2025학년도 대학수학능력시험 대비

2024학년도 10월 고3 전국연합학력평가 정답 및 해설

• 수학 영역 •

정 답

1	④	2	⑤	3	②	4	⑤	5	④
6	②	7	⑤	8	②	9	①	10	①
11	③	12	①	13	⑤	14	③	15	④
16	6	17	58	18	12	19	84	20	54
21	15	22	486						

해 설

1. [출제의도] 지수를 계산하여 값을 구한다.

$\left(\dfrac{4}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{6}{5}}=\left(2^{2-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}=2^2=4$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 구한다.

$f'(x)=3x^2-4x-4$, $f(1)=-5$ 이므로

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)+5}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=-5$

3. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

$\dfrac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$ 에서 $\sin\theta<0$ 이므로 $\sin\theta=-\dfrac{2}{\sqrt5}$

$\dfrac{\tan\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos^2\theta}=\dfrac{\sin\theta}{1-\sin^2\theta}=\dfrac{-\dfrac{2}{\sqrt5}}{1-\dfrac{4}{5}}=-2\sqrt5$

4. [출제의도] 정적분의 성질을 이해하여 정적분의 값을 구한다.

$\displaystyle\int_1^2(3x+4)\,dx+\int_1^2(3x^2-3x)\,dx$

$\displaystyle=\int_1^2(3x^2+4)\,dx=\Big[x^3+4x\Big]_1^2=11$

5. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 상수를 구한다.

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1-}\{(x-a)^2-3\}=a^2-2a-2$

$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$, $f(1)=1$

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$a^2-2a-2=1$, $a=-1$ 또는 $a=3$

따라서 모든 a의 값의 합은 2

6. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 등비수열의 합을 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r\,(r>0)$이라 하면

$S_4-S_2=a_3+a_4=a_1r^2(1+r)$

$S_6-S_4=a_5+a_6=a_1r^4(1+r)$

$4(S_4-S_2)=S_6-S_4$이므로 $4a_1r^2(1+r)=a_1r^4(1+r)$

$a_1\neq0$이고 $r^2=4$이므로 $r=2$

$a_3=12$에서 $a_1\times2^2=12$, $a_1=3$

따라서 $S_3=a_1+a_2+a_3=3+3\times2+3\times2^2=21$

7. [출제의도] 도함수의 성질을 이해하여 극값을 구한다.

$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극솟값은 $f(3)=k-27=-17$ 이므로

$k=10$, $f(x)=x^3-3x^2-9x+10$

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-1)=15$

8. [출제의도] 정적분을 이해하여 도형의 넓이를 구한다.

함수 $f(x)=x^2+1$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=0$, $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 A라 하면

$A=\displaystyle\int_0^1(x^2+1)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$

점 $(1, f(1))$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y-f(1)=m(x-1)$, $y=mx-m+2$

세 점 $(1, f(1))$, $(1, 0)$, $\left(1-\dfrac{2}{m}, 0\right)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이는 $\dfrac{A}{2}$ 이므로 $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{m}\times2$

$m=3$

9. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 상수를 구한다.

선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점을 Q라 하자.

점 Q의 x좌표는

$\dfrac{3\log_2 2\sqrt2-4}{3-1}=\dfrac{1}{2}\times\left(3\times\dfrac{3}{2}-4\right)=\dfrac{1}{4}$

점 Q는 직선 $y=4x$ 위에 있으므로

점 Q의 y좌표는 $4\times\dfrac{1}{4}=1$

$\dfrac{3\log_3\dfrac{3}{2}-\log_3 a}{3-1}=1$에서 $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{a}=3^2$, $a=\dfrac{3}{8}$

10. [출제의도] 함수의 연속을 이해하여 함숫값을 구한다.

$(x-1)g(x)=|f(x)|$에 $x=1$을 대입하면 $f(1)=0$

$x=3$을 대입하면 $2g(3)=|f(3)|$

$g(3)=0$ 이므로 $f(3)=0$

$f(x)=(x-1)(x-3)(x-a)$ (a는 상수)라 하자.

$g(x)=\dfrac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1}$ $(x\neq1)$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1}$

$=-2|1-a|$

$\lim\limits_{x\to1+}g(x)=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{|(x-1)(x-3)(x-a)|}{x-1}=2|1-a|$

$-2|1-a|=2|1-a|$, $a=1$

$f(x)=(x-1)^2(x-3)$ 이므로 $f(4)=9$

11. [출제의도] 등차수열을 이해하여 두 항의 차를 구한다.

등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차를 각각 d, l이라 하자.

$a_6-a_5=b_7-b_5$이므로 $d=2l$

$d=0$이면 $a_7=a_6=27$이고 $b_7\leq24$에서 $a_6\neq b_7$이므로 $d\neq0$이다.

l은 자연수이므로 d는 2의 배수이다.

$a_7=a_1+6d=27$ 에서

$a_1=27-6d>0$ 이므로 $d=2$ 또는 $d=4$

(i) $d=2$인 경우, $a_1=27-6\times2=15$이고

$b_7=b_5+2l=a_5+d=a_1+5d=25$

(ii) $d=4$인 경우, $a_1=27-6\times4=3$이고

$b_7=b_5+2l=a_5+d=a_1+5d=23$

(i), (ii)에서 $b_7\leq24$ 이므로 $d=4$, $l=2$

$b_1-a_1=(b_5-a_5)+4(d-l)=4\times2=8$

12. [출제의도] 정적분을 이용하여 수직선 위의 점이 움직인 거리를 구하는 문제를 해결한다.

출발한 후 두 점 P, Q가 만나는 시각을 $t=k\,(k>0)$이라 하자.

$\displaystyle\int_0^k(-3t^2+at)\,dt-\int_0^k(-t+1)\,dt=0$

$\displaystyle\int_0^k\{(-3t^2+at)-(-t+1)\}\,dt=0$

$-k^3+\dfrac{a+1}{2}k^2-k=0$, $k\left(k^2-\dfrac{a+1}{2}k+1\right)=0$

이차방정식 $k^2-\dfrac{a+1}{2}k+1=0$이 양수인 근을 가지고 근과 계수와의 관계에서 두 근의 곱이 1이므로 이차방정식의 판별식 D에 대하여 $D=0$이다.

