2025학년도 대학수학능력시험 9월 모의평가
수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ②	02. ⑤	03. ④	04. ②	05. ②
06. ②	07. ③	08. ①	09. ⑤	10. ①
11. ①	12. ②	13. ④	14. ⑤	15. ①
16. 7	17. 5	18. 29	19. 4	
20. 15	21. 31	22. 8		

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$32^{\frac{1}{4}}\times 4^{-\frac{1}{8}}=(2^5)^{\frac{1}{4}}\times(2^2)^{-\frac{1}{8}}$$
$$=2^{\frac{5}{4}}\times 2^{-\frac{2}{8}}=2^{\frac{5}{4}-\frac{1}{4}}=2$$

정답 ②

2. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=x^3+3x^2-5$이므로

$f'(x)=3x^2+6x$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$
$$=3\times 1^2+6\times 1=9$$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 주어진 조건에서 등비수열의 첫째항과 공비를 찾아 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하면

$a_2a_3=ar\times ar^2=a^2r^3=2$ ……㉠

$a_4=ar^3=4$ ……㉡

㉠을 ㉡으로 나누면

$a=\frac{1}{2}$

이것을 ㉡에 대입하면

$\frac{1}{2}r^3=4$에서 $r^3=8$

r은 실수이므로

$r=2$

따라서

$a_6=ar^5=\frac{1}{2}\times 2^5=2^4=16$

정답 ④

4. 출제의도 : 함수의 그래프를 이해하고 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\lim_{x\to 0-}f(x)=-2$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=1$ 이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 1+}f(x)$

$=-2+1$

$=-1$

정답 ②

5. **출제의도** : 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=(x+1)(x^2+x-5)$에서

$f'(x)=(x^2+x-5)+(x+1)(2x+1)$

따라서

$$\begin{aligned}f'(2)&=(2^2+2-5)+(2+1)(2\times2+1)\\&=1+15\\&=16\end{aligned}$$

정답 ②

6. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\cos(\pi+\theta)=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ 에서

$\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ 이므로

$-\cos\theta=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, 즉 $\cos\theta=-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 에서 $\sin\theta>0$ 이므로

$$\begin{aligned}\sin\theta&=\sqrt{1-\cos^2\theta}\\&=\sqrt{1-\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

따라서

$$\sin\theta+\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}+\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

정답 ②

7. **출제의도** : 함수가 연속일 조건을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-a)^2 & (x<4)\\ 2x-4 & (x\geq 4)\end{cases}$

가 $x=4$에서 연속이면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

함수 $f(x)$가 $x=4$에서 연속이면

$\lim\limits_{x\to4-}f(x)=\lim\limits_{x\to4+}f(x)=f(4)$

이다. 이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4-}f(x)&=\lim_{x\to4-}(x-a)^2\\&=(4-a)^2\\&=a^2-8a+16\end{aligned}$$

$\lim\limits_{x\to4+}f(x)=\lim\limits_{x\to4+}(2x-4)=4$

$f(4)=4$

이므로

$a^2-8a+16=4$

$a^2-8a+12=0$

$(a-2)(a-6)=0$

$a=2$ 또는 $a=6$

따라서 조건을 만족시키는 모든 상수 a의 값의 곱은

$2\times6=12$

정답 ③

8. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 상수를 구할 수 있는가?

풀이 :

두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 합이 4이므로

$\log_2 a + \log_a 8 = 4$에서

$\log_2 a + 3\log_a 2 = 4$

$\log_2 a + \dfrac{3}{\log_2 a} = 4$ ······ ㉠

$\log_2 a = X$라 하면 $a > 2$이므로 $X > 1$

㉠에서

$X + \dfrac{3}{X} = 4$, $X^2 - 4X + 3 = 0$

$(X-1)(X-3) = 0$

$X > 1$이므로 $X = 3$

즉, $\log_2 a = 3$에서 $a = 2^3 = 8$

한편, 두 수 $\log_2 a$, $\log_a 8$의 곱이 k이므로

$k = \log_2 a \times \log_a 8 = \log_2 a \times 3\log_a 2$

$= \log_2 a \times \dfrac{3}{\log_2 a} = 3$

따라서 $a + k = 8 + 3 = 11$

정답 ①

9. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x) = x^2 + x$이므로

$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$

$= 5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$

$= 4\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$

$= 4\int_0^1 (x^2 + x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$

$= \int_0^1 (4x^2 + 4x)\,dx - \int_0^1 5x\,dx$

$= \int_0^1 (4x^2 - x)\,dx$

$= \left[\dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1$

$= \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$

[다른 풀이]

$f(x) = x^2 + x$이므로

$5\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 (5x + f(x))\,dx$

$= 5\left[\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2\right]_0^1 - \left[\dfrac{1}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^1$

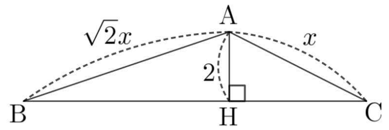
$= 5 \times \dfrac{5}{6} - \dfrac{10}{3} = \dfrac{5}{6}$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 사인법칙을 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{2} : 1$이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = x$라 하면 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}x$



삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 이 외접원의 넓이가 50π이므로 $\pi R^2 = 50\pi$에서 $R = 5\sqrt{2}$

직각삼각형 AHC에서

$\sin(\angle \mathrm{ACH}) = \dfrac{2}{x}$, 즉 $\sin C = \dfrac{2}{x}$

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C} = 2R$, 즉 $\overline{\mathrm{AB}} = 2R\sin C$

$\sqrt{2}x = 2\times 5\sqrt{2}\times \dfrac{2}{x}$, $x^2 = 20$, $x = 2\sqrt{5}$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}x = 2\sqrt{10}$ 이므로 직각삼각형 ABH에서

$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2}$

$= \sqrt{(2\sqrt{10})^2 - 2^2} = 6$

정답 ①

11. **출제의도** : 위치, 속도, 가속도 사이의 관계 및 미분을 이용하여 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

$x_1 = t^2 + t - 6$,

$x_2 = -t^3 + 7t^2$

이므로

$x_1 = x_2$에서

$t^2 + t - 6 = -t^3 + 7t^2$

$t^3 - 6t^2 + t - 6 = 0$

$t^2(t-6) + t - 6 = 0$

$(t-6)(t^2+1) = 0$

$t \geq 0$이므로

$t = 6$

즉, 두 점 P, Q의 위치가 같아지는 순간의 시각은 $t = 6$이다.

한편, 두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1 = \dfrac{dx_1}{dt} = 2t + 1$,

$v_2 = \dfrac{dx_2}{dt} = -3t^2 + 14t$

두 점 P, Q의 시각 t에서의 가속도를 각각 a_1, a_2라 하면

$a_1 = \dfrac{dv_1}{dt} = 2$,

$a_2 = \dfrac{dv_2}{dt} = -6t + 14$

시각 $t = 6$에서의 두 점 P, Q의 가속도가 각각 p, q이므로

$p = 2$,

$q = -6\times 6 + 14 = -22$

따라서

$p - q = 2 - (-22) = 24$

정답 ①

12. **출제의도** : 등차수열의 일반항을 이용하여 새롭게 정의된 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$b_1 = \sum_{k=1}^{1}(-1)^{k+1}a_k = a_1$

