ 가 만나는 점을 C라 하자.



점 B는 점 C를 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1만큼 평행이동한 점이므로
$\overline{BC}=\sqrt{2}$
$\overline{AB}=7\sqrt{2}$ 에서 $\overline{AC}=6\sqrt{2}$
점 C는 점 A를 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점과 일치하므로
점 $A(a,\ -a+2k)$ 라 하면 점 $C(-a+2k,\ a)$
$a>k+1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{\{(-a+2k)-a\}^2+\{a-(-a+2k)\}^2}$

$\quad = 2(a-k)\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

$a-k=3$, $a=k+3$

점 $\mathrm{A}(a,\ -a+2k)$는 함수 $f(x)$의 그래프 위의 점이므로

$-a+2k=\log_2(a-k)$

$k-3=\log_2 3$

따라서 $k=\log_2 24$

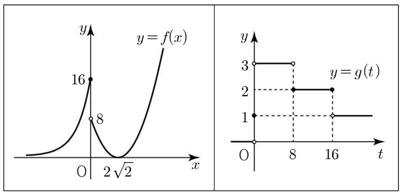
21. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 추론하기

$\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 2$를 만족시키는 경우는

$2^a=16$ 또는 $b^2=16$

(i) $2^a=16$, $b^2=8$인 경우

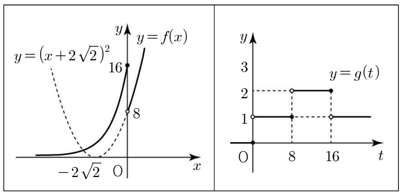
① $a=4$, $b=-2\sqrt{2}$인 경우



$k=8$, $\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 2\times 1 = 2$

이므로 조건을 만족시킨다.

② $a=4$, $b=2\sqrt{2}$인 경우

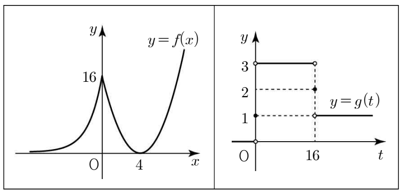


$k=8$, $\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 2\times 1 = 2$

이므로 조건을 만족시킨다.

(ii) $2^a=16$, $b^2=16$인 경우

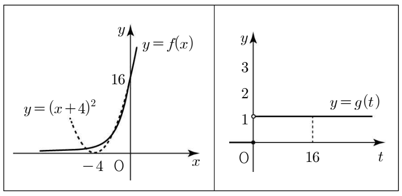
① $a=4$, $b=-4$인 경우



$\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 3\times 1 = 3 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a=4$, $b=4$인 경우

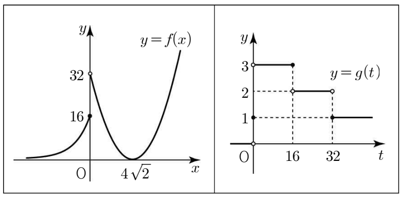


$\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 1\times 1 = 1 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $2^a=16$, $b^2=32$인 경우

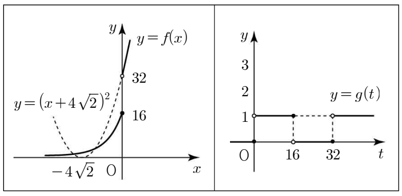
① $a=4$, $b=-4\sqrt{2}$인 경우



$\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 3\times 2 = 6 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a=4$, $b=4\sqrt{2}$인 경우

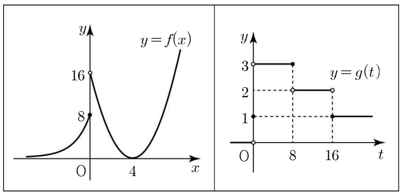


$\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 1\times 0 = 0 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iv) $2^a=8$, $b^2=16$인 경우

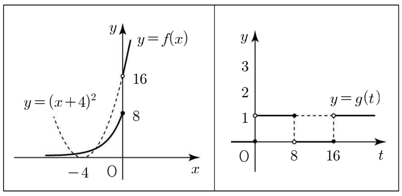
① $a=3$, $b=-4$인 경우



$k=8$, $\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 2\times 1 = 2$

이므로 조건을 만족시킨다.