$D=\left(\dfrac{a+1}{2}\right)^2-4=0$, $a=3$

시각 $t=0$에서 $t=3$까지 점 P가 움직인 거리는

$\displaystyle\int_0^3|v_1(t)|\,dt=\int_0^3|-3t^2+3t|\,dt$

$\displaystyle=\int_0^1(-3t^2+3t)\,dt+\int_1^3(3t^2-3t)\,dt$

$=\dfrac{29}{2}$

13. [출제의도] 코사인법칙을 이용하여 삼각형에 관한 문제를 해결한다.

삼각형 ABE와 삼각형 DCE는 서로 닮음이고

$\overline{AB}:\overline{DC}=1:2$ 이므로 $\overline{BE}:\overline{CE}=1:2$ 이다.

삼각형 BEC에서 $\overline{BE}=k\,(k>0)$이라 하면 $\overline{CE}=2k$

원주각의 성질에 의하여 $\angle BDC=\angle BAC=\alpha$ 이므로

$\angle BEC=\alpha+\beta$

삼각형 BEC에서 코사인법칙에 의하여

$(2\sqrt{30})^2=k^2+4k^2-2\times k\times2k\times\left(-\dfrac{5}{12}\right)$, $k^2=18$

$k>0$ 이므로 $k=3\sqrt2$, $\overline{BE}=3\sqrt2$

$\overline{AE}=t\,(t>0)$이라 하면 삼각형 ABE에서

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $t^2+4^2>(3\sqrt2)^2$, $t>\sqrt2$

$\cos(\pi-(\alpha+\beta))=-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{5}{12}$

삼각형 ABE에서 코사인법칙에 의하여

$4^2=t^2+(3\sqrt2)^2-2\times t\times3\sqrt2\times\dfrac{5}{12}$

$2t^2-5\sqrt2t+4=0$

$(2t-\sqrt2)(t-2\sqrt2)=0$

$t>\sqrt2$ 이므로 $t=2\sqrt2$

따라서 구하는 선분 AE의 길이는 $2\sqrt2$ 이다.

14. [출제의도] 미분을 활용하여 방정식 문제를 해결한다.

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$에서의 접선의 방정식이 $y=2x+1$ 이므로

$g(0)=1$, $g'(0)=2$이고 $f(0)=1$, $f'(0)=2$이다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 연속이다.

$\lim\limits_{x\to1-}g(x)=\lim\limits_{x\to1+}g(x)=g(1)$

$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\lim\limits_{x\to1+}\{f(x-1)+2\}=f(1)$

$f(1)=f(0)+2$ …… ㉠

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1+}\dfrac{f(x-1)+2-f(1)}{x-1}$

㉠에서 $2-f(1)=-f(0)$ 이므로

$f'(1)=f'(0)=2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=2x+1$과 두

점 $(0, f(0))$, $(1, f(1))$에서 접한다.
$f(x)-(2x+1)=x^2(x-1)^2$
$f(x)=x^2(x-1)^2+2x+1=x^4-2x^3+x^2+2x+1$
$f'(x)=4x^3-6x^2+2x+2=2$
$2x(2x-1)(x-1)=0$
$g(x)=f(x)\ (x \le 1)$이므로
$x \le 1$에서 $g'(x)=2$인 x의 값은
$x=0$ 또는 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=1$ …… ㉢
$g(x)=f(x-1)+2\ (x>1)$
곡선 $y=f(x-1)+2$는 곡선 $y=f(x)$를 x축의 방향으로 1, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 곡선이므로 $x>1$에서 $g'(x)=2$인 x의 값은
$x=\frac{3}{2}$ 또는 $x=2$ …… ㉣
㉢, ㉣에서 $g'(t)=2$인 모든 실수 t의 값의 합은
$0+\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}+2=5$

15. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 항의 값의 합을 추론한다.

자연수 k에 대하여
$a_{n+1}=3k$ 또는 $a_{n+1}=3k-1$(k는 자연수)이면
$a_{n+1}\neq 3a_n+1$이므로 $a_{n+1}=\frac{a_n}{n}$, $a_n=na_{n+1}$이다.
$a_6=2=3\times1-1$이므로 $a_5=5\times2=10$
$10=3\times3+1$이므로
$a_4=3$ 또는 $a_4=4\times10=40$
(ⅰ) $a_4=3$인 경우, $3=3\times1$이므로
$a_3=3\times3=9$, $a_2=2\times9=18$, $a_1=18$
(ⅱ) $a_4=40$인 경우, $40=3\times13+1$이므로
$a_3=13$ 또는 $a_3=3\times40=120$
① $a_3=13$인 경우, $13=3\times4+1$이므로
$a_2=4$ 또는 $a_2=2\times13=26$
$a_2=4$인 경우, 2는 4의 약수이므로
$a_3=\frac{4}{2}=2$가 되어 $a_3\neq13$이다.
$a_2=26$인 경우, $a_1=26$
② $a_3=120$인 경우, $120=3\times40$이므로
$a_2=2\times120=240$, $a_1=240$
(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 a_1의 값의 합은
$18+26+240=284$

16. [출제의도] 지수함수의 성질을 활용하여 방정식의 해를 구한다.

$3^{-x}=3^{3x-24}$에서 $-x=3x-24$, $x=6$

17. [출제의도] 곱의 미분법을 이해하여 미분계수의 값을 구한다.

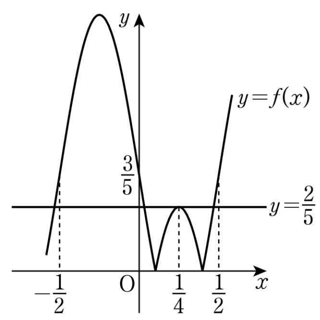
$f'(x)=(2x+3)(x^2-x+2)+(x^2+3x)(2x-1)$
$f'(2)=7\times4+10\times3=58$

18. [출제의도] $\sum$의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$\sum_{n=1}^{9}ca_n=c\times\sum_{n=1}^{9}a_n$, $\sum_{n=1}^{9}(a_n+c)=\sum_{n=1}^{9}a_n+\sum_{n=1}^{9}c$
$\sum_{n=1}^{9}a_n=A$라 하면
$cA=16$ …… ㉠
$A+9c=24$ …… ㉡
㉠, ㉡에서
$A^2-24A+144=0$, $A=12$
따라서 $\sum_{n=1}^{9}a_n=12$

19. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이해하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

(가)에서 $f(x)=0$이고 $-\frac{1}{a}\le x\le\frac{1}{a}$인 모든 실수 x의 값의 합이 $\frac{1}{2}$이 되기 위해서는 $\frac{1}{2a}=\frac{1}{2}$ 또는 $\frac{1}{a}=\frac{1}{2}$, $a=1$ 또는 $a=2$이다.
$a=1$이면 $b=-1$이고 $-\frac{1}{a}\le x\le\frac{1}{a}$에서
$f(x)=\frac{2}{5}$인 모든 실수 x의 값의 합이 1이 되어 (나)를 만족시키지 않는다.
$a=2$이면 (나)에 의해 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{5}$가 세 점에서 만나야 하므로
$f\left(\frac{1}{4}\right)=\left|\sin\frac{\pi}{2}+b\right|=|1+b|=\frac{2}{5}$
$b=-\frac{7}{5}$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나지 않으므로 $b=-\frac{3}{5}$
따라서 $60(a+b)=60\left(2-\frac{3}{5}\right)=60\times\frac{7}{5}=84$



20. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 활용하여 문제를 해결한다.

