2025학년도 대학수학능력시험
수학영역 정답 및 풀이

■ [공통: 수학Ⅰ·수학Ⅱ]

01. ⑤	02. ④	03. ⑤	04. ②	05. ④
06. ⑤	07. ③	08. ①	09. ④	10. ③
11. ②	12. ①	13. ⑤	14. ④	15. ②
16. 7	17. 33	18. 96	19. 41	
20. 36	21. 16	22. 64		

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sqrt[3]{5}\times 25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{1}{3}}\times(5^2)^{\frac{1}{3}}$$
$$=5^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}$$
$$=5^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$$
$$=5^1=5$$

정답 ⑤

2. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f'(x)=3x^2-8$이므로

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

$=f'(2)$

$=3\times 2^2-8$

$=4$

정답 ④

3. **출제의도** : 등비수열의 일반항을 이용하여 양수 k의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 양수 k이므로

$a_n=k^n$

$\dfrac{a_4}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_1}=30$에서

$\dfrac{k^4}{k^2}+\dfrac{k^2}{k}=30$

$k^2+k=30$

$k^2+k-30=0$

$(k+6)(k-5)=0$

$k>0$이므로

$k=5$

정답 ⑤

4. **출제의도** : 함수의 연속의 정의를 이해하고 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=-2$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim\limits_{x\to -2-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2+}f(x)=f(-2)$에서

$\lim\limits_{x\to -2-}f(x)=\lim\limits_{x\to -2-}(5x+a)=-10+a$

$\lim\limits_{x\to -2+}f(x)=\lim\limits_{x\to -2+}(x^2-a)=4-a$

$f(-2)=4-a$

이므로

$-10+a=4-a$, $a=7$

따라서 상수 a의 값은 7이다.

정답 ②

5. **출제의도** : 함수의 곱의 미분법을 사용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=(x^2+1)(3x^2-x)$ 에서

$f'(x)=2x\times(3x^2-x)+(x^2+1)\times(6x-1)$

따라서

$f'(1)=2\times2+2\times5=14$

정답 ④

6. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\frac{1}{5}$ 에서

$\sin\theta=\frac{1}{5}$

따라서

$\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}=\frac{\sin\theta}{\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin\theta}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$

정답 ⑤

7. **출제의도** : 정적분으로 정의된 함수를 이해하고 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\int_0^x f(t)\,dt=3x^3+2x$의 양변을 x에 대해 미분하면

$f(x)=9x^2+2$

따라서

$f(1)=9\times1^2+2=11$

정답 ③

8. **출제의도** : 로그의 정의와 성질을 이용하여 값을 간단히 나타낼 수 있는가?

풀이 :

$a=2\log\frac{1}{\sqrt{10}}+\log_2 20$

$=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)\log 10+\log_2 2+\log_2 10$

$=-1+1+\log_2 10=\log_2 10$

$a\times b=\log_2 10\times\log 2=1$

정답 ①

9. **출제의도** : 정적분의 정의와 성질을 이용하여 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx$ …… ㉠

㉠의 좌변은 정적분의 성질을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$\int_{-2}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

그러므로 ㉠에서

$\int_{-2}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{-2}^{0} f(x)dx$

즉, $\int_{0}^{a} f(x)dx = 0$

이때

$$\begin{aligned}\int_{0}^{a} f(x)dx &= \int_{0}^{a} (3x^2 - 16x - 20)dx \\ &= \left[x^3 - 8x^2 - 20x\right]_0^a \\ &= a^3 - 8a^2 - 20a\end{aligned}$$

이므로

$a^3 - 8a^2 - 20a = 0$에서

$a(a^2 - 8a - 20) = 0$

$a(a+2)(a-10) = 0$

따라서 양수 a의 값은 10이다.

정답 ④

10. **출제의도** : 코사인함수의 최댓값과 주기를 구할 수 있는가?

풀이 :

함수 $f(x) = a\cos bx + 3$의 그래프는 함수 $y = a\cos bx$의 그래프를 y축의 방향으로 3만큼 평행이동시킨 것이다.

a가 자연수이므로

$f(0) \geq f(x)$

이다.