$b_2 = \sum_{k=1}^{2}(-1)^{k+1}a_k = a_1 - a_2$

이때 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$b_2 = -2$이므로

$a_1 - a_2 = -d = -2$

따라서 $d = 2$

또한

$b_3 = \sum_{k=1}^{3}(-1)^{k+1}a_k$

$=a_1-a_2+a_3$

$=-d+a_3$

$=a_3-2$

$b_7=\sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}a_k$

$\quad=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7$

$\quad=-3d+a_7$

$\quad=a_7-6$

이므로 $b_3+b_7=0$ 에서

$(a_3-2)+(a_7-6)$

$=a_3+a_7-8$

$=(a_1+2\times2)+(a_1+6\times2)-8$

$=(a_1+4)+(a_1+12)-8$

$=2a_1+8=0$

따라서 $a_1=-4$

즉 $a_n=-4+(n-1)\times2=2n-6$이므로

$b_1=a_1=-4$

$b_2=a_1-a_2=-2$

$b_3=a_1-a_2+a_3=-2$

$b_4=a_1-a_2+a_3-a_4=-4$

$b_5=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0$

$b_6=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6=-6$

$b_7=a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6+a_7=2$

$b_8=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_7-a_8=-8$

$b_9=a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots+a_7-a_8+a_9=4$

따라서

$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_9$

$=-4+(-2)+(-2)+(-4)+0+(-6)$
$\qquad+2+(-8)+4$

$=-20$

정답 ②

[다른풀이]

$b_{2n}=(a_1-a_2)+(a_3-a_4)+\cdots+(a_{2n-1}-a_{2n})$

$\quad=-dn=-2n$

$b_{2n-1}=a_1+(a_3-a_2)+(a_5-a_4)+\cdots$
$\qquad+(a_{2n-1}-a_{2n-2})$

$\quad=a_1+(n-1)d=-4+2(n-1)=2n-6$

따라서

$\sum_{n=1}^{9}b_n=\sum_{n=1}^{5}b_{2n-1}+\sum_{n=1}^{4}b_{2n}$

$\quad=\sum_{n=1}^{5}(2n-6)+\sum_{n=1}^{4}(-2n)$

$\quad=2\times\frac{5\times6}{2}-6\times5-2\times\frac{4\times5}{2}$

$\quad=30-30-20=-20$

13. **출제의도** : 정적분을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $y=f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는 y축에 의하여 이등분된다.

이때 $A=2B$이므로

$\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=0$

이어야 한다. 즉,

$\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2+6x\right]_0^k=0$

$-\frac{1}{3}k^3+k^2+6k=0$

$-\frac{1}{3}k(k+3)(k-6)=0$

$k>4$이므로 $k=6$

정답 ④

14. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그래프를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :

두 점 A_n, B_n의 좌표를 각각

$\mathrm{A}_n(\mathrm{a}_n, 2^{a_n})$, $\mathrm{B}_n(\mathrm{b}_n, 2^{b_n})$ $(a_n < b_n)$

이라 하면 조건 (가)에 의하여

$$\frac{2^{b_n}-2^{a_n}}{b_n-a_n}=3 \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (나)에 의하여

$$(b_n-a_n)^2+(2^{b_n}-2^{a_n})^2=10n^2 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 $2^{b_n}-2^{a_n}=3(b_n-a_n)$이므로 이것을 ㉡에 대입하여 정리하면

$(b_n-a_n)^2=n^2$

$a_n<b_n$이므로 $b_n-a_n=n$, 즉 $a_n=b_n-n$

이것을 ㉠에 대입하여 정리하면

$2^{b_n}-2^{b_n-n}=3n$

이므로

$$2^{b_n}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=3n$$

$$2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

한편, 곡선 $y=2^x$과 곡선 $y=\log_2 x$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 x_n은 점 B_n의 y좌표와 같다.

따라서

$$x_n=2^{b_n}=3n\times\frac{2^n}{2^n-1}$$

이므로

$$x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

정답 ⑤

15. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 다항함수를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)의 양변을 x에 대하여 미분하면

$xf(x)+xg(x)=12x^3+24x^2-6x$

$f(x)+g(x)=12x^2+24x-6 \quad \cdots\cdots ㉠$

이때 조건 (나)에서 $f(x)=xg'(x)$이므로 ㉠에 대입하면

$xg'(x)+g(x)=12x^2+24x-6$

$\{xg(x)\}'=12x^2+24x-6$

$$xg(x)=\int(12x^2+24x-6)dx$$

$$=4x^3+12x^2-6x+C$$

(단, C는 적분상수)

이때 $g(x)$는 다항함수이므로 $C=0$

즉 $xg(x)=4x^3+12x^2-6x$이므로

$g(x)=4x^2+12x-6$

따라서

$$\int_0^3 g(x)dx$$

$$=\int_0^3(4x^2+12x-6)dx$$

$$=\left[\frac{4}{3}x^3+6x^2-6x\right]_0^3$$

$=36+54-18$

$=72$

정답 ①

16. 출제의도 : 로그를 포함하는 방정식의 근을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\log_3(x+2)-\log_{\frac{1}{3}}(x-4)$

$=\log_3(x+2)-\log_{3^{-1}}(x-4)$

$=\log_3(x+2)+\log_3(x-4)$

$=\log_3(x+2)(x-4)$

이므로

$\log_3(x+2)(x-4)=3$

$(x+2)(x-4)=3^3$

$x^2-2x-35=0$

$(x-7)(x+5)=0$

진수 조건에 의해서 $x>4$

따라서 $x=7$

정답 7

17. 출제의도 : 함수의 부정적분과 적분상수를 구하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f'(x)=6x^2+2x+1$이므로 $f'(x)$의 한 부정적분은

$\int(6x^2+2x+1)dx=2x^3+x^2+x+C$

(단, C는 적분상수)

이때 $f(0)=1$이므로 $C=1$에서

$f(x)=2x^3+x^2+x+1$

따라서 $f(1)=5$

정답 5

18. 출제의도 : $\sum$의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=36$에서

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+10a_{10}=36$ ……㉠

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$에서

$a_2+2a_3+3a_4+\cdots+9a_{10}=7$ ……㉡

㉠ − ㉡을 하면

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}=\sum_{k=1}^{10}a_k$

$=36-7=29$

정답 29

[다른 풀이]

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=7$에서

$\sum_{k=1}^{9}ka_{k+1}=\sum_{k=1}^{9}\{(k+1)a_{k+1}-a_{k+1}\}$

$=\sum_{k=1}^{9}(k+1)a_{k+1}-\sum_{k=1}^{9}a_{k+1}$

$=\sum_{k=2}^{10}ka_k-\sum_{k=2}^{10}a_k=7$

즉, $\sum_{k=2}^{10}ka_k=\sum_{k=2}^{10}a_k+7$

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=36$에서

$\sum_{k=1}^{10}ka_k=a_1+\sum_{k=2}^{10}ka_k$

$=a_1+\sum_{k=2}^{10}a_k+7$

$=\sum_{k=1}^{10}a_k+7=36$

따라서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=36-7=29$

19. **출제의도** : 미분을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)=x^3+ax^2-9x+b$가 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2ax-9$

이므로

$f'(1)=3+2a-9=0$

에서

$a=3$

한편, $f'(x)=0$에서

$3x^2+6x-9=0$

$3(x+3)(x-1)=0$

$x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-3$에서 극대이고, 극댓값이 28이다.

$$f(-3)=(-3)^3+3\times(-3)^2-9\times(-3)+b$$
$$=27+b$$

이므로

$27+b=28$

에서

$b=1$

따라서

$a+b=3+1=4$

정답 4

20. **출제의도** : 삼각함수의 그래프를 이용하여 방정식을 만족시키는 실수의 값의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

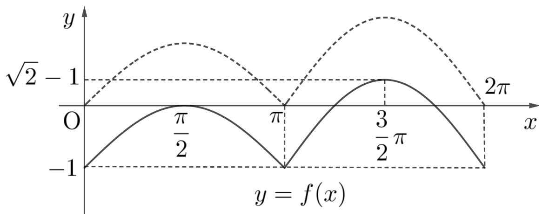
$0\le x<\pi$에서 함수 $y=\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=\sin x-1$의 최댓값은 0이고, 최솟값은 -1이다.