$\{f(x)\}^2=2\int_{3}^{x}(t^2+2t)f(t)\,dt$ …… ㉠
㉠에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=0$
㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면
$2f(x)f'(x)=2(x^2+2x)f(x)$
$2f(x)\{f'(x)-x^2-2x\}=0$
$f(x)=0$ 또는 $f'(x)=x^2+2x$
함수 $f(x)$에 대하여 집합 $A=\{x|f(x)\neq0\}$이라 하자. $A=\varnothing$이면 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=0$ …… ㉡
$A\neq\varnothing$이라 하자.
실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를
$g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+a$ (a는 실수)
라 하자. 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 연속이므로 $x\in A$인 모든 x에 대하여
$f(x)=g(x)$이다.
(ⅰ) $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지는 경우
함수 $g(x)$의 극댓값은 $g(-2)$이고
$g(-2)=\frac{4}{3}+a>0$
이므로 $g(3)=18+a\neq0$이다.
함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속이므로
$f(3)=\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}g(x)=g(3)=0$
그러므로 $g(x)=0$이 서로 다른 세 실근을 가지는 함수 $f(x)$는 존재하지 않는다.
(ⅱ) $g(x)=0$이 서로 다른 두 실근을 가지는 경우
함수 $g(x)$의 극댓값 또는 극솟값이 0이다.
$g(-2)=0$일 때, $g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{4}{3}$
$g(0)=0$일 때, $g(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2$
$f(3)=0$이고 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

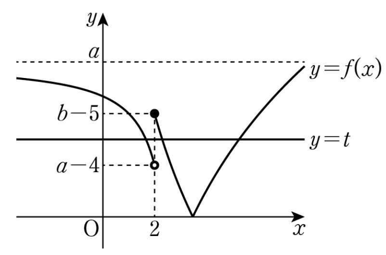
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+x^2-\frac{4}{3} & (x<-2)\\ 0 & (x\ge-2)\end{cases} \quad\cdots\cdots ㉢$$

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+x^2 & (x<0)\\ 0 & (x\ge0)\end{cases} \quad\cdots\cdots ㉣$$

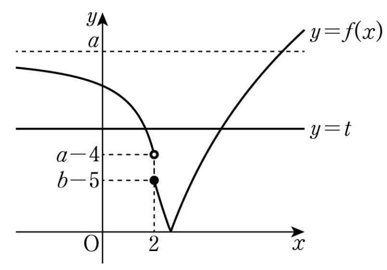
(ⅲ) $g(x)=0$이 오직 하나의 실근을 가지는 경우
하나의 실근을 α라 하면 함수 $f(x)$, $g(x)$가 연속이므로
$f(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}f(x)=\lim_{x\to\alpha}g(x)=g(\alpha)=0$
이고 $f(3)=0$이므로 $\alpha=3$이다.
$g(3)=18+a=0$, $a=-18$
이므로 모든 실수 x에 대하여
$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-18$ …… ㉤
조건을 만족시키는 $f(x)$는 ㉡과 (ⅰ)~(ⅲ)에서 ㉢, ㉣, ㉤이므로 정적분 $\int_{-3}^{0}f(x)\,dx$의 값이 최대가 되는 $f(x)$는 ㉣, 최소가 되는 $f(x)$는 ㉤이다.
$M-m=\int_{-3}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2\right)dx-\int_{-3}^{0}\left(\frac{1}{3}x^3+x^2-18\right)dx$
$=\int_{-3}^{0}18\,dx=54$

21. [출제의도] 로그함수의 성질을 활용하여 상수를 추론한다.

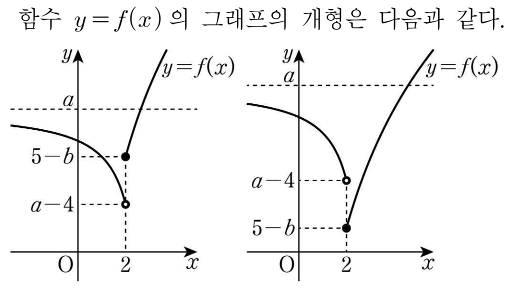
$x<2$에서 함수 $y=\frac{4}{x-3}+a$는 감소한다.
함수 $y=5\log_2 x-b$는 증가하고 $f(2)=|5-b|$이다.
(ⅰ) $5-b<0$, $b>5$인 경우
$a-4<b-5$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



(가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 서로 다른 세 점에서 만나지 않아야 하므로 아래 그림과 같이 $a-4\ge b-5$, $b-a\le1$을 만족시켜야 한다.



(나)에서 $g(t)=2$가 되도록 하는 자연수 t는 $a-1$, $a-2$, $a-3$과 $b-5$ 이하의 자연수이므로 t의 개수가 6이면 $b-5=3$, $b=8$이다.
$b-a\le1$이므로 $8-a\le1$에서 $a\ge7$이다.
그러므로 $a\ge7$, $b=8$이다.
(ⅱ) $5-b\ge0$, $b\le5$인 경우
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$g(t)=2$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 $x<2$에서 한 점에서 만나고, $x\ge2$에서

한 점에서 만난다.

그런데 $x<2$에서 $a-4<f(x)<a$이고, $a-4$보다 크고 a보다 작은 정수는 $a-3$, $a-2$, $a-1$로 3개뿐이므로 자연수 t의 최대 개수는 3이고 (나)를 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a \ge 7$, $b=8$이므로 $a+b \ge 15$

따라서 $a+b$의 최솟값은 15이다.