한편, 함수 $y = a\cos bx + 3$의 주기는

$\frac{2\pi}{b}$

닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수 $f(x)$가 $x = \frac{\pi}{3}$에서 최댓값 13을 가지므로

$a + 3 = 13$ …… ㉠

$\frac{2\pi}{b} \leq \frac{\pi}{3}$ …… ㉡

이어야 한다.

㉠에서

$a = 10$

㉡에서

$b \geq 6$

따라서 $a+b$의 최솟값은 $b = 6$일 때

$10 + 6 = 16$

정답 ③

11. **출제의도** : 속도와 가속도를 구할 수 있는가?

풀이 :

점 P의 시각 t에서의 속도와 가속도를 각각 v, a라 하면

$v=x'=3t^2-3t-6$

$a=v'=6t-3$

이때 출발한 후 점 P의 운동 방향이 바뀌는 시각은

$v=3t^2-3t-6=3(t-2)(t+1)=0$

에서

$t=2$

따라서 $t=2$에서 점 P의 운동 방향이 바뀌므로 구하는 가속도는

$6\times2-3=9$

정답 ②

12. **출제의도** : 시그마의 성질을 이용하여 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}n^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에 $n=1$을 대입하면

$$\frac{a_1}{b_2}=\frac{1}{2}$$

$a_1=2$이므로 $b_2=4$

등차수열 $\{b_n\}$에서 $b_1=2$, $b_2=4$이므로 $\{b_n\}$은 첫째항이 2, 공차가 2인 등차수열이다.

즉, $b_n=2n$

한편, ㉠의 양변에 n 대신 $n-1$을 대입하면

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{b_{k+1}}=\frac{1}{2}(n-1)^2 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠−㉡을 하면

$$\frac{a_n}{b_{n+1}}=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}(n-1)^2=n-\frac{1}{2}$$

$b_{n+1}=2(n+1)$이므로

$$a_n=2(n+1)\left(n-\frac{1}{2}\right)$$
$$=2n^2+n-1\,(n\geq2)$$

이 때, $a_1=2$이므로

$a_n=2n^2+n-1$

따라서

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=\sum_{k=1}^{5}(2k^2+k-1)$$
$$=2\times\frac{5\times6\times11}{6}+\frac{5\times6}{2}-1\times5$$
$$=120$$

정답 ①

13. **출제의도** : 정적분을 활용하여 두 곡선 사이의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이고 $f(1)=f(2)=0$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x-k)$ (k는 상수)

로 놓을 수 있다.

이때,

$f'(x)=(x-2)(x-k)+(x-1)(x-k)+(x-1)(x-2)$

이고, $f'(0)=-7$이므로

$2k+k+2=-7$

즉, $k=-3$이므로

$f(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$

이고, $f(3)=12$이므로 점 P의 좌표는

$\mathrm{P}(3, 12)$

따라서 직선 OP의 방정식은 $y=4x$이므로

$$B-A=\int_0^3 \{4x-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^3 \{4x-(x^3-7x+6)\}dx$$

$$=\int_0^3 (-x^3+11x-6)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{2}x^2-6x\right]_0^3$$

$$=-\frac{1}{4}\times 81+\frac{11}{2}\times 9-6\times 3$$

$$=\frac{45}{4}$$

정답 ⑤

[참고]

점 Q의 x좌표를 a라 하면

$B-A$

$$=\int_a^3 \{4x-f(x)\}dx-\int_0^a \{f(x)-4x\}dx$$

$$=\int_a^3 \{4x-f(x)\}dx+\int_0^a \{4x-f(x)\}dx$$

$$=\int_0^3 \{4x-f(x)\}dx$$

14. 출제의도 : 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

원 O의 반지름의 길이를 r이라 하면

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AE}}=r$

이고 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DB}}=3:2$ 이므로

$\overline{\mathrm{BD}}=\frac{2}{3}r$

또한 $\overline{\mathrm{CE}}=x$라 하면 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이가 각각

$$\frac{1}{2}\times r\times r\times sinA=\frac{1}{2}r^2\sin A$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{3}r\times(r+x)\times sinA=\frac{5}{6}r(r+x)\sin A$$

이고 삼각형 ADE와 삼각형 ABC의 넓이의 비가 $9:35$이므로

$$\frac{1}{2}r^2\sin A:\frac{5}{6}r(r+x)\sin A=9:35$$

$$3r+3x=7r,\ x=\frac{4}{3}r$$

이때 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin A}=\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin C}$$