$\pi\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 그래프는 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 것이다. 이때, 이 구간에서 함수 $y=-\sqrt{2}\sin x-1$의 최댓값은 $\sqrt{2}-1$, 최솟값은 -1이다.

그러므로 닫힌구간 $[0, 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

의 그래프는 그림과 같다.



방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=f(t)$가 만나는 서로 다른 점의 개수가 3이다.

그러므로 $f(t)=-1$ 또는 $f(t)=0$이다.

(i) $f(t)=-1$일 때,

$t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

(ii) $f(t)=0$일 때,

$t=\frac{\pi}{2}$ 또는

$-\sqrt{2}\sin t-1=0(\pi\le t\le 2\pi)$

$-\sqrt{2}\sin t-1=0$에서 $\sin t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\pi\le t\le 2\pi$이므로 $t=\dfrac{5}{4}\pi$ 또는 $t=\dfrac{7}{4}\pi$

(i), (ii)에서 모든 t의 값의 합은

$0+\pi+2\pi+\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{5}{4}\pi+\dfrac{7}{4}\pi=\dfrac{13}{2}\pi$

따라서 $p=2$, $q=13$이므로

$p+q=15$

정답 15

[참고]

함수

$y=-\sqrt{2}\sin x-1(\pi\le x\le 2\pi)$의 그래프와 x축이 만나는 두 점은 직선 $x=\dfrac{3}{2}\pi$에 대하여 대칭이므로 방정식

$-\sqrt{2}\sin x-1=0(\pi\le x\le 2\pi)$의 두 실근의 합은 3π이다.

21. **출제의도** : 부등식을 만족시키는 함수의 도함수를 추론할 수 있는가?

풀이 :

$$2k-8\le\frac{f(k+2)-f(k)}{2}\le 4k^2+14k \quad \cdots\cdots ㉠$$

에서

$2k-8=4k^2+14k$

$k^2+3k+2=0$

$(k+1)(k+2)=0$

$k=-1$ 또는 $k=-2$

즉, ㉠에 $k=-1$을 대입하면

$$-10\le\frac{f(1)-f(-1)}{2}\le-10$$

이므로 $f(1)-f(-1)=-20 \quad \cdots\cdots ㉡$

또, ㉠에 $k=-2$를 대입하면

$$-12\le\frac{f(0)-f(-2)}{2}\le-12$$

이므로 $f(0)-f(-2)=-24 \quad \cdots\cdots ㉢$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 상수 a, b, c에 대하여

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

로 놓으면 ㉡에서

$f(1)-f(-1)$

$=(1+a+b+c)-(-1+a-b+c)$

$=2+2b=-20$

$b=-11$

㉢에서

$f(0)-f(-2)$

$=c-(-8+4a-2b+c)$

$=8-4a+2\times(-11)$ $(\because b=-11)$

$=-4a-14=-24$

$a=\dfrac{5}{2}$

즉, $f(x)=x^3+\dfrac{5}{2}x^2-11x+c$에서

$f'(x)=3x^2+5x-11$

이므로

$f'(3)=3\times3^2+5\times3-11$

$=31$

정답 31

[다른 풀이]

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이다. 상수 α, β에 대하여

$f'(x)=3x^2+\alpha x+\beta$

로 놓으면 ㉡에서

$f(1)-f(-1)$

$=\int_{-1}^{1} f'(x)\,dx$

$=\int_{-1}^{1}(3x^2+\alpha x+\beta)\,dx$

$=\left[x^3+\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x\right]_{-1}^{1}$

$=2+2\beta=-20$

$\beta=-11$

㉢에서

$f(0)-f(-2)$

$=\int_{-2}^{0} f'(x)\,dx$

$=\int_{-2}^{0}(3x^2+\alpha x-11)\,dx$ ($\because \beta=-11$)

$=\left[x^3+\frac{\alpha}{2}x^2-11x\right]_{-2}^{0}$

$=8-2\alpha-22=-24$

$\alpha=5$

즉, $f'(x)=3x^2+5x-11$이므로

$f'(3)=3\times3^2+5\times3-11$

$=31$

22. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서

$\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$

이므로

$a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k=0$ 또는 $a_{n+1}+ka_n=0$

즉, $a_{n+1}=a_n-\frac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1}=-ka_n$

$a_1=k$이므로

$a_2=a_1-\frac{2}{3}k=k-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}$

또는

$a_2=-ka_1=-k\times k=-k^2$

(i) $a_2=\frac{k}{3}$일 때,

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}$

또는

$a_3=-ka_2=-k\times\frac{k}{3}=-\frac{k^2}{3}$

(i -ⓐ) $a_3=-\frac{k}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k}{3}\right)=-\frac{k^2}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k}{3}-\frac{2}{3}k=-k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k}{3}\right)=\frac{k^2}{3}$

(i -ⓐ-①) $a_4=-k$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k-\frac{2}{3}k=-\frac{5}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times(-k)=k^2$

$a_5=-\frac{5}{3}k$ 일 때,

$a_5<0$

이고,

$a_5=k^2$일 때,

$a_5>0$

이므로

$a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓐ-②) $a_4=\frac{k^2}{3}$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\frac{k^2}{3}=-\frac{k^3}{3}$

$a_5=\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k-2)}{3}=0$

$k>0$이므로

$k=2$

$a_5=-\frac{k^3}{3}$일 때,

$a_5<0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓑ) $a_3=-\frac{k^2}{3}$일 때

$a_2\times a_3=\frac{k}{3}\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=-\frac{k^3}{9}<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times\left(-\frac{k^2}{3}\right)=\frac{k^3}{3}$

(i -ⓑ-①) $a_4=-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k$$
$$=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\left(-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k\right)=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$

$a_5=-\frac{k^2}{3}-\frac{4}{3}k$일 때,

$a_5=-\frac{k(k+4)}{3}<0$

이고

$a_5=\frac{k^3}{3}+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=\frac{k^2(k+2)}{3}>0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(i -ⓑ-②) $a_4=\frac{k^3}{3}$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\frac{k^3}{3}=-\frac{k^4}{3}$

$a_5=\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k=0$

$\frac{k(k^2-2)}{3}=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{2}$

$a_5=-\frac{k^4}{3}$일 때,

$a_5=-\frac{k^4}{3}<0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_2=-k^2$일 때,

$a_3=a_2-\frac{2}{3}k=-k^2-\frac{2}{3}k$

또는

$a_3=-ka_2=-k\times(-k^2)=k^3$

(ⅱ-ⓐ) $a_3=-k^2-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_2\times a_3=-k^2\times\left(-k^2-\frac{2}{3}k\right)=k^2\left(k^2+\frac{2}{3}k\right)>0$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

(ⅱ-ⓑ) $a_3=k^3$일 때,

$a_2\times a_3=-k^2\times k^3=-k^5<0$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$a_3=k^3$이므로

$a_4=a_3-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{2}{3}k$

또는

$a_4=-ka_3=-k\times k^3=-k^4$

(ⅱ-ⓑ-①) $a_4=k^3-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k=k^3-\frac{4}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)=-k^4+\frac{2}{3}k^2$

$a_5=k^3-\frac{4}{3}k$일 때,

$a_5=0$에서

$k^3-\frac{4}{3}k=0$

$k\left(k^2-\frac{4}{3}\right)=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$a_5=-k^4+\frac{2}{3}k^2$일 때,