22. [출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성을 이용하여 함수를 추론한다.

실수 t에 대하여 $f(t)>0$이면 $g(x)=f(x)+x$이므로 함수 $g(x)$는 $x=t$에서 연속이고 미분가능하다. $f(t)<0$이면 $g(x)=2f(x)$이므로 함수 $g(x)$는 $x=t$에서 연속이고 미분가능하다. $f(t)=0$이면 아래와 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

- $x=t$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 서로 다른 경우
  $g(t)=f(t)+t=t$
  $\lim\limits_{x\to t-}g(x)=\lim\limits_{x\to t-}\{f(x)+x\}=f(t)+t=t$,
  $\lim\limits_{x\to t+}g(x)=\lim\limits_{x\to t+}2f(x)=2f(t)=0$
  또는
  $\lim\limits_{x\to t-}g(x)=\lim\limits_{x\to t-}2f(x)=2f(t)=0$,
  $\lim\limits_{x\to t+}g(x)=\lim\limits_{x\to t+}\{f(x)+x\}=f(t)+t=t$이므로
  함수 $g(x)$는 $t=0$이면 $x=t$에서 연속이고 $t\neq 0$이면 $x=t$에서 불연속이다.
- $x=t$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 모두 양인 경우
  $g(t)=f(t)+t=t$,
  $\lim\limits_{x\to t}g(x)=\lim\limits_{x\to t}\{f(x)+x\}=f(t)+t=t$이므로
  함수 $g(x)$는 $x=t$에서 연속이다.
- $x=t$의 좌우에서 $f(x)$의 부호가 모두 음인 경우
  $g(t)=f(t)+t=t$,
  $\lim\limits_{x\to t}g(x)=\lim\limits_{x\to t}2f(x)=2f(t)=0$이므로
  함수 $g(x)$는 $t=0$이면 $x=t$에서 연속, $t\neq 0$이면 $x=t$에서 불연속이다.

$f(x)=0$을 만족시키는 실근의 개수가 1이면 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않은 t의 개수가 1 이하이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

$f(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수가 3이면 0이 아닌 서로 다른 실근의 개수가 2 이상이고 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 불연속인 t의 개수가 2 이상이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(x)=0$을 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 2이고 $a<b$인 두 실수 a, b가 존재하여

$f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 또는 $f(x)=(x-a)^2(x-b)$

(i) $f(x)=(x-a)(x-b)^2$인 경우

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(b+h-a)h^2+h}{h}=1$$

$g'(b)=1$이며 함수 $g(x)$가 $x=t$에서 미분가능하지 않은 실수 t의 개수가 1 이하이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$, $a\neq 0$, $b\neq 0$인 경우

함수 $g(x)$가 $x=a$, $x=b$에서 불연속이므로 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$, $a=0$, $b\neq 0$인 경우

$x=a$에서 연속이며 $g(a)=f(a)+a=0$이다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2(a+h-b)}{h}=0$$

$g'(a)=0$이므로 (나)를 만족시키지 않는다.

(iv) $f(x)=(x-a)^2(x-b)$, $a\neq 0$, $b=0$인 경우

함수 $g(x)$는 $x=a$에서 불연속이며 미분가능하지 않다. $x=b$에서 연속이며 $g(b)=f(b)+b=0$

$$\lim_{h\to 0-}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to 0-}\frac{2h(h-a)^2}{h}=2a^2$$

$$\lim_{h\to 0+}\frac{g(b+h)-g(b)}{h}=\lim_{h\to 0+}\frac{(h-a)^2h+h}{h}$$
$$=a^2+1$$

$2a^2\neq a^2+1$, $a^2\neq 1$이면 함수 $g(x)$는 $x=b$에서 미분가능하지 않다.

(i) ~ (iv)에서 $f(x)=x(x-a)^2$, $a<0$, $a^2\neq 1$

$f(-2)=-2(-2-a)^2=-2$에서 $a=-3$

따라서 $f(x)=x(x+3)^2$이고 $f(6)=486$

[확률과 통계]

23	①	24	③	25	②	26	⑤	27	④
28	②	29	48	30	61				

23. [출제의도] 같은 것이 있는 순열의 수를 계산한다.

문자 a, a, b, b를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{4!}{2!\times 2!}=6$

24. [출제의도] 사건의 독립을 이해하여 확률을 구한다.

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A^C\cap B)=\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{1}{6}$

두 사건 A, B는 서로 독립이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\times\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)\times\dfrac{1}{6}$

$\mathrm{P}(A)=6\times\mathrm{P}(A\cap B)=6\times\dfrac{1}{15}=\dfrac{2}{5}$

25. [출제의도] 이항정리를 이해하여 항의 계수를 구한다.

$(x-1)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r(-1)^r x^{5-r}$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

$(2x+5)(x-1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는

$2\times{}_5\mathrm{C}_3(-1)^3+5\times{}_5\mathrm{C}_2(-1)^2=30$

26. [출제의도] 모평균의 신뢰구간을 이해하여 표본의 크기와 신뢰구간을 구한다.

다회용 컵 n개를 임의추출하여 얻은 표본평균이 67.27이므로 모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$67.27-1.96\times\dfrac{0.5}{\sqrt{n}}\le m\le 67.27+1.96\times\dfrac{0.5}{\sqrt{n}}$

$67.41=67.27+1.96\times\dfrac{0.5}{\sqrt{n}}$, $n=49$

$a=67.27-1.96\times\dfrac{0.5}{\sqrt{n}}=67.27-1.96\times\dfrac{0.5}{7}=67.13$

따라서 $n+a=49+67.13=116.13$

27. [출제의도] 이산확률변수의 확률분포를 이해하여 확률을 구한다.

숫자 1, 2, 3이 적혀 있는 공의 개수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=7$

$\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{{}_b\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}=\dfrac{b(b-1)}{42}=\dfrac{1}{21}$에서

$b(b-1)=2$, $b=2$이므로 $a+c=5$ …… ㉠

$2\mathrm{P}(X=2)=3\mathrm{P}(X=6)$에서

$2\times\dfrac{{}_a\mathrm{C}_1\times{}_b\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}=3\times\dfrac{{}_b\mathrm{C}_1\times{}_c\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}$, $2a=3c$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $a=3$, $c=2$

따라서 $\mathrm{P}(X\le 3)=\mathrm{P}(X=1)+\mathrm{P}(X=2)+\mathrm{P}(X=3)$

$$=\frac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}+\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1}{{}_7\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{5}{7}$$

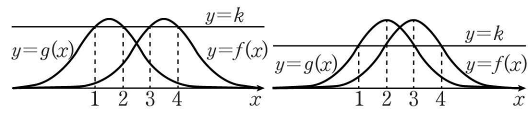
28. [출제의도] 정규분포의 성질을 이용하여 확률을 추론한다.