② $a=3$, $b=4$인 경우

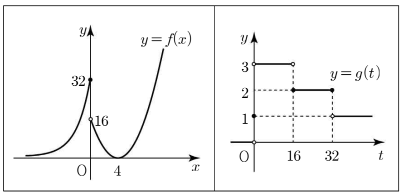


$\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 0\times 1 = 0 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(v) $2^a=32$, $b^2=16$인 경우

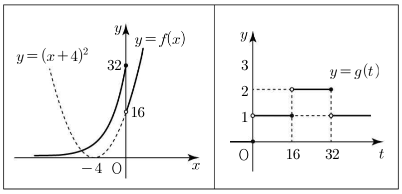
① $a=5$, $b=-4$인 경우



$\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 3\times 2 = 6 \neq 2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다.

② $a=5$, $b=4$인 경우



$k=16$, $\lim\limits_{t\to 16-} g(t) \times \lim\limits_{t\to 16+} g(t) = 1\times 2 = 2$

이므로 조건을 만족시킨다.

(i)~(v)에 의하여 두 실수 a, b의 순서쌍은

$(4,\ -2\sqrt{2})$, $(4,\ 2\sqrt{2})$, $(3,\ -4)$, $(5,\ 4)$

이고 $a+b$의 값은

$4-2\sqrt{2}$, $4+2\sqrt{2}$, -1, 9이므로

최댓값과 최솟값의 곱은 $9\times(-1)=-9$

22. [출제의도] 지수가 포함된 방정식 계산하기

$3^{2x-1}=27$, $3^{2x-1}=3^3$, $2x-1=3$

따라서 $x=2$

23. [출제의도] 등차수열 이해하기

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면

$a_3+a_5+a_7$

$\quad =(a+2d)+(a+4d)+(a+6d)$

$\quad =3a+12d=18$

이므로 $a+4d=6$

따라서

$a_4+a_6=(a+3d)+(a+5d)=2a+8d=12$

[다른 풀이]

세 항 a_3, a_5, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $a_3+a_5+a_7=3a_5=18$, $a_5=6$

a_5는 두 항 a_4, a_6의 등차중항이므로

$a_5=\dfrac{a_4+a_6}{2}$

따라서 $a_4+a_6=2a_5=12$

24. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기

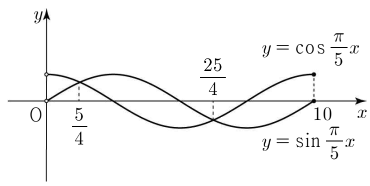
$\sum\limits_{k=1}^{10} a_k = (1^2-1)+(2^2+1)+\ \cdots\ +(10^2+1)$