$a_5=0$에서

$-k^4+\frac{2}{3}k^2=0$

$-k^2\left(k^2-\frac{2}{3}\right)=0$

$k>0$이므로

$k=\sqrt{\frac{2}{3}}$

(ⅱ-ⓑ-②) $a_4=-k^4$일 때,

$a_5=a_4-\frac{2}{3}k=-k^4-\frac{2}{3}k$

또는

$a_5=-ka_4=-k\times(-k^4)=k^5$

$a_5=-k^4-\frac{2}{3}k$일 때,

$a_5=-k\left(k^3+\frac{2}{3}\right)<0$

이고,

$a_5=k^5$일 때,

$a_5>0$

이므로 $a_5=0$을 만족시키는 양수 k의 값은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

k의 값은 2, $\sqrt{2}$ $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$

따라서 k^2의 값의 합은

$2^2+(\sqrt{2})^2+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=8$

정답 8

■ [선택: 확률과 통계]
23. ⑤ 24. ① 25. ⑤ 26. ③ 27. ④
28. ④ 29. 994 30. 93

23. 출제의도 : 같은 것이 있는 순열을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

풀이 :
숫자 1, 2, 2, 3, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는
$\frac{5!}{2!2!}=30$

정답 ⑤

24. 출제의도 : 독립사건을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :
두 사건 A, B가 서로 독립이고
$\mathrm{P}(A)=\frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)=\frac{2}{3}\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}$

$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{4}$

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cup B)&=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)\\&=\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\\&=\frac{3}{4}\end{aligned}$$

정답 ①

25. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :
11 이하의 자연수 중에서 7 이상의 홀수는 7, 9, 11이므로 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(ⅰ) 선택한 2개의 수 중 1개의 수만 7 이상의 홀수인 경우
나머지 하나는 11개의 자연수 중 3개를 제외한 8개 중에서 하나를 선택해야 하므로 이 사건의 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_8\mathrm{C}_1}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\frac{3\times8}{\frac{11\times10}{2}}=\frac{24}{55}$$

(ⅱ) 선택한 2개의 수 모두 7 이상의 홀수인 경우
이 사건의 확률은

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=\frac{\frac{3\times2}{2}}{\frac{11\times10}{2}}=\frac{3}{55}$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 사건의 확률은
$\frac{24}{55}+\frac{3}{55}=\frac{27}{55}$

정답 ⑤

[다른 풀이]
구하는 사건의 여사건은 7, 9, 11을 제외한 8개의 수 중에서 2개를 선택하는 사건이므로 구하는 사건의 확률은

$$1-\frac{{}_8\mathrm{C}_2}{{}_{11}\mathrm{C}_2}=1-\frac{\frac{8\times7}{2}}{\frac{11\times10}{2}}=1-\frac{28}{55}=\frac{27}{55}$$

26. **출제의도** : 표본평균의 확률분포를 이용하여 주어진 확률을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

정규분포 $\mathrm{N}(m, 6^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 9인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{X})=\mathrm{E}(X)=m$,

$\sigma(\overline{X})=\dfrac{\sigma(X)}{\sqrt{9}}=\dfrac{6}{3}=2$

이다. 그러므로 확률변수 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}(m, 2^2)$을 따르고, $Z_1=\dfrac{\overline{X}-m}{2}$으로 놓으면 확률변수 Z_1은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

정규분포 $\mathrm{N}(6, 2^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 4인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균 $\overline{Y}$에 대하여

$\mathrm{E}(\overline{Y})=\mathrm{E}(Y)=6$,

$\sigma(\overline{Y})=\dfrac{\sigma(Y)}{\sqrt{4}}=\dfrac{2}{2}=1$

이다. 그러므로 확률변수 $\overline{Y}$는 정규분포 $\mathrm{N}(6, 1^2)$을 따르고, $Z_2=\dfrac{\overline{Y}-6}{1}$으로 놓으면 확률변수 Z_2는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0, 1)$을 따른다.

$\mathrm{P}(\overline{X}\le 12)+\mathrm{P}(\overline{Y}\ge 8)=1$에서

$$\mathrm{P}\left(Z_1\le \frac{12-m}{2}\right)+\mathrm{P}\left(Z_2\ge \frac{8-6}{1}\right)=1$$

$$\mathrm{P}\left(Z_1\le \frac{12-m}{2}\right)+\mathrm{P}(Z_2\ge 2)=1$$

$$\mathrm{P}\left(Z_1\le \frac{12-m}{2}\right)=1-\mathrm{P}(Z_2\ge 2)$$

$$=\mathrm{P}(Z_2\le 2)$$

이때 두 확률변수 Z_1, Z_2는 모두 표준정규분포를 따르므로

$\dfrac{12-m}{2}=2$

따라서 $m=8$

정답 ③

27. **출제의도** : 이산확률변수의 분포를 이용하여 평균에 대한 조건을 만족시키는 확률의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$k=0$, $k=2$일 때,

$\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=4)$

$k=1$일 때, $\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=3)$

$\mathrm{P}(X=0)=a$, $\mathrm{P}(X=1)=b$라 할 때,

이산확률변수 X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다.

X	0	1	2	3	4	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	a	b	a	b	a	1

확률변수 X가 갖는 모든 값에 대한 확률의 합은 1이므로

$3a+2b=1$ ⋯ ㉠

$\mathrm{E}(X^2)=0^2\times a+1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a$

이고 $\mathrm{E}(X^2)=\dfrac{35}{6}$이므로

$20a+10b=\dfrac{35}{6}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=\dfrac{1}{6}$, $b=\dfrac{1}{4}$

따라서 $\mathrm{P}(X=0)=\dfrac{1}{6}$

정답 ④

28. **출제의도** : 조건부확률을 이해하여 사건의 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f: X \to X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 선택한 함수 f가 조건을 만족시키는 사건을 A, $f(4)$가 짝수인 사건을 B라 하면 구하는 확률은

$\mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$

이다. 한편, a가 b의 약수이면 b는 a의 배수이므로 주어진 조건을 다음과 같이 해석할 수 있다.

'$a \in X$, $b \in X$에 대하여

b가 a의 배수이면 $f(b)$는 $f(a)$의 배수이다.'

이때 다음의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $f(1)=4$인 경우

2, 3, 4 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 모두 $f(1)$인 4의 배수이어야 한다. 4의 배수인 X의 원소는 4뿐이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=4$

이어야 한다.

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 1이고, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는 1이다.

(ii) $f(1)=3$인 경우

2, 3, 4 모두 1의 배수이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ 모두 $f(1)$인 3의 배수이어야 한다. 3의 배수인 X의 원소는 3뿐이므로

$f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=3$

이어야 한다.

이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 1이고, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는 0이다.

(iii) $f(1)=2$인 경우

2는 1의 배수이므로 $f(2)$는 $f(1)$인 2의 배수이어야 한다. 2의 배수인 X의 원소는 2, 4이므로

$f(2)=2$ 또는 $f(2)=4$

이다. 이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$는 $f(2)$의 배수이어야 하므로 $f(2)$와 $f(4)$의 순서쌍 $(f(2), f(4))$는

$(2, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 4)$

이다.

한편, 위의 각각의 경우에 대하여

$f(3)=2$ 또는 $f(3)=4$

이므로 이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$3 \times 2 = 6$

이고, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수도 6이다.

(iv) $f(1)=1$인 경우

2는 1의 배수이므로 $f(2)$는 $f(1)$인 1의 배수이어야 한다. 즉, $f(2)$는 1 또는 2 또는 3 또는 4이다. 이때 각각의 경우에 대하여 $f(4)$는 $f(2)$의 배수이어야 하므로 $f(2)$와 $f(4)$의 순서쌍 $(f(2), f(4))$는

$(1, 1)$, $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$,

$(2, 2)$, $(2, 4)$,

$(3, 3)$,

$(4,\ 4)$

이다.