$\mathrm{E}(X)=m_1$, $\mathrm{E}(Y)=m_2$라 하면 두 확률변수 X, Y는 각각 정규분포 $\mathrm{N}(m_1,\ 1^2)$, $\mathrm{N}(m_2,\ 1^2)$을 따른다.

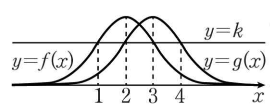
$m_1=m_2$이면 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

$m_1\neq m_2$일 때, $f(x)=g(x)$를 만족시키는 x를 a라 하자. $k=f(a)$이면 조건 (나)를 만족시키지 못한다.

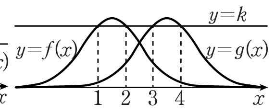
$m_1>m_2$이면 $k<f(a)$, $k>f(a)$인 두 가지 경우 모두 $\mathrm{P}(X\le 2)-\mathrm{P}(Y\le 2)$의 값은 음수이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.



$m_1<m_2$이면



[그림 1]



[그림 2]

$k<f(a)$일 때, 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 개형은 [그림 1]과 같다.

$f(1)=f(3)=k$이므로 $m_1=2$

$\mathrm{P}(X\le 2)=0.5$

$\mathrm{P}(X\le 2)-\mathrm{P}(Y\le 2)<0.5$이므로 조건 (다)를 만족시키지 못한다.

$k>f(a)$일 때, 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 개형은 [그림 2]와 같다.

$f(1)=f(2)=k$이므로 $m_1=1.5$

$g(3)=g(4)=k$이므로 $m_2=3.5$

$\mathrm{V}(X)=\mathrm{V}(Y)=1^2$이므로

$\mathrm{P}(X\le 2)-\mathrm{P}(Y\le 2)$

$=\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{2-1.5}{1}\right)-\mathrm{P}\left(Z\le\dfrac{2-3.5}{1}\right)$

$=\{0.5+\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)\}-\{0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)\}$

$=0.6247$

이므로 조건 (가), (나), (다)를 만족시킨다.

따라서

$\mathrm{P}(X\ge 2.5)=\mathrm{P}\left(Z\ge\dfrac{2.5-1.5}{1}\right)=\mathrm{P}(Z\ge 1)$

$=0.5-\mathrm{P}(0\le Z\le 1)=0.1587$

29. [출제의도] 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하는 문제를 해결한다.

조건 (가)에 의하여 $f(1)\le f(2)\le f(3)\le f(4)$

조건 (나)에 의하여 $f(a)=a$인 X의 원소 a의 값에 따라 다음과 같이 경우를 나눌 수 있다.

(i) $f(1)=1$인 경우

$f(2)=1$일 때, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{H}_2-({}_3\mathrm{C}_1+{}_4\mathrm{C}_1-1)=9$

$f(2)=3$일 때, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_2-({}_3\mathrm{C}_1+{}_2\mathrm{C}_1-1)=2$

$f(2)=4$일 때, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_2\mathrm{H}_2-1=2$

$f(2)=5$일 때, $f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 1

이 경우 함수 f의 개수는 $9+2+2+1=14$

(ii) $f(2)=2$인 경우

$f(3)$, $f(4)$의 값을 정하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{H}_2-({}_3\mathrm{C}_1+{}_3\mathrm{C}_1-1)=5$

각 경우에 $f(1)$의 값을 정하는 경우의 수는 2

따라서 이 경우 함수 f의 개수는 $5\times 2=10$

$f(3)=3$인 경우 (ii)와 같고, $f(4)=4$인 경우 (i)과 같다.

따라서 구하는 함수 f의 개수는 $2\times(14+10)=48$

30. [출제의도] 조건부확률을 이용하여 확률을 구하는 문제를 해결한다.

시행을 4번 반복한 후 점 P의 좌표가 0 이상인 사건을 A, 확인한 4개의 수의 곱이 홀수인 사건을 B라 하자.

(ⅰ) 확인한 4개의 수의 곱이 홀수인 경우

확인한 4개의 수가 모두 홀수이고, 이때 점 P의 좌표는 항상 0 이상이므로

$\mathrm{P}(A\cap B)={}_4\mathrm{C}_4\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

(ⅱ) 확인한 4개의 수의 곱이 짝수인 경우

확인한 4개의 수 중 짝수의 개수가 3 또는 4인 경우에는 점 P의 좌표가 0 미만이다.

① 확인한 짝수의 개수가 2인 경우

확인한 4개의 수가 2, 2, 1, 3 또는 2, 2, 3, 3 또는 2, 4, 3, 3일 때 점 P의 좌표가 0 이상이므로 확인한 4개의 수가

2, 2, 1, 3일 확률은 $\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$

2, 2, 3, 3일 확률은 $\frac{4!}{2!\times2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$

2, 4, 3, 3일 확률은 $\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$

따라서 구하는 확률은

$\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\frac{4!}{2!\times2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+\frac{4!}{2!}\times\left(\frac{1}{4}\right)^4$

$=(12+6+12)\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{15}{128}$

② 확인한 짝수의 개수가 1인 경우

확인한 4개의 수가 짝수 1개와 홀수 3개인 경우에서 4, 1, 1, 1인 경우만 제외하면 점 P의 좌표가 0 이상이므로 구하는 확률은

${}_4\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{2}\right)^4-{}_4\mathrm{C}_1\times\left(\frac{1}{4}\right)^4=\frac{15}{64}$

①, ②에서 $\mathrm{P}(A\cap B^C)=\frac{15}{128}+\frac{15}{64}=\frac{45}{128}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^C)}$$

$$=\frac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{45}{128}}=\frac{8}{53}$$

따라서 $p=53$, $q=8$이므로 $p+q=61$

[미적분]

23	②	24	⑤	25	④	26	③	27	①
28	②	29	5	30	40				

23. [출제의도] 함수의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-1}{\ln(1+2x)}=\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{1}{\frac{\ln(1+2x)}{2x}}\times\frac{3}{2}\right\}$$

$$=\frac{3}{2}$$

24. [출제의도] 적분법을 이해하여 적분값을 구한다.