$\quad = 1^2+2^2+3^2+\ \cdots\ +10^2$

$\quad = \sum\limits_{k=1}^{10} k^2 = \dfrac{10\times 11\times 21}{6} = 385$

따라서 $\sum\limits_{k=1}^{10} a_k = 385$

25. [출제의도] 삼각함수가 포함된 부등식 이해하기



$0 < x \le 10$에서 두 곡선

$y=\cos\dfrac{\pi}{5}x$, $y=\sin\dfrac{\pi}{5}x$가 만나는 점의

x좌표가 $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{25}{4}$이므로

부등식 $\cos\frac{\pi}{5}x < \sin\frac{\pi}{5}x$ 를 만족시키는

x 의 값의 범위는 $\frac{5}{4} < x < \frac{25}{4}$

따라서 모든 자연수 x 의 값은

2, 3, 4, 5, 6 이고 그 합은 20

26. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 추론하기

$10 < a < 100$ 인 실수 a 에 대하여

$1 < \log a < 2$

$\log_a 10 = \frac{1}{\log a}$ 이므로 $\frac{1}{2} < \log_a 10 < 1$

$\log 10a = \log 10 + \log a = 1 + \log a$ 이므로

$2 < \log 10a < 3$ … ㉠

$\log\frac{10}{a} = \log 10 - \log a = 1 - \log a$ 이므로

$-1 < \log\frac{10}{a} < 0$ … ㉡

$\log_a 10a = \log_a 10 + \log_a a = \log_a 10 + 1$ 이므로

$\frac{3}{2} < \log_a 10a < 2$ … ㉢

$\log_a \frac{a}{10} = \log_a a - \log_a 10 = 1 - \log_a 10$ 이므로

$0 < \log_a\frac{a}{10} < \frac{1}{2}$ … ㉣

㉠ ~ ㉣ 에 의하여

$\log\frac{10}{a} < \log_a\frac{a}{10} < \log_a 10a < \log 10a$ 이므로

$p = \log\frac{10}{a}$, $q = \log_a\frac{a}{10}$, $r = \log_a 10a$,

$s = \log 10a$

$\overline{\mathrm{PS}} = s - p = \log 10a - \log\frac{10}{a}$

$= (1 + \log a) - (1 - \log a) = 2\log a$

$= \frac{10}{3}$

$\log a = \frac{5}{3}$

$\overline{\mathrm{QR}} = r - q = \log_a 10a - \log_a\frac{a}{10}$

$= (\log_a 10 + 1) - (1 - \log_a 10)$

$= 2\log_a 10 = \frac{2}{\log a} = \frac{6}{5}$

따라서 $30 \times \overline{\mathrm{QR}} = 30 \times \frac{6}{5} = 36$

27. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기

$\angle\mathrm{ABC} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ 라 하면

$\cos\theta = \frac{1}{4}$ 이므로 $\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}$

삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 $\frac{32}{3}\pi$ 이므로

이 외접원의 반지름의 길이를 R_1 이라 하면

$R_1 = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin\theta} = 2R_1$ 에서 $\overline{\mathrm{AC}} = 2\sqrt{10}$

평행사변형 ABCD 의 둘레의 길이가 20 이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = a\ (0 < a < 5)$ 라 하면

$\overline{\mathrm{AD}} = \overline{\mathrm{BC}} = 10 - a$

삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$40 = a^2 + (10-a)^2 - 2a(10-a)\cos\theta$

$= a^2 + (10-a)^2 - 2a(10-a) \times \frac{1}{4}$

$a^2 - 10a + 24 = 0$, $(a-4)(a-6) = 0$

$a = 4$ 또는 $a = 6$ 에서 $0 < a < 5$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = 4$, $\overline{\mathrm{AD}} = 6$

$\angle\mathrm{BAD} = \pi - \theta$ 이므로

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta = -\frac{1}{4}$

삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{BD}}^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \cos(\pi - \theta)$

$= 6^2 + 4^2 - 2 \times 6 \times 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = 64$

$\overline{\mathrm{BD}} = 8$

삼각형 ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 R_2 라 하면 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{\mathrm{BD}}}{\sin(\pi - \theta)} = 2R_2$ 에서 $R_2 = \frac{16\sqrt{15}}{15}$

삼각형 ABD 의 외접원의 넓이는 $\frac{256}{15}\pi$

$p = 15$, $q = 256$

따라서 $p + q = 15 + 256 = 271$

28. [출제의도] 함수의 극한에 대한 성질을 활용하여 문제 해결하기

조건 (가)에서

$\lim_{x\to 0-}\frac{\sqrt{x^2} - f(x)}{x + f(x)} = \lim_{x\to 0-}\frac{-\{x + f(x)\}}{x + f(x)} = -1$

이므로

$\lim_{x\to 0+}\frac{\sqrt{x^2} - f(x)}{x + f(x)} = \lim_{x\to 0+}\frac{x - f(x)}{x + f(x)} = 2$

세 상수 p, q, r 에 대하여

$f(x) = px^2 + qx + r\ (p > 0)$ 이라 하면

$\lim_{x\to 0+}\frac{-px^2 - (q-1)x - r}{px^2 + (q+1)x + r} = 2$ 이므로

$r = 0$, $q \neq -1$

$\frac{-(q-1)}{q+1} = 2$, $q = -\frac{1}{3}$

$f(x) = px^2 - \frac{1}{3}x = x\left(px - \frac{1}{3}\right)$

조건 (나)에서

$\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x^2} - 3\right) \neq 0$ 이면