한편, 위의 각각의 경우에 대하여 $f(3)$은 1 또는 2 또는 3 또는 4이므로 이 경우 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는

$(4+2+1+1)\times 4=32$

이고, $f(4)$가 짝수인 함수 f의 개수는

$(2+2+1)\times 4=20$

이다.

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$n(A)=1+1+6+32=40$

$n(A\cap B)=1+6+20=27$

이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B|A)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}\\&=\frac{27}{40}\end{aligned}$$

정답 ④

29. **출제의도** : 이항분포와 정규분포의 관계를 이해하고 구하는 확률을 정규분포로 근사하여 구할 수 있는가?

풀이 :

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4 이하일 확률은 $\frac{2}{3}$, 5 이상일 확률은 $\frac{1}{3}$ 이므로 주사위를 16200번 던졌을 때 5 이상의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 X라 하면 확률변수 X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16200,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르고,

$\mathrm{E}(X)=16200\times\frac{1}{3}=5400$

$\mathrm{V}(X)=16200\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=3600=60^2$

이다. 이때 16200은 충분히 큰 수이므로 확률변수 X는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}(5400,\ 60^2)$을 따른다.

점 A의 위치가 5700 이하이려면 주사위를 던져 나온 눈의 수가 4 이하인 횟수에서 5 이상인 횟수를 뺀 값이 5700 이하이어야 하므로

$(16200-X)-X\le 5700$

$X\ge 5250$

따라서 구하는 확률을 표준정규분포표를 이용해 구한 값 k는

$$\begin{aligned}k&=\mathrm{P}(X\ge 5250)\\&=\mathrm{P}\left(Z\ge\frac{5250-5400}{60}\right)\\&=\mathrm{P}(Z\ge -2.5)\\&=\mathrm{P}(-2.5\le Z\le 0)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=\mathrm{P}(0\le Z\le 2.5)+\mathrm{P}(Z\ge 0)\\&=0.494+0.5\\&=0.994\end{aligned}$$

따라서

$1000\times k=1000\times 0.994=994$

정답 994

30. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

풀이 :

조건 (가)에서 학생 A가 받는 공의 개수는 0 또는 1 또는 2이다.

(i) 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때,

흰 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_{2}H_{4} = {}_{2+4-1}C_{4} = {}_{5}C_{4} = 5$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $_{2}H_{4} = 5$이다.

이 중에서 학생 B가 받는 공의 개수가 0인 경우의 수는 1이고, 학생 B가 받는 공의 개수가 1인 경우는 흰 공 1개를 받는 경우 또는 검은 공 1개를 받는 경우에서 그 경우의 수가 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 3이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 0일 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는

$5 \times 5 - 3 = 22$이다.

(ii) 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때,

학생 A가 흰 공 1개를 받는다고 하면, 이러한 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_{2}H_{3} = {}_{2+3-1}C_{3} = {}_{4}C_{3} = 4$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $_{2}H_{4} = 5$이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지의 방법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $1 \times 4 \times 5 - 3 = 17$이다.

마찬가지 방법으로 학생 A가 검은 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 17이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 1일 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $17 + 17 = 34$이다.

(iii) 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때,

(iii-1) 학생 A가 흰 공 2개를 받는 경우

학생 A가 흰 공 2개를 받는 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 2개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는

$_{2}H_{2} = {}_{2+2-1}C_{2} = {}_{3}C_{2} = 3$

이고, 이 각각에 대하여 검은 공 4개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 $_{2}H_{4} = 5$이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지의 방법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 2개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는 $1 \times 3 \times 5 - 3 = 12$이다.

(iii-2) 학생 A가 검은 공 2개를 받는 경우

(iii-1)과 마찬가지의 방법으로 이 경우의 수는 12이다.

(iii-3) 학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받는 경우

학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받는 경우의 수는 1이다.

이때 남은 흰 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_3=4$이고, 이 각각에 대하여 검은 공 3개를 두 학생 B, C에게 남김없이 나누어 주는 경우의 수는 ${}_2H_3=4$이다.

이 중에서 조건 (나)를 만족시키지 않는 경우의 수는 (i)과 마찬가지의 방법으로 3이다.

그러므로 학생 A가 흰 공 1개와 검은 공 1개를 받을 때, 조건 (나)를 만족시키는 경우의 수는

$1\times4\times4-3=13$이다.

따라서 학생 A가 받는 공의 개수가 2일 때의 경우의 수는

$12+12+13=37$이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 경우의 수는

$22+34+37=93$

정답 93

■ **[선택: 미적분]**
23. ⑤ 24. ④ 25. ④ 26. ③ 27. ②
28. ③ 29. 57 30. 25

23. **출제의도** : 삼각함수의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$

$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\times 5\right)$

$=1\times 5$

$=5$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 여러 가지 함수의 부정적분을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

풀이 :
양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 기울기가

$\frac{1}{t}+4e^{2t}$

이므로

$f'(t)=\frac{1}{t}+4e^{2t}$

이다. 즉, 양수 x에 대하여

$f'(x)=\frac{1}{x}+4e^{2x}$

이므로

$f(x)=\int\left(\frac{1}{x}+4e^{2x}\right)dx$

$=\ln x+2e^{2x}+C$ (C는 적분상수)

이때, $f(1)=2e^2+1$이므로

$\ln 1+2e^2+C=2e^2+1$

$C=1$

따라서

$f(x)=\ln x+2e^{2x}+1$

이므로

$f(e)=\ln e+2e^{2e}+1$

$=1+2e^{2e}+1$

$=2e^{2e}+2$

정답 ④

25. **출제의도** : 등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_n=a_1\times r^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=1$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

(i) $|r|<\frac{1}{2}$일 때,

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$|2r|<1$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(2r)^{n-1}=0$

이다. 즉,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}=0$$

이므로 ㉠을 만족시키지 못한다.

(ii) $|r|>\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$|2r|>1$

이므로

$\lim_{n\to\infty}(2r)^{n-1}$의 값이 존재하지 않는다.

즉, ㉠을 만족시키지 못한다.

(iii) $r=\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

$$=\frac{a_1}{3}$$

이므로

$\frac{a_1}{3}=1$

$a_1=3$

(iv) $r=-\frac{1}{2}$일 때

㉠에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times r^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{6\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(-1)^{n-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6}$$

이때,

$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$의 값이 존재하지 않으므로

㉠을 만족시키지 못한다.