이고

$$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{5}{3}r,\ \sin A:\sin C=8:5$$

이므로

$$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\frac{\sin A}{\sin C}$$

$$=\frac{5}{3}r\times\frac{8}{5}$$

$= \frac{8}{3}r$

$\angle ACB = \theta$라 하면 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta = \frac{\left(\frac{8}{3}r\right)^2 + \left(\frac{7}{3}r\right)^2 - \left(\frac{5}{3}r\right)^2}{2\times\frac{8}{3}r\times\frac{7}{3}r}$$

$= \frac{11}{14}$

이므로

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

$= \sqrt{1-\left(\frac{11}{14}\right)^2}$

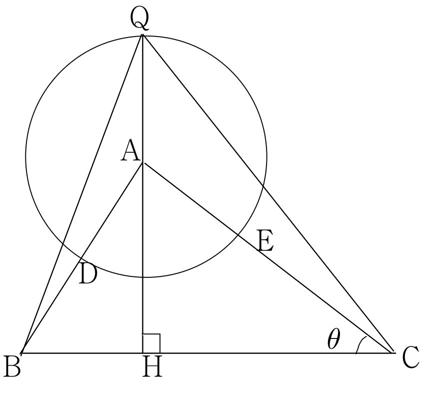
$= \frac{5\sqrt{3}}{14}$

또한 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로

$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta} = 2\times 7$, 즉 $\frac{\frac{5}{3}r}{\sin\theta} = 14$ 에서

$\frac{5}{3}r = 14\sin\theta = 14\times\frac{5\sqrt{3}}{14} = 5\sqrt{3}$

$r = 3\sqrt{3}$



점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{AH} = \overline{AC}\sin\theta$

$= \frac{7}{3}r\sin\theta$

$= \frac{7}{3}\times 3\sqrt{3}\times\frac{5\sqrt{3}}{14}$

$= \frac{15}{2}$

따라서 직선 AH와 원 O가 만나는 점 중 삼각형 ABC의 외부의 점을 Q라 하면, 삼각형 PBC의 넓이가 최대일 때는 점 P가 점 Q의 위치에 있을 때이다.

이때

$\overline{QH} = r + \overline{AH}$

$= 3\sqrt{3} + \frac{15}{2}$

이므로 삼각형 PBC의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\frac{8}{3}\times 3\sqrt{3}\times\left(3\sqrt{3}+\frac{15}{2}\right)$

$= 36 + 30\sqrt{3}$

정답 ④

15. **출제의도** : 함수의 미분가능과 함수의 극대, 극소 및 그래프를 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

풀이 :

$g(0) = 7$

$x < 0$일 때,

$g'(x) = 3x^2 + 2ax + 15$

이므로

$\lim_{x\to 0-} g'(x) = 15$

조건 (가)에서 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to 0+} f(x)=7$

$\lim_{x\to 0+} f'(x)=15$

이차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수를

$p(p<0)$라 하면

$f(x)=px^2+15x+7$

$f'(x)=2px+15$

$f'(x)=0$에서

$2px+15=0$

$x=-\dfrac{15}{2p}$

이때, $p<0$이므로

$-\dfrac{15}{2p}>0$

조건 (나)에서

x에 대한 방정식 $g'(x)\times g'(x-4)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 4이므로

함수 $g(x)$는 $x<0$에서 극댓값과 극솟값을 가져야 한다.

즉, $x<0$에서

방정식 $g'(x)=0$은 서로 다른 두 실근

$\alpha,\ \beta(\alpha<\beta<0)$

를 갖고,

$\beta=\alpha+4,\ -\dfrac{15}{2p}=\beta+4$ ⋯⋯ ㉠

이어야 한다.