$\lim_{x\to a}\frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2} - 3}$ 의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to a}\left(\sqrt{x^2} - 3\right) = \sqrt{a^2} - 3 = 0$, $|a| = 3$

$a = -3$ 또는 $a = 3$

(i) $\lim_{x\to a}\frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2} - 3}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 a 의 값이 -3 인 경우

$x = 3$ 에서 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to 3}\left(\sqrt{x^2} - 3\right) = 0$ 이므로

$\lim_{x\to 3} f(x-4)f(x+1) = f(-1) \times f(4) = 0$

$-\left(-p - \frac{1}{3}\right) \times 4\left(4p - \frac{1}{3}\right) = 0$

$\left(p + \frac{1}{3}\right)\left(4p - \frac{1}{3}\right) = 0$

$p = -\frac{1}{3}$ 또는 $p = \frac{1}{12}$

(ii) $\lim_{x\to a}\frac{f(x-4)f(x+1)}{\sqrt{x^2} - 3}$ 의 값이 존재하지 않는 실수 a 의 값이 3 인 경우

$x = -3$ 에서 극한값이 존재하고

$\lim_{x\to -3}\left(\sqrt{x^2} - 3\right) = 0$ 이므로

$\lim_{x\to -3} f(x-4)f(x+1) = f(-7) \times f(-2)$

$= 0$

$-7\left(-7p - \frac{1}{3}\right) \times (-2)\left(-2p - \frac{1}{3}\right) = 0$

$\left(7p + \frac{1}{3}\right)\left(2p + \frac{1}{3}\right) = 0$

$p = -\frac{1}{21}$ 또는 $p = -\frac{1}{6}$

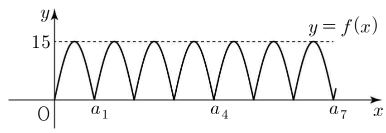
$p > 0$ 이므로 (i), (ii) 에 의하여 $p = \frac{1}{12}$

$f(x) = \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{3}x = \frac{1}{12}x(x-4)$

따라서 $f(24) = \frac{1}{12} \times 24 \times 20 = 40$

29. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제 해결하기

(i) $q = 0$ 인 경우



함수 $f(x)$ 의 주기는 π

$a_1 = \pi$, $a_4 = 4\pi$, $a_7 = 7\pi$ 이므로

세 항 a_1, a_4, a_7 은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$0 \le f(x) = |p\sin x| \le p$

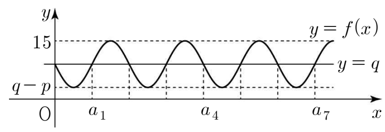
함수 $f(x)$ 의 최댓값이 15 이므로

$p = 15$

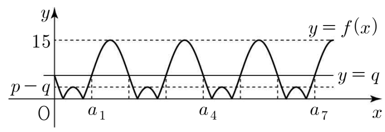
순서쌍 (p, q) 는 $(15, 0)$

(ii) $q > 0$ 인 경우

① $q > p - q\ \left(q > \frac{p}{2}\right)$ 인 경우



[$q \ge p$ 인 경우]



$\left[\frac{p}{2} < q < p \text{ 인 경우}\right]$

함수 $f(x)$ 의 주기는 2π

$a_1 = \pi$, $a_4 = 4\pi$, $a_7 = 7\pi$ 이므로

세 항 a_1, a_4, a_7 은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

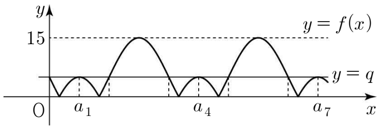
$0 \le f(x) = |p\sin x - q| \le p + q$

함수 $f(x)$ 의 최댓값이 15 이므로

$p + q = 15$

순서쌍 (p, q)는
$(1, 14)$, $(2, 13)$, $(3, 12)$, $(4, 11)$,
$(5, 10)$, $(6, 9)$, $(7, 8)$, $(8, 7)$, $(9, 6)$