(i) ~ (iv)에서

$a_1=3,\ r=\frac{1}{2}$

따라서

$a_2=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

이므로

$a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

정답 ④

[다른 풀이]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하면

$a_n=a_1r^{n-1}$

$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=1$에서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4^n\times a_n-1}{3\times 2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_n-\frac{1}{2^n}}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\times a_1r^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1\times(2r)^{n-1}-\frac{1}{2^n}}{6}=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$이고 ㉠에서 0이 아닌 극한값이 존재하므로

$2r=1$, 즉 $r=\frac{1}{2}$

㉠에 $r=\frac{1}{2}$을 대입하면

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2a_1-\frac{1}{2^n}}{6}=\frac{a_1}{3}=1$$

$a_1=3$

따라서 $a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$a_2=\frac{3}{2}$

이고

$a_1+a_2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$

26. **출제의도** : 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

풀이 :

$\sqrt{\frac{\pi}{6}}\le t\le\sqrt{\frac{\pi}{2}}$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2$

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}S(t)dt$$

$$=\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}\frac{\pi}{2}t^3\sin t^2dt$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}t^3\sin t^2dt$$

이때 $t^2=u$라 하면 $t=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$일 때 $u=\frac{\pi}{2}$, $t=\sqrt{\frac{\pi}{6}}$일 때 $u=\frac{\pi}{6}$ 이고

$2t = \dfrac{du}{dt}$ 이므로

$$\frac{\pi}{2}\int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} t^3 \sin t^2 dt$$

$$= \frac{\pi}{4}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} u \sin u du$$

$$= \frac{\pi}{4}\left([-u\cos u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + [\sin u]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{12}\pi + 1 - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}\pi^2 + 6\pi}{48}$$

정답 ③

27. **출제의도** : 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x) + f'\left(\frac{1}{2}\sin x\right) \times \frac{1}{2}\cos x = \cos x \text{---㉠}$$

㉠에 $x = \pi$를 대입하면

$$f'(\pi) + f'(0) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$f'(\pi) - \frac{1}{2}f'(0) = -1 \text{---㉡}$$

㉠에 $x = 0$을 대입하면

$$f'(0) + f'(0) \times \frac{1}{2} = 1,\ \frac{3}{2}f'(0) = 1$$

따라서 $f'(0) = \dfrac{2}{3}$ 이므로 ㉡에 대입하면

$$f'(\pi) - \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = -1$$

$$f'(\pi) = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

정답 ②

28. **출제의도** : 치환적분과 부분적분을 이용하여 함수의 정적분 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$g(0) = f'(0)\sin 0 + 0 = 0$

$g(1) = f'(2)\sin \pi + 1 = 1$ 이므로

$$\int_0^1 g(x)dx + \int_{g(0)}^{g(1)} g^{-1}(x)dx$$

$$= \int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 g^{-1}(x)dx$$

$$= 1 \times 1 - 0 \times 0 = 1$$

따라서

$$\int_0^1 g(x)dx + \int_0^1 g^{-1}(x)dx = 1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에

$g(x) = f'(2x)\sin \pi x + x$,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx = 2\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x\, dx + \frac{1}{4}$$

을 대입하면

$$\int_0^1 \{f'(2x)\sin \pi x + x\}dx$$

$$+ 2\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x\, dx + \frac{1}{4} = 1$$

$$3\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x\, dx + \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 + \frac{1}{4} = 1$$

$$3\int_0^1 f'(2x)\sin \pi x\, dx = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

따라서

$$\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx = \frac{1}{12} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

한편, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x dx$ 에서

$x = 2t$라 하면 $\frac{dx}{dt} = 2$이고

$x=0$일 때, $t=0$, $x=2$일 때 $t=1$이므로

$$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx = 2\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt$$

$u(t) = f(2t)$, $v(t) = \frac{1}{\pi}\sin\pi t$로 놓으면

$u'(t) = 2f'(2t)$, $v'(t) = \cos\pi t$이므로

$$2\int_0^1 f(2t)\cos\pi t\,dt$$

$$= 2\left[\frac{1}{\pi}f(2t)\sin\pi t\right]_0^1 - \frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t\,dt$$

$$= 0 - \frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2t)\sin\pi t\,dt$$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x\,dx$$

이므로 ㉡에서

$$\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}xdx = -\frac{4}{\pi}\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx$$

$$= -\frac{4}{\pi}\times\frac{1}{12}$$

$$= -\frac{1}{3\pi}$$

정답 ③

29. 출제의도 : 급수의 합을 이용하여 일반항을 구할 수 있는가?

풀이 :

S_m

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m+1}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{m+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+3}\right)+\cdots +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m+n+1}\right)\right\}$$

따라서

S_1

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}$$

$$= 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

이므로

$$a_1 = S_1 = \frac{3}{2}$$

또한

S_9

$$= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{11}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{13}\right)+\cdots +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+10}\right)\right\}$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}$$

S_{10}

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1-\frac{1}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{13}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{14}\right)+\cdots\right.$

$\left.+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+11}\right)\right\}$

$=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}$

$=S_9+\frac{1}{11}$

이므로

$a_{10}=S_{10}-S_9$

$=\left(S_9+\frac{1}{11}\right)-S_9$

$=\frac{1}{11}$

따라서

a_1+a_{10}

$=\frac{3}{2}+\frac{1}{11}$

$=\frac{35}{22}$

이므로 $p=22$, $q=35$

$p+q=57$

정답 57

30. **출제의도** : 절댓값과 지수함수 e^x을 포함한 함수의 부정적분을 구하여 k의 값에 따른 함수의 그래프를 추론하고 그 함수의 최솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

x의 범위에 따라 함수

$$f(x)=\begin{cases}(k-x)e^{-x} & (x\ge 0)\\ (k+x)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$

의 한 부정적분을 구하면

$$F(x)=\begin{cases}(x-k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\ (-x-k-1)e^{-x}+C_2 & (x<0)\end{cases}$$

(단, C_1, C_2는 적분상수)

이때, 함수 $F(x)$가 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $x=0$에서 $F(x)$는 연속이다. 즉, $\lim_{x\to 0+}F(x)=\lim_{x\to 0-}F(x)$에서

$C_2=C_1+2$

$g(k)$를 $F(0)$의 최솟값으로 정의하였으므로

$F(0)=-k+1+C_1$ … ㉠

의 최솟값이 $g(k)$이다.

함수 $h(x)=F(x)-f(x)$라 하면

$$h(x)=\begin{cases}(2x-2k+1)e^{-x}+C_1 & (x\ge 0)\\ (-2x-2k-1)e^{-x}+C_1+2 & (x<0)\end{cases}$$

이고

$$h'(x)=\begin{cases}(-2x+2k+1)e^{-x} & (x>0)\\ (2x+2k-1)e^{-x} & (x<0)\end{cases}$$

이므로 $h'(x)=0$에서

$x\ge 0$일 때 $x=\frac{2k+1}{2}$

이고

$x<0$일 때 $x=\frac{1-2k}{2}$.

이때 $\frac{1-2k}{2}\ge 0$이면 $x<0$에서 $h'(x)<0$

이므로 $x=0$과 $x=\frac{2k+1}{2}$의 좌우에서 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	-		+	0	-
$h(x)$	↘		↗		↘

또한, $\frac{1-2k}{2}<0$일 때 $x=\frac{2k+1}{2}$과 $x=\frac{1-2k}{2}$의 좌우에서 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$\frac{1-2k}{2}$	$\cdots$	$\frac{2k+1}{2}$	$\cdots$
$h'(x)$	-	0	+	0	-
$h(x)$	↘		↗		↘

또, $h(0)=-2k+1+C_1$이고

$\lim_{x\to\infty}h(x)=C_1$, $\lim_{x\to-\infty}h(x)=\infty$

이므로 $\frac{1-2k}{2}$의 부호에 따라 C_1의 범위를 정하여 $F(0)$의 최솟값을 구하면

i) $\frac{1-2k}{2}\geq 0$일 때 $x=0$에서 극솟값 $h(0)$을 갖고 $1-2k\geq 0$이므로

$h(0)=-2k+1+C_1 \geq C_1=\lim_{x\to\infty}h(x)$

그런데 모든 실수 x에 대하여 $F(x)\geq f(x)$이므로 $h(x)\geq 0$에서 $C_1\geq 0$이다.

즉, ㉠에서 $F(0)=-k+1+C_1 \geq -k+1$

ii) $\frac{1-2k}{2}<0$일 때

$x=\frac{1-2k}{2}$일 때 $h(x)$의 극솟값은

$h\left(\frac{1-2k}{2}\right)=-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2$이다.