$\frac{\pi}{3}-x=t$로 놓으면, $-\frac{dx}{dt}=1$이고

$x=0$일 때 $t=\frac{\pi}{3}$, $x=\frac{\pi}{3}$일 때 $t=0$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx=-\int_{\frac{\pi}{3}}^{0}\cos t\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos t\,dt$$

$$=\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

25. [출제의도] 수열의 극한에 대한 기본 성질을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

수열 a_n이 수렴하도록 하는 자연수 k의 값은 1 또는 2이다.

(ⅰ) $k=1$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}{(1+b)\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{a+1}{1+b}=\frac{1}{2},\ 2a=b-1$$

(ⅱ) $k=2$인 경우

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a+\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+b\times\left(\frac{1}{2}\right)^n}=a=1$$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=1$, $b=3$

따라서 $a+b=4$

26. [출제의도] 정적분을 이해하여 입체도형의 부피를 구한다.

x좌표가 $t(2\le t\le 4)$인 점을 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면 $S(t)=\left(\sqrt{(5-t)\ln t}\right)^2=(5-t)\ln t$

따라서 구하는 부피는

$$\int_2^4 S(t)dt$$

$$=\int_2^4\ln t\times(5-t)dt$$

$$=\left[\ln t\times\left(5t-\frac{1}{2}t^2\right)\right]_2^4-\int_2^4\left(5-\frac{1}{2}t\right)dt$$

$$=(12\ln4-8\ln2)-\left[5t-\frac{1}{4}t^2\right]_2^4$$

$$=16\ln2-7$$

27. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 구하는 문제를 해결한다.

$g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 역함수를 가지려면 $g(x)$는 일대일대응이어야 한다.

$f'(x)=3e^{3x}-a$, $g'(x)=\begin{cases}f'(x) & (x>k)\\ -f'(x) & (x<k)\end{cases}$에서

$a\le0$이면 모든 실수 x에 대해 $f'(x)>0$이다.

$x>k$일 때 $g'(x)>0$이고 $x<k$일 때 $g'(x)<0$이므로 $g(x)$는 역함수를 갖지 않는다.

$a>0$이면 $f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$이고

$x<\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$이면 $f'(x)<0$,

$x>\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$이면 $f'(x)>0$이므로 $k=\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}$

$g(x)$가 $x=k$에서 연속이므로

$f(k)=-f(k)$, $f(k)=0$

$f(k)=f\left(\frac{1}{3}\ln\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{3}-\frac{a}{3}\ln\frac{a}{3}=0$, $a=3e$, $k=\frac{1}{3}$

따라서 $a\times k=e$

28. [출제의도] 정적분과 급수의 합 사이의 관계를 이해하여 급수의 합을 구한다.

a_m은 두 곡선 $y=\frac{2\pi}{x}$와 $y=\cos x$의 교점의 x좌표이므로 $\frac{2\pi}{a_m}=\cos(a_m)$

$$n\times\cos^2(a_{n+k})=n\times\frac{4\pi^2}{(a_{n+k})^2}$$

$a_1=2\pi$, $m>1$에서 $m\pi<a_m<(m+1)\pi$이므로

$$\frac{4n}{(n+k+1)^2}<n\times\cos^2(a_{n+k})<\frac{4n}{(n+k)^2}\text{이다.}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{(n+k)^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}\times\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{4}{(1+x)^2}dx=\left[-\frac{4}{1+x}\right]_0^1=2\text{이고}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{4n}{(n+k+1)^2}-\frac{4n}{(n+k)^2}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4n}{(2n+1)^2}-\frac{4n}{(n+1)^2}\right\}=0\text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{4n}{(n+k+1)^2}=2$$

수열의 극한의 대소 관계의 성질에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{n\times\cos^2(a_{n+k})\right\}=2$$

29. [출제의도] 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구하는 문제를 해결한다.

직선 l의 기울기는 $\tan\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$이므로

직선 l의 방정식은 $y=(\tan\theta)x+1$

직선 $y=(\tan\theta)x+1$이 곡선 $y=e^{\frac{x}{a}}-1$과 만나는 점의 x좌표가 $f(\theta)$이므로

$\tan\theta\times f(\theta)+1=e^{\frac{f(\theta)}{a}}-1$ …… ㉠

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $a+1=e-1$, $a=e-2$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$\sec^2\theta\times f(\theta)+\tan\theta\times f'(\theta)=\frac{f'(\theta)}{a}e^{\frac{f(\theta)}{a}}$에서

$\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, $2(e-2)+f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{e-2}\times e$

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=(e-2)^2$이므로 $\sqrt{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}=e-2$

따라서 $p=1$, $q=-2$이므로 $p^2+q^2=5$

30. [출제의도] 미분법을 활용하여 함수를 추론한다.

$f'(x)=\{-ax^2+(2a-b)x+b\}e^{-x}$

$f''(x)=\{ax^2-(4a-b)x+2a-2b\}e^{-x}$

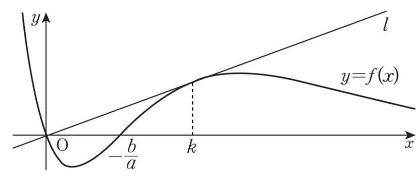
점 $(0,0)$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프에 그은 접선 중 기울기가 $f'(0)$이 아닌 접선이 존재할 때 그 접선을 l이라 하자. 접선 l의 접점을 $(k, f(k))$라 하면 $k\ne0$이다.

$\frac{f(k)}{k}=f'(k)$

$(ak+b)e^{-k}=(-ak^2+(2a-b)k+b)e^{-k}$

$k=-\frac{b}{a}+1$이고, $f'(k)=ae^{-k}$, $f''(k)=-ake^{-k}$

$\frac{b}{a}<0$일 때, 직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고 $f'(t)>f'(k)$인 t가 존재하면 방정식 $f(x)=f'(t)\times x$의 실근은 0뿐이다.



$f''(0)=2a-2b$에서 $f''(0)\times f''(k)<0$이므로

$0<\alpha<k$이고 $f''(\alpha)=0$인 α가 존재하고,

$\alpha<t<k$인 임의의 t에 대하여 $f''(t)<0$이다.