② $q = p - q\left(q = \frac{p}{2}\right)$인 경우



함수 $f(x)$의 주기는 2π

$a_1 = \frac{\pi}{2}$, $a_4 = \frac{5}{2}\pi$, $a_7 = \frac{9}{2}\pi$이므로

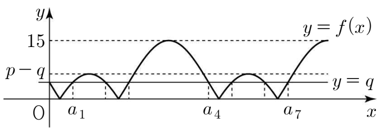
세 항 a_1, a_4, a_7은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

$0 \le f(x) = |p\sin x - q| \le p + q$

함수 $f(x)$의 최댓값이 15이므로 $p + q = 15$

순서쌍 (p, q)는 $(10, 5)$

③ $q < p - q\left(q < \frac{p}{2}\right)$인 경우



함수 $f(x)$의 주기는 2π

$a_4 - a_1 > \pi$이고 $a_7 - a_4 = \pi$이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 두 수 p, q의 모든 순서쌍 (p, q)의 개수는 11

30. [출제의도] 귀납적으로 정의된 수열 추론하기

$d \ge 0$이면 $n \ge 5$에 대하여 $a_n \ge 16$이므로
조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$d < 0$ ⋯ ㉠

$a_2 + a_3 = 0$에서 $a_2 = -a_3$

(Ⅰ) $a_2 = a_3 = 0$인 경우

$a_3 = a_2 + d$에서 $d = 0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(Ⅱ) $a_2 < 0$, $a_3 > 0$인 경우

$a_3 = ra_2 = -a_2$이므로 $r = -1$

① $a_1 = 0$인 경우

$a_2 = a_1 + d = d < 0$

$a_3 = -d > 0$

$a_4 = a_3 + d = 0$

$a_5 = d < 0$, $a_5 \ne 16$

② $a_1 > 0$인 경우

$a_2 = a_1 + d < 0$

$a_3 = -a_2 = -a_1 - d > 0$

$a_4 = a_3 + d = -a_1 - d + d = -a_1 < 0$

$a_5 = ra_4 = a_1$

모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+4} = a_n \ne 0$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

③ $a_1 < 0$인 경우

$a_2 = -a_1 > 0$

①~③에 의하여 조건을 만족시키지 않는다.

(Ⅲ) $a_2 > 0$, $a_3 < 0$인 경우

① $r = 0$인 경우

$a_4 = ra_3 = 0$, $a_5 = d < 0$이므로 $a_5 \ne 16$

② $r > 0$인 경우

$n \ge 3$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n < 0$이고 $a_5 \ne 16$

①, ②에 의하여 $r < 0$ ⋯ ㉡

(Ⅰ)~(Ⅲ)에 의하여 $a_2 > 0$, $a_3 < 0$, $r < 0$

$a_3 = a_2 + d = -a_2$

$a_2 = -\frac{d}{2}$, $a_3 = \frac{d}{2}$, $a_4 = \frac{rd}{2} > 0$,

$a_5 = \frac{rd}{2} + d = 16$ ⋯ ㉢

조건 (나)에서 $a_k = 0$이면

$a_{k+1} = d < 0$, $a_{k+2} = rd > 0$, $a_{k+3} = rd + d$,
⋯

$a_{k+2-r} = rd - rd = 0$이므로

$2 - r$은 12의 약수이다.

㉡에 의하여 $r = -1$, -2, -4, -10

(ⅰ) $r = -1$인 경우

㉢에 의하여 $d = 32$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $r = -2$인 경우

㉢에 의하여 $a_5 = 0$이므로

조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $r = -4$인 경우

㉢에 의하여 $d = -16$이므로

$a_2 = 8$이고

$a_1 \ge 0$이면 $a_1 = 24$

$a_1 < 0$이면 $a_1 = -2$

(ⅳ) $r = -10$인 경우

㉢에 의하여 $d = -4$이므로

$a_2 = 2$이고

$a_1 \ge 0$이면 $a_1 = 6$

$a_1 < 0$이면 $a_1 = -\frac{1}{5}$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 a_1의 값은 -2, 6, 24
이고 그 합은 28