$\frac{1-2k}{2}<0$에서 $(e^{-1})^{\frac{1-2k}{2}}>(e^{-1})^0=1$이므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2 \leq C_1$

그러므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2$은 $h(x)$의 최솟값이다.

그런데 $F(x)\geq f(x)$에서 $h\left(\frac{1-2k}{2}\right)\geq 0$이므로 $-2e^{\frac{2k-1}{2}}+C_1+2\geq 0$

즉, $F(0)=-k+1+C_1$

$\geq -k+2e^{\frac{2k-1}{2}}-1$

그런데 $g(k)$는 $F(0)$의 최솟값이므로

$$g(k)=\begin{cases}-k+1 & \left(0<k\leq\frac{1}{2}\right)\\ -k+2e^{\frac{2k-1}{2}}-1 & \left(k>\frac{1}{2}\right)\end{cases}$$

그러므로

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}+\left(-\frac{3}{2}\right)+2e-1=pe+q$

$2e-\frac{7}{4}=pe+q$에서 $p=2$, $q=-\frac{7}{4}$

따라서 $100(p+q)=25$

정답 25

■ [선택: 기하]
23. ③ 24. ④ 25. ⑤ 26. ③ 27. ④
28. ① 29. 63 30. 54

23. **출제의도** : 성분으로 나타낸 두 벡터의 연산을 할 수 있는가?

풀이 :
$\vec{a}=(4,0)$, $\vec{b}=(1,3)$이므로
$2\vec{a}+\vec{b}=2(4,0)+(1,3)$
$=(8,0)+(1,3)$
$=(9,3)$
따라서
$(9,3)=(9,k)$
이므로
$k=3$

정답 ③

24. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 타원의 방정식을 구할 수 있는가?

풀이 :
타원 $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$은 중심이 원점이고 $0<b<4$이므로 두 초점은 x축 위에 있다. 이때 두 초점 사이의 거리가 6이므로 두 초점의 좌표는
$(3,0)$, $(-3,0)$
이다.
따라서
$4^2-b^2=3^2$
이므로
$b^2=4^2-3^2=7$

정답 ④

25. **출제의도** : 좌표공간에서 선분의 중점과 내분하는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 :
두 점 $\mathrm{A}(a,b,-5)$, $\mathrm{B}(-8,6,c)$에 대하여 선분 AB의 중점이 zx평면 위에 있으므로 중점의 y좌표는 0이다. 즉,
$\frac{b+6}{2}=0$
이므로 $b=-6$
또, 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이 y축 위에 있으므로 내분하는 점의 x좌표와 z좌표는 0이다. 즉,
$\frac{1\times(-8)+2\times a}{1+2}=0$, $\frac{1\times c+2\times(-5)}{1+2}=0$
이므로
$a=4$, $c=10$
따라서
$a+b+c=4+(-6)+10=8$

정답 ⑤

26. **출제의도** : 포물선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하여 문제를 해결할 수 있는가?

풀이 :
포물선 $y^2=4x$ 위의 점 $(n^2, 2n)$에서의 접선의 방정식은
$2ny=2(x+n^2)$
즉, $x-ny+n^2=0$
이 직선이 주어진 원과 만나려면 점 $(1,0)$까지의 거리가 6 이하여야 한다.
즉, $\frac{|1+n^2|}{\sqrt{1+n^2}}\le 6$

$\sqrt{1+n^2} \le 6$

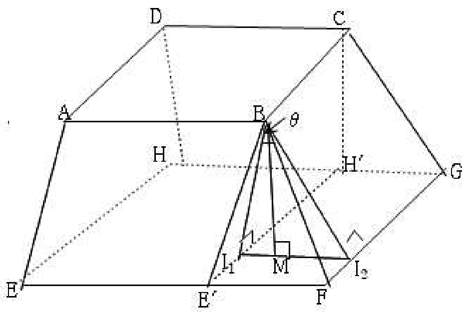
$n^2 \le 35$

따라서 $n=1, 2, 3, 4, 5$이므로 구하는 자연수 n의 개수는 5이다.

정답 ③

27. 출제의도 : 두 평면이 이루는 이면각의 크기를 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :



선분 BC를 지나고 사각형 AEHD와 평행한 평면이 두 선분 EF, HG와 만나는 점을 각각 E′, H′이라 하자.

점 B에서 두 선분 E′H′, FG에 내린 수선의 발을 각각 I_1, I_2라 하고, 사각형 AEHD와 평면 BFGC가 이루는 예각의 크기를 θ라 하면 $\theta = \angle I_1BI_2$

$\overline{BI_1} = \overline{BI_2}$, $\overline{I_1I_2} = 6-4=2$

이등변삼각형 I_1BI_2의 꼭짓점 B에서 선분 I_1I_2에 내린 수선을 발을 M이라 하면

$\overline{BM} = \sqrt{14}$, $\overline{I_1M} = \overline{I_2M} = 1$

직각삼각형 BI_1M에서 피타고라스 정리에 의하여

$$\overline{BI_2} = \overline{BI_1} = \sqrt{\overline{BM}^2 + \overline{I_1M}^2}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{14})^2+1^2} = \sqrt{15}$$

삼각형 BI_1I_2에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overline{BI_1}^2 + \overline{BI_2}^2 - \overline{I_1I_2}^2}{2\times\overline{BI_1}\times\overline{BI_2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{15})^2 + (\sqrt{15})^2 - 2^2}{2\times\sqrt{15}\times\sqrt{15}} = \frac{13}{15}$$

한편, 사다리꼴 AEHD의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{AD}+\overline{EH})\times\overline{BI_1}$$
$$= \frac{1}{2}\times(4+6)\times\sqrt{15} = 5\sqrt{15}$$

따라서 사각형 AEHD의 평면 BFGC위로의 정사영의 넓이는

$$5\sqrt{15}\times\cos\theta = 5\sqrt{15}\times\frac{13}{15}$$
$$= \frac{13}{3}\sqrt{15}$$

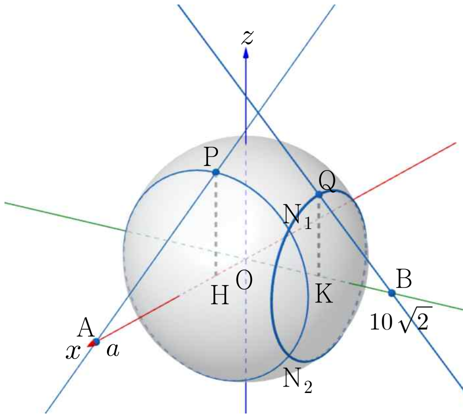
정답 ④

28. 출제의도 : 구의 방정식을 이해하고 공간도형의 성질을 활용하여 공간좌표의 성분을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\angle APO = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형 C_1과 $\angle BPO = \frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 Q가 나타내는 도형 C_2는 각각 x축과 y축에 중심이 있는 원이고 선분 N_1N_2는 원 C_1의 현이다.

원 C_1위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면 원 C_1의 반지름의 길이는 $\overline{PH}$이다.



직각삼각형 OPA에서 구 S의 반지름의 길이는 10이므로 $\overline{\text{AP}} = \sqrt{a^2-100}$

$\overline{\text{PH}} = 10\sin(\angle \text{POA}) = \dfrac{10\sqrt{a^2-100}}{a}$

삼각형 ON_1N_2에서 $\overline{\text{ON}_1} = \overline{\text{ON}_2} = 10$이므로 코사인법칙에 의해서

$$\overline{\text{N}_1\text{N}_2}^2 = 10^2+10^2-2\times10^2\cos(\angle \text{N}_1\text{ON}_2)$$
$$= 200(1-\frac{3}{5})$$
$$= 80$$

즉, $\overline{\text{N}_1\text{N}_2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

선분 N_1N_2와 xy평면이 만나는 점을 R라 하면 $\overline{\text{N}_1\text{R}} = 2\sqrt{5}$

원 C_2위의 점 Q에서 y축에 내린 수선의 발을 K라 하면 원 C_2의 반지름의 길이는 $\overline{\text{QK}}$이다.