이때, $\alpha<t_1<k$, $\alpha<t_2<k$인

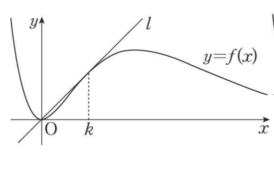
두 실수 t_1, $t_2(t_1<t_2)$가 존재하고

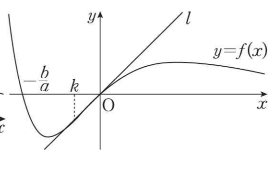
$f'(t_1)>f'(k)$, $f'(t_2)>f'(k)$이다.

t가 t_1 또는 t_2일 때, $\{x|f(x)=f'(t)\times x\}=\{0\}$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

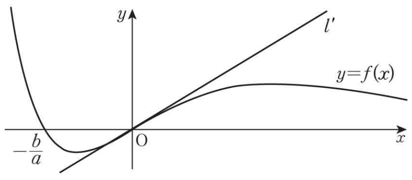
$\frac{b}{a}\ge0$, $\frac{b}{a}\ne1$일 때, 직선 l과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같고 $f'(t)>f'(k)$인 t가 존재하면 방정식 $f(x)=f'(t)\times x$의 실근은 0뿐이다.





$f''(0)\times f''(k)<0$이므로 $\frac{b}{a}<0$일 때와 마찬가지로 조건 (가)를 만족시키지 못한다.

$\frac{b}{a}=1$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(0,0)$에서의 접선을 l'이라 하면 직선 l'과 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$t=0$일 때, 방정식 $f(x)=f'(t)\times x$에서
$a=b$이므로 $a(x^2+x)e^{-x}=f'(0)x$
$f'(0)=a$이므로 $ax(x+1)e^{-x}=ax$
$ax\{(x+1)e^{-x}-1\}=0$
$x=0$ 또는 $(x+1)e^{-x}-1=0$이므로
방정식 $f(x)=f'(t)\times x$의 실근은 0뿐이다.
$f''(0)=0$이고 0이 아닌 모든 실수 t에 대하여 $f'(t)<f'(0)$이다. 따라서 0이 아닌 모든 실수 t에 대하여 $\{x|f(x)=f'(t)\times x\}\neq\{0\}$이므로 조건 (가)를 만족시킨다.
조건 (나)에서 $f(2)=(4a+2b)e^{-2}=2e^{-2}$
$2a+b=1$이다. $a=b$이므로 $a=b=\frac{1}{3}$

따라서 $60\times(a+b)=60\times\frac{2}{3}=40$

[기하]

23	②	24	①	25	③	26	⑤	27	④
28	①	29	8	30	20				

23. [출제의도] 쌍곡선을 이용하여 쌍곡선의 두 초점 사이의 거리를 계산한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$의 초점의 x좌표는
$\pm\sqrt{2+1}=\pm\sqrt{3}$
따라서 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{3}$

24. [출제의도] 좌표공간에서 선분의 내분점을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(3,\,-1,\,-a)$이고 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이 x축 위에 있으므로
$\frac{1\times b+2\times(-1)}{3}=0$, $\frac{1\times4+2\times(-a)}{3}=0$에서
$b=2$, $a=2$
따라서 $a+b=2+2=4$

25. [출제의도] 평면벡터의 내적을 이해하여 벡터의 크기를 구한다.

$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}+\vec{b})=4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=8+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$ …… ㉠
$(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1$ …… ㉡
㉠, ㉡에서 $\vec{a}\cdot\vec{b}=1$, $|\vec{b}|=1$
$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$
$=(\sqrt{2})^2+2\times1+1^2=5$
따라서 $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{5}$

26. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 접선의 절편을 구한다.

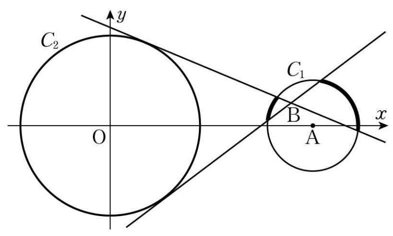
$y^2=12x$의 초점 F의 좌표는 $(3,\,0)$이고
$\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=3:1$이므로 두 양수 a, b에 대하여 $\mathrm{B}(3-a,\,-b)$라 하면 $\mathrm{A}(3+3a,\,3b)$
이 포물선의 준선은 $x=-3$이므로 포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{AF}}=6+3a$, $\overline{\mathrm{BF}}=6-a$이다.
$(6+3a):(6-a)=3:1$, $18-3a=6+3a$, $a=2$
점 B는 $y^2=12x$ 위의 점이므로, $b^2=12$, $b=2\sqrt{3}$
이 포물선 위의 점 $\mathrm{A}(9,\,6\sqrt{3})$에서의 접선의 방정식은 $6\sqrt{3}y=6(x+9)$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x+3\sqrt{3}$
따라서 접선의 y절편은 $3\sqrt{3}$

27. [출제의도] 삼수선의 정리를 이용하여 정사영을 추론한다.

$\overline{\mathrm{FH}}=2\sqrt{2}$, $\overline{\mathrm{HM}}=1$이므로 $\overline{\mathrm{FM}}=3$
선분 NP의 길이가 최소이려면
$\overline{\mathrm{NP}}\perp\overline{\mathrm{FM}}$이어야 한다.
점 N에서 평면 FHM에 내린 수선의 발을 Q라 하면, 평면 FHM과 평면 FGH가 수직이므로 점 Q는 선분 FH 위에 있다.
삼각형 HNQ는 직각이등변삼각형이고 $\overline{\mathrm{HN}}=1$이므로
$\overline{\mathrm{HQ}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{\mathrm{FQ}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$
$\overline{\mathrm{NP}}\perp\overline{\mathrm{FM}}$, $\overline{\mathrm{NQ}}\perp$(평면 FHM)이므로
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{FM}}\perp\overline{\mathrm{PQ}}$
삼각형 FHM에서 $\sin(\angle\mathrm{MFH})=\frac{1}{3}$
선분 NP의 평면 FHM 위로의 정사영은 선분 PQ이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{FQ}}\times\sin(\angle\mathrm{MFH})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

28. [출제의도] 평면벡터의 내적을 이해하여 두 벡터가 이루는 각의 크기를 구한다.

조건 (가)에서 점 X는 중심이 $\mathrm{A}(9,\,0)$이고 반지름의 길이가 2인 원 C_1 위의 점이다. 원 C_1 위의 점 X 중에서 x좌표가 최대인 점의 좌표는 $(11,\,0)$이다.
조건 (나)에서 0이 아닌 실수 k에 대하여 $k\overrightarrow{\mathrm{BX}}$의 종점을 X′이라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{BX}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BX'}}=\overrightarrow{\mathrm{OX'}}$이므로 X′은 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원 C_2 위의 점이다. 즉, 집합 S에 속하는 점 X에 대해 직선 BX는 원 C_2와 만난다.



점 B에서 원 C_2에 그은 접선의 기울기를 m이라 하면 접선의 방정식은
$y=m(x-8)+1$, $mx-y+(1-8m)=0$
원점과 직선 $mx-y+(1-8m)=0$ 사이의 거리가 4이므로 $\frac{|1-8m|}{\sqrt{m^2+1}}=4$
$(1-8m)^2=16(m^2+1)$, $(4m-3)(12m+5)=0$
$m=-\frac{5}{12}$ 또는 $m=\frac{3}{4}$
집합 S에 속한 모든 점 X에 대하여 직선 BX의 기울기는 $-\frac{5}{12}$ 이상 $\frac{3}{4}$ 이하이다.
두 점 $\mathrm{B}(8,\,1)$과 $(11,\,0)$을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{0-1}{11-8}=-\frac{1}{3}>-\frac{5}{12}$이므로 점 $(11,\,0)$은 집합 S에 속하고 점 P의 좌표는 $(11,\,0)$이다.
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(11,\,0)$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(3,\,-1)$이므로
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{BP}}|\cos\theta$
$11\times3+0\times(-1)=11\times\sqrt{3^2+(-1)^2}\times\cos\theta$
$\cos\theta=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

29. [출제의도] 타원의 성질을 이용하여 타원의 초점의 좌표를 구하는 문제를 해결한다.

두 타원의 장축의 길이가 각각 8, 12이므로
$\overline{\mathrm{FQ}}=t$라 하면 $\overline{\mathrm{F'Q}}=8-t$, $\overline{\mathrm{PQ}}=12-t$
$\overline{\mathrm{F'Q}}$, $\overline{\mathrm{FQ}}$, $\overline{\mathrm{PQ}}$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로
$2\overline{\mathrm{FQ}}=\overline{\mathrm{F'Q}}+\overline{\mathrm{PQ}}$, $2t=(8-t)+(12-t)$, $t=5$
$\overline{\mathrm{F'Q}}=3$, $\overline{\mathrm{FQ}}=5$, $\overline{\mathrm{PQ}}=7$
$\overline{\mathrm{F'Q}}=3$, $\overline{\mathrm{FF'}}=4$, $\overline{\mathrm{FQ}}=5$이므로
삼각형 QFF′은 $\angle\mathrm{QF'F}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형이다.
직각삼각형 PQF′에서
$\overline{\mathrm{F'P}}^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2-\overline{\mathrm{F'Q}}^2=7^2-3^2=40$, $\overline{\mathrm{F'P}}=2\sqrt{10}$
원점을 O라 하면 $a=\overline{\mathrm{F'P}}-\overline{\mathrm{F'O}}=-2+2\sqrt{10}$
따라서 $p=-2$, $q=2$이므로
$p^2+q^2=8$

30. [출제의도] 공간도형의 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$\angle\mathrm{RCP}=\angle\mathrm{ACP}$이므로 $\cos(\angle\mathrm{RCP})=\frac{1}{4}$
$\overline{\mathrm{RC}}=\frac{1}{2}$이므로 삼각형 RCP에서 코사인법칙에 의해
$\overline{\mathrm{RP}}^2=\overline{\mathrm{RC}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2-2\times\overline{\mathrm{RC}}\times\overline{\mathrm{PC}}\times\cos(\angle\mathrm{RCP})$
$=\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2-2\times\frac{1}{2}\times1\times\frac{1}{4}=1$
이므로 $\overline{\mathrm{RP}}=1$, 마찬가지로 $\overline{\mathrm{QR}}=1$
두 삼각형 PQC, PQR은 서로 합동이므로
$\angle\mathrm{PCQ}=\angle\mathrm{PRQ}=\frac{\pi}{2}$이고, 네 점 C, P, Q, R을 모두 지나는 구를 S라 하면 구 S의 중심은 선분 PQ의 중점이고 구 S의 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{2}}{2}$이다.
구 S의 중심을 O라 하자.
구 S위의 점 중 직선 AB와의 거리가 최소인 점 S에 대하여 점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 M이라 하면 삼각형 ABS의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\left(\overline{\mathrm{OM}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$이다.
점 O에서 선분 BD에 내린 수선의 발을 N이라 하면 N은 선분 BD의 중점이다.
$\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BN}}=\sqrt{2}$이므로
$\overline{\mathrm{AN}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{BN}}^2}=\sqrt{4^2-(\sqrt{2})^2}=\sqrt{14}$
$\overline{\mathrm{ON}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로
$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AN}}^2+\overline{\mathrm{ON}}^2}=\sqrt{(\sqrt{14})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{29}{2}}$
$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{\overline{\mathrm{BN}}^2+\overline{\mathrm{ON}}^2}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$
삼각형 OAB에서 코사인법칙에 의해
$\cos(\angle\mathrm{OBA})=\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-\overline{\mathrm{OA}}^2}{2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OB}}}$
$=\frac{4^2+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{29}{2}}\right)^2}{2\times4\times\sqrt{\frac{5}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$
이므로 $\sin(\angle\mathrm{OBA})=\frac{3}{\sqrt{10}}$
$\overline{\mathrm{OM}}=\overline{\mathrm{OB}}\times\sin(\angle\mathrm{OBA})=\sqrt{\frac{5}{2}}\times\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{3}{2}$
따라서 삼각형 ABS의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\left(\overline{\mathrm{OM}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{2}\times4\times\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$=3-\sqrt{2}$
삼각형 OAB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\times4\times\frac{3}{2}=3$
삼각형 OBN의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BN}} \times \overline{\mathrm{ON}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$

두 평면 OAB와 BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하자. 삼각형 OAB의 평면 BCD 위로의 정사영은 삼각형 OBN이므로 $3 \times \cos\theta = \frac{1}{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{6}$

두 평면 ABS와 BCD가 이루는 각의 크기는 두 평면 OAB와 BCD가 이루는 각의 크기와 같으므로 삼각형 ABS의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는

$(3 - \sqrt{2}) \times \cos\theta = (3 - \sqrt{2}) \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6}$

따라서 $p = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{6}$이므로

$60 \times (p+q) = 60 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right) = 60 \times \frac{1}{3} = 20$