이차방정식 $3x^2+2ax+15=0$의 서로 다른 두 실근이 $\alpha,\ \alpha+4$이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+(\alpha+4)=-\dfrac{2a}{3}$ ⋯⋯ ㉡

$\alpha(\alpha+4)=5$ ⋯⋯ ㉢

㉢에서

$\alpha^2+4\alpha-5=0$

$(\alpha+5)(\alpha-1)=0$

$\alpha<0$이므로

$\alpha=-5$

$\alpha=-5$를 ㉡에 대입하면

$-5+(-5+4)=-\dfrac{2a}{3}$

$a=9$

$\alpha=-5$를 ㉠에 대입하면

$\beta=-5+4=-1$

$-\dfrac{15}{2p}=-1+4$

$p=-\dfrac{5}{2}$

따라서

$g(-2)=(-2)^3+9\times(-2)^2+15\times(-2)+7$

$=5$

$g(2)=-\dfrac{5}{2}\times 2^2+15\times 2+7=27$

이므로

$g(-2)+g(2)=5+27=32$

정답 ②

16. 출제의도 : 로그의 진수에 미지수를 포함한 방정식의 해를 구할 수 있는가?

풀이 :

로그의 진수의 조건에 의해

$x-3>0,\ 3x-5>0$

즉, $x>3$ ⋯⋯ ㉠

$\log_2(x-3)=\log_4(3x-5)$ ⋯⋯ ㉡

이때

$\log_2(x-3)=\log_{2^2}(x-3)^2=\log_4(x-3)^2$

이므로 ㉡에서

$\log_4(x-3)^2=\log_4(3x-5)$

즉, $(x-3)^2=3x-5$에서

$x^2-6x+9=3x-5$

$x^2-9x+14=0$

$(x-2)(x-7)=0$

따라서 ㉠에 의해 $x=7$

정답 7

17. **출제의도** : 다항함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(9x^2+4x)dx$

$=3x^3+2x^2+C$ (단, C는 적분상수)

이때 $f(1)=6$이므로 $C=1$

따라서 $f(x)=3x^3+2x^2+1$이므로

$f(2)=24+8+1=33$

정답 33

18. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

$a_n+a_{n+4}=12$이므로

$\sum_{n=1}^{8}a_n=\sum_{n=1}^{4}(a_n+a_{n+4})$

$=\sum_{n=1}^{4}12=12\times4=48$

$\sum_{n=9}^{16}a_n=\sum_{n=9}^{12}(a_n+a_{n+4})$

$=\sum_{n=9}^{12}12=12\times4=48$

따라서

$\sum_{n=1}^{16}a_n=\sum_{n=1}^{4}(a_n+a_{n+4})+\sum_{n=9}^{12}(a_n+a_{n+4})$

$=48+48=96$

정답 96

19. **출제의도** : 삼차함수의 극댓값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=2x^3-3ax^2-12a^2x$에서

$f'(x)=6x^2-6ax-12a^2$

$=6(x+a)(x-2a)$

$f'(x)=0$에서

$x=-a$ 또는 $x=2a$

$a>0$이므로

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-a$에서 극댓값을 갖고, $x=2a$에서 극솟값을 갖는다.

함수 $f(x)$의 극댓값이 $\frac{7}{27}$이고

$f(-a) = -2a^3 - 3a^3 + 12a^3 = 7a^3$

이므로

$7a^3 = \frac{7}{27}$에서

$a^3 = \frac{1}{27}$

$a > 0$이므로

$a = \frac{1}{3}$

따라서

$f(x) = 2x^3 - x^2 - \frac{4}{3}x$

이므로

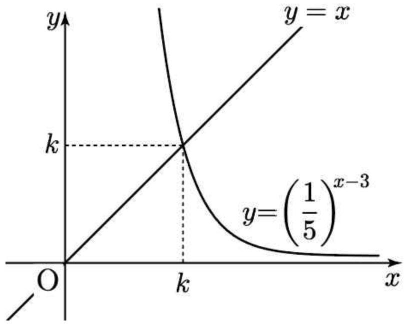
$f(3) = 54 - 9 - 4 = 41$

정답 41

20. 출제의도 : 지수의 성질과 지수함수의 그래프를 이용하여 주어진 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y = x$는 다음 그림과 같다.



$x > k$인 모든 실수 x에 대하여

$f(f(x)) = 3x$ …… ㉠

곡선 $y = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$과 직선 $y = x$가 만나는 점의 x좌표가 k이므로

$\left(\frac{1}{5}\right)^{k-3} = k$

즉, $\left(\frac{1}{5}\right)^{k} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = k$에서

$k \times 5^k = 5^3$

그러므로 구하는 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k^3 \times 5^{3k}}\right) &= f\left(\left(\frac{1}{k \times 5^k}\right)^3\right) \\ &= f\left(\left(\frac{1}{5^3}\right)^3\right) \\ &= f\left(\frac{1}{5^9}\right) \quad \cdots\cdots \text{㉡} \end{aligned}$$

한편,

$x > k$에서 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이므로

k보다 작은 임의의 두 양수

y_1, y_2 $(y_1 < y_2)$에 대하여

$f(x_1) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x_1-3} = y_1$

$f(x_2) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x_2-3} = y_2$

인 x_1, x_2 $(k < x_2 < x_1)$이 존재한다.

㉠에서

$f(f(x_1)) = 3x_1$, $f(f(x_2)) = 3x_2$

이므로

$f(f(x_1)) > f(f(x_2))$

즉, $f(y_1) > f(y_2)$이므로 함수 $f(x)$는 $x < k$에서 감소한다.

$x > k$에서 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x-3}$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 감소한다.

그러므로 ㉡에서

$f(\alpha) = \frac{1}{5^9}$

인 실수 α $(\alpha>k)$가 존재한다.
이때

$$f(\alpha)=\left(\frac{1}{5}\right)^{\alpha-3}=\frac{1}{5^9}$$

에서

$\alpha-3=9$, 즉 $\alpha=12$

따라서 ㉠에 의해 구하는 값은

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{k^3\times 5^{3k}}\right)=f\left(\frac{1}{5^9}\right) \\ &=f(f(\alpha)) \\ &=3\alpha \\ &=3\times 12 \\ &=36 \end{aligned}$$

정답 36

21. 출제의도 : 함수의 극한에 대한 조건이 주어졌을 때 미정계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx+4=0$은 적어도 하나의 실근을 가지므로 $f(\beta)=0$인 실수 β가 존재한다.

모든 실수 α에 대하여 $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(2x+1)}{f(x)}$의 값이 존재하므로 $f(\beta)=0$인 β에 대하여

$\lim\limits_{x\to\beta}f(x)=0$이고, $\lim\limits_{x\to\beta}f(2x+1)=0$

함수 $f(x)$는 연속이므로 $f(2\beta+1)=0$

즉 $2\beta+1$은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

마찬가지 방법으로 $2\beta+1$이 방정식 $f(x)=0$의 근이면 $2(2\beta+1)+1=4\beta+3$도 방정식 $f(x)=0$ 근이고 $2(4\beta+3)+1=8\beta+7$도 방정식 $f(x)=0$의 근이다.

만약 $\beta\neq 2\beta+1$, 즉 $\beta\neq -1$이면 β, $2\beta+1$, $4\beta+3$, $8\beta+7$가 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 네 근이다.

그러므로 방정식 $f(x)=0$는 $x=-1$만 실근으로 갖는다.

$f(-1)=0$에서

$f(-1)=-1+a-b+4=0$

$b=a+3$

$$\begin{aligned} f(x)&=x^3+ax^2+(a+3)x+4 \\ &=(x+1)\{x^2+(a-1)x+4\} \end{aligned}$$

$f(x)\neq(x+1)^3$이므로

이차방정식 $x^2+(a-1)x+4=0$의 실근은 존재하지 않는다.

위의 이차방정식의 판별식을 D라 할 때

$D=(a-1)^2-16<0$

$a^2-2a-15<0$

$(a+3)(a-5)<0$

$-3<a<5$

$f(1)=a+b+5=a+(a+3)+5=2a+8$에서 $f(1)$의 최댓값은 $a=4$일 때,

$2\times 4+8=16$

정답 16

22. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열을 이해하여 첫째항의 절댓값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

조건 (나)에서 $|a_m|=|a_{m+2}|$를 만족시키는 자연수 m의 최솟값이 3이므로 다음

의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i) $|a_3|$이 홀수인 경우

$a_4=a_3-3$이고 짝수이다.

$a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{2}(a_3-3)$

$|a_3|=|a_5|$에서

$|a_3|=\left|\frac{1}{2}(a_3-3)\right|$

$a_3=1$ 또는 $a_3=-3$

$a_3=1$이면 $a_4=-2$이고 1은 홀수이므로 a_2는 짝수이고 $a_2=2$이므로 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$a_3=-3$이면 $a_4=-6$이고 $a_2=-6$이므로 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $|a_3|$이 0 또는 짝수인 경우

a_3	a_4	a_5
a_3	$\frac{1}{2}a_3$	$\frac{1}{2}a_3-3$
		$\frac{1}{4}a_3$

$|a_3|=\left|\frac{1}{4}a_3\right|$에서 $a_3=0$

$a_3=0$이면 3 이상의 모든 자연수 m에 대하여 $a_m=0$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
0	3	6
	0	

$a_2=0$이면 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1의 값은 6이다.

한편, $|a_3|=\left|\frac{1}{2}a_3-3\right|$에서

$a_3=2$ 또는 $a_3=-6$

$a_3=2$이면 $a_4=1$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
2	5	10
	4	7
		8

이때 조건을 만족시키는 a_1의 값은 10, 7, 8이다.

$a_3=-6$이면 $a_4=-3$이고 a_2, a_1은 다음과 같다.

a_3	a_2	a_1
-6	-3	
	-12	-9
		-24

$a_2=-3$이면 $|a_2|=|a_4|$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않으므로, 이때의 조건을 만족시키는 a_1의 값은 -9, -24이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_1|$의 값의 합은

$6+(10+7+8)+(9+24)=64$

정답 64

■ [선택: 확률과 통계]
23. ⑤ 24. ③ 25. ① 26. ③ 27. ③
28. ② 29. 25 30. 19

23. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 다항식의 계수를 구할 수 있는가?

풀이 :

다항식 $(x^3+2)^5$의 전개식의 일반항은

${}_5\mathrm{C}_r \times 2^{5-r} \times (x^3)^r$ $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$

x^6항은 $r=2$일 때이므로 x^6의 계수는

${}_5\mathrm{C}_2 \times 2^{5-2} = 10 \times 8 = 80$

정답 ⑤

24. **출제의도** : 조건부확률과 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

$\mathrm{P}(A|B) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)} = \mathrm{P}(A)$ 이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$

이때 $\mathrm{P}(A) = \dfrac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A\cap B) = \dfrac{1}{5}$이므로

$\mathrm{P}(B) = \dfrac{2}{5}$

따라서

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} - \dfrac{1}{5}$

$= \dfrac{7}{10}$

정답 ③

25. **출제의도** : 모평균의 신뢰구간을 구할 수 있는가?

풀이 :

모평균 m에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le m \le b$이므로

$b - a = 2 \times 1.96 \times \dfrac{2}{\sqrt{256}}$

$= 2 \times 1.96 \times \dfrac{1}{8}$

$= 0.49$

정답 ①

26. **출제의도** : 여사건의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

어느 학급의 학생 16명 중 과목 A를 선택한 학생이 9명이므로 16명 중에서 선택한 3명의 학생 모두 과목 A를 선택할 확률은

$$\frac{{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{16}\mathrm{C}_3} = \frac{\dfrac{9\times8\times7}{3\times2\times1}}{\dfrac{16\times15\times14}{3\times2\times1}} = \frac{3}{20}$$

따라서 16명 중에서 선택한 3명의 학생 중 적어도 한 명이 과목 B를 선택한 학

생일 확률은 여사건의 확률에 의해

$1-\frac{3}{20}=\frac{17}{20}$

정답 ③

27. **출제의도** : 표본평균의 분포를 이해하고 상수의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

모집단의 확률변수를 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=\frac{1+3+5+7+9}{5}=5$

$\mathrm{V}(X)$

$=\frac{(1-5)^2+(3-5)^2+(5-5)^2+(7-5)^2+(9-5)^2}{5}$

$=8$

모집단에서 임의추출한 크기가 3인 표본의 표본평균 $\overline{X}$의 분산은

$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{3}=\frac{8}{3}$

$\mathrm{V}(a\overline{X}+6)=24$에서

$\mathrm{V}(a\overline{X}+6)=a^2\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{8}{3}a^2$

이므로

$\frac{8}{3}a^2=24$에서 $a^2=9$

따라서 양수 a의 값은 3이다.

정답 ③

28. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구할 수 있는가?

풀이 :

6의 약수는 1, 2, 3, 6이므로 조건 (가)에서

$f(1)\times f(6)=1$ 또는 $f(1)\times f(6)=2$

$f(1)\times f(6)=3$ 또는 $f(1)\times f(6)=6$

(i) $f(1)\times f(6)=1$일 때

$f(1)=f(6)=1$

따라서 조건 (나)에서

$2\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 2$

즉, $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=2$

따라서 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 1이다.

(ii) $f(1)\times f(6)=2$일 때

$f(1)\le f(6)$ 이므로 $f(1)=1$, $f(6)=2$

따라서 조건 (나)에서

$2\le f(2)\le f(3)\le f(4)\le f(5)\le 4$

이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$${}_3\mathrm{H}_4={}_{3+4-1}\mathrm{C}_4$$
$$={}_6\mathrm{C}_4$$
$$={}_6\mathrm{C}_2$$
$$=\frac{6\times5}{2\times1}=15$$

따라서 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 15이다.

(iii) $f(1)\times f(6)=3$일 때

$f(1)\le f(6)$ 이므로 $f(1)=1$, $f(6)=3$

따라서 조건 (나)에서

$2 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 6$

이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$
\begin{aligned}
{}_5\mathrm{H}_4 &= {}_{5+4-1}\mathrm{C}_4 \\
&= {}_8\mathrm{C}_4 \\
&= \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} \\
&= 70
\end{aligned}
$$

따라서 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 70이다.

(iv) $f(1)\times f(6)=6$일 때

$f(1) \le f(6)$ 이므로

$f(1)=1$, $f(6)=6$ 또는

$f(1)=2$, $f(6)=3$

① $f(1)=1$, $f(6)=6$일 때

조건 (나)에서

$2 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 12$

이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 2, 3, 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$
\begin{aligned}
{}_5\mathrm{H}_4 &= {}_{5+4-1}\mathrm{C}_4 \\
&= {}_8\mathrm{C}_4 \\
&= \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} \\
&= 70
\end{aligned}
$$

② $f(1)=2$, $f(6)=3$일 때

조건 (나)에서

$4 \le f(2) \le f(3) \le f(4) \le f(5) \le 6$

이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 4, 5, 6 중에서 중복을 허락하여 4개를 선택하는 중복조합의 수와 같으므로

$$
\begin{aligned}
{}_3\mathrm{H}_4 &= {}_{3+4-1}\mathrm{C}_4 \\
&= {}_6\mathrm{C}_4 \\
&= {}_6\mathrm{C}_2 \\
&= \frac{6\times5}{2\times1}=15
\end{aligned}
$$

따라서 이 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 $70+15=85$이다.

(i), (ii), (iii), (iv)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$1+15+70+85=171$

정답 ②

29. **출제의도** : 정규분포 곡선의 특징을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\mathrm{P}(X \le x)=\mathrm{P}\left(Z \le \frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)$$

$$\mathrm{P}(X \ge 40-x)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{(40-x)-m_1}{\sigma_1}\right)$$

이므로

$$\mathrm{P}\left(Z \le \frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)=\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{(40-x)-m_1}{\sigma_1}\right)$$

에서

$$\frac{x-m_1}{\sigma_1}+\frac{(40-x)-m_1}{\sigma_1}=0$$

$40-2m_1=0$, $m_1=20$

또한

$$P(Y \le x) = P\left(Z \le \frac{x-m_2}{\sigma_2}\right)$$

$$P(X \le x+10) = P\left(Z \le \frac{(x+10)-m_1}{\sigma_1}\right)$$

$$= P\left(Z \le \frac{x-10}{\sigma_1}\right)$$

이므로

$$P\left(Z \le \frac{x-m_2}{\sigma_2}\right) = P\left(Z \le \frac{x-10}{\sigma_1}\right)$$

에서

$$\frac{x-m_2}{\sigma_2} = \frac{x-10}{\sigma_1}$$

$$\sigma_1 x - m_2\sigma_1 = \sigma_2 x - 10\sigma_2$$

이 식은 x에 대한 항등식이므로

$\sigma_1 = \sigma_2$, $-m_2\sigma_1 = -10\sigma_2$

즉 $m_2 = 10$

$$P(15 \le X \le 20) + P(15 \le Y \le 20)$$

$$= P\left(\frac{15-20}{\sigma_1} \le Z \le \frac{20-20}{\sigma_1}\right)$$

$$+ P\left(\frac{15-10}{\sigma_2} \le Z \le \frac{20-10}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(-\frac{5}{\sigma_1} \le Z \le 0\right) + P\left(\frac{5}{\sigma_2} \le Z \le \frac{10}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma_1}\right) + P\left(\frac{5}{\sigma_2} \le Z \le \frac{10}{\sigma_2}\right)$$

$$= P\left(0 \le Z \le \frac{5}{\sigma_1}\right) + P\left(\frac{5}{\sigma_1} \le Z \le \frac{10}{\sigma_1}\right)$$

$$= P\left(0 \le Z \le \frac{10}{\sigma_1}\right) = 0.4772$$

이때 $P(0 \le Z \le 2) = 0.4772$ 이므로

$$\frac{10}{\sigma_1} = 2,\ \sigma_1 = 5$$

즉 $\sigma_2 = 5$ 이므로

$$m_1 + \sigma_2 = 20 + 5 = 25$$

정답 25

30. 출제의도 : 사건의 독립을 이용하여 주어진 확률을 구할 수 있는가?

풀이 :

동전의 앞면을 H, 동전의 뒷면을 T라 하자. 6의 눈이 나올 때 동전의 앞면의 개수와 뒷면의 개수가 서로 바뀌므로 주어진 시행을 3번 반복했을 때, 6의 눈이 나온 횟수를 기준으로 경우를 나누어 5개의 동전이 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률을 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) 6의 눈이 세 번 나온 경우

각 자리에 있는 동전이 TTHHH이므로 주어진 상황을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 6의 눈이 두 번 나온 경우

3번의 시행 이후, 가능한 경우는

H가 1개, T가 4개 또는

H가 3개, T가 2개

이므로 주어진 상황을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) 6의 눈이 한 번 나온 경우

주어진 상황을 만족시키려면 1번째 자리, 2번째 자리의 동전을 각각 한 번씩 뒤집고, 5개의 동전을 한 번씩 뒤집어야 한다. 즉, 주사위의 눈의 수 1, 2, 6이 각각 한 번씩 나와야 한다.

이를 만족하는 경우의 수는 1, 2, 6을 일렬로 나열하는 경우의 수와 같

으므로

$3!=6$

그러므로 이 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)\times 3!=\frac{1}{36}$

(ⅳ) 6의 눈이 한 번도 나오지 않는 경우

주어진 상황을 만족시키려면 3번째 자리, 4번째 자리, 5번째 자리의 동전을 각각 한 번씩 뒤집어야 한다. 즉, 주사위의 눈의 수 3, 4, 5가 각각 한 번씩 나와야 한다.

이를 만족하는 경우의 수는 3, 4, 5를 일렬로 나열하는 경우의 수와 같으므로

$3!=6$

그러므로 이 경우의 확률은

$\left(\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\right)\times 3!=\frac{1}{36}$

(ⅰ) ~ (ⅳ)에 의해 구하는 확률은

$\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{18}$

따라서 $p=18$, $q=1$이므로

$p+q=19$

정답 19

■ [선택: 미적분]
23. ③ 24. ④ 25. ② 26. ① 27. ①
28. ② 29. 25 30. 17

23. **출제의도** : 삼각함수의 극한을 계산할 수 있는가?

풀이 :

$$\lim_{x\to0}\frac{3x^2}{\sin^2 x}=3\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}}$$

$$=3$$

정답 ③

24. **출제의도** : 여러 가지 함수의 부정적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$$\int_0^{10}\frac{x+2}{x+1}dx=\int_0^{10}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\Big[x+\ln|x+1|\Big]_0^{10}=10+\ln 11$$

정답 ④

25. **출제의도** : 수열의 극한에 대한 성질을 이용하여 주어진 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

풀이 :

$b_n=\dfrac{na_n}{n^2+3}$이라 하면

$a_n=\dfrac{b_n(n^2+3)}{n}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n(n^2+3)}{n^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}b_n\times\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3}{n^2}=1$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a_n^{\,2}+n}-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n^{\,2}+n-a_n^{\,2}}{\sqrt{a_n^{\,2}+n}+a_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a_n}{n}\right)^2+\frac{1}{n}}+\frac{a_n}{n}}=\frac{1}{\sqrt{1