직각삼각형 OQB에서 구 S의 반지름의 길이는 10이므로

$$\overline{\text{BQ}} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2-100} = 10$$

그러므로 $\angle \text{QOB} = \angle \text{QBO} = \dfrac{\pi}{4}$이고

$$\overline{\text{QK}} = \overline{\text{OK}} = 10\sin(\angle \text{QOB})$$
$$= 10\times\frac{1}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

그런데 $\overline{\text{OK}}$는 원 C_1의 중심에서 현 N_1N_2까지의 거리와 같으므로

$\overline{\text{HR}} = 5\sqrt{2}$

그러므로 직각삼각형 N_1HR에서

$\overline{\text{N}_1\text{H}} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2+(2\sqrt{5})^2}$

그런데 $\overline{\text{N}_1\text{H}}$는 원 C_1의 반지름이므로 $\overline{\text{N}_1\text{H}} = \overline{\text{PH}}$이다.

즉, $\overline{\text{PH}}^2 = \overline{\text{N}_1\text{H}}^2$에서

$$\left(\frac{10\sqrt{a^2-100}}{a}\right)^2 = 70$$

$100(a^2-100) = 70a^2$

$30a^2 = 10000$

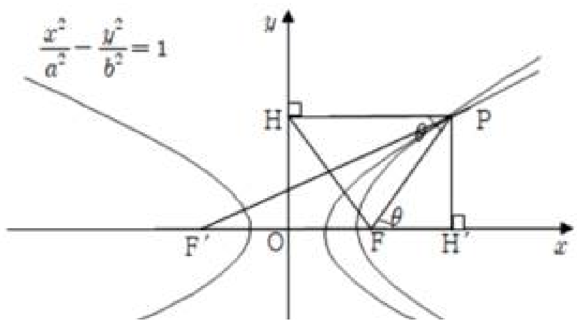
$a = \dfrac{100\sqrt{30}}{30}$ 또는 $a = -\dfrac{100\sqrt{30}}{30}$

따라서 $a = \dfrac{10\sqrt{30}}{3}$

정답 ①

29. 출제의도 : 조건을 만족시키는 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있는가?

풀이 :



$\overline{\text{PH}} : \overline{\text{HF}} = 3 : 2\sqrt{2}$이므로

$\overline{\text{PH}} = 3k$, $\overline{\text{HF}} = 2\sqrt{2}\,k\,(k>0)$

이라 하자.

점 P는 y축을 준선으로 하는 포물선 위의 점이므로 포물선의 정의에 의하여

$\overline{\text{PF}} = \overline{\text{PH}} = 3k$

삼각형 HPF에서 $\angle \mathrm{HPF} = \theta$라 하면

코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\overline{\mathrm{PH}}^2 + \overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{HF}}^2}{2\times\overline{\mathrm{PH}}\times\overline{\mathrm{PF}}}$$

$$= \frac{(3k)^2 + (3k)^2 - (2\sqrt{2}k)^2}{2\times 3k\times 3k} = \frac{5}{9}$$

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$\angle \mathrm{PFH}' = \angle \mathrm{HPF} = \theta$

$\overline{\mathrm{FH}'} = \overline{\mathrm{PH}} - \overline{\mathrm{OF}} = 3k - 4$

$= \overline{\mathrm{PF}} \times \cos\theta = 3k \times \frac{5}{9} = \frac{5}{3}k$

$3k - 4 = \frac{5}{3}k$에서 $k = 3$

$\overline{\mathrm{PF}} = 3k = 9$, $\overline{\mathrm{FH}'} = \frac{5}{3}k = 5$

직각삼각형 PFH'에서

$\overline{\mathrm{PH}'} = \sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2 - \overline{\mathrm{FH}'}^2} = \sqrt{56}$

$\overline{\mathrm{F}'\mathrm{H}'} = \overline{\mathrm{F}'\mathrm{F}} + \overline{\mathrm{FH}'} = 8 + 5 = 13$

직각삼각형 $\mathrm{PF}'\mathrm{H}'$에서

$\overline{\mathrm{PF}'} = \sqrt{\overline{\mathrm{F}'\mathrm{H}'}^2 + \overline{\mathrm{PH}'}^2} = 15$

점 P는 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$위의 점이므로

쌍곡선의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{PF}'} - \overline{\mathrm{PF}} = 15 - 9 = 2a$

즉, $a^2 = 9$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$의 한 초점이 $\mathrm{F}(4, 0)$이므로

$4^2 = a^2 + b^2$에서 $b^2 = 16 - 9 = 7$

따라서

$a^2 \times b^2 = 9 \times 7 = 63$

정답 63

30. 출제의도 : 위치벡터의 뜻과 벡터의 합을 알고 벡터를 기하학적으로 해석하여 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

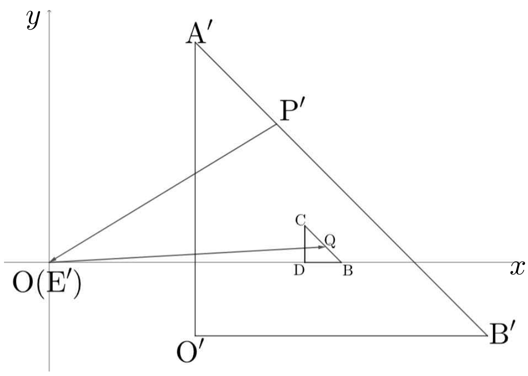
두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$의 합 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$는

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{PO}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}$

$= \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{PE}}$ ⋯ ㉠

와 같이 바꾸어 나타낼 수 있다.

점 E가 원점 O에 오도록 다섯 개의 점 O, A, B, P, E를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하고 각 점을 O', A', B', P', E'이라 하면 O', A', B', E'의 좌표는 각각 $\mathrm{O}'(4,-2)$, $\mathrm{A}'(4,6)$, $\mathrm{B}'(12,-2)$, $\mathrm{E}'(0,0)$이고 점 P'은 삼각형 $\mathrm{A}'\mathrm{O}'\mathrm{B}'$ 위의 점이다. 이것을 그림으로 나타내면 다음과 같다.



그런데 $\overrightarrow{\mathrm{PE}} = \overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{E}'} = \overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{O}}$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{PE}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{Q}}$ ⋯ ㉡

㉠과 ㉡에서 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{P}'\mathrm{Q}}$

그러므로 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2$의 최댓값과 최솟값은 각각 $\overline{\mathrm{P}'\mathrm{Q}}^2$의 최댓값, 최솟값과 같다.

ⅰ) 최솟값

직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$의 방정식은

$$y = \frac{-2-6}{12-4}(x-4) + 6 = -x + 10$$

이고 직선 CB와 직선 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$이 평행하므로

최솟값 m은

$$m=\left(\frac{|-8-0+10|}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}}\right)^2=2$$

이다.

ⅱ) 최댓값

최댓값은 삼각형 O′A′B′위의 점과 삼각형 CDB 위의 점 사이의 거리 중 최댓값이므로 점 A′과 점 B사이의 거리이다.

그러므로 최댓값 M은

$$M=\left(\sqrt{(8-4)^2+(0-6)^2}\right)^2=52$$

이다.

따라서 $M+m=54$

정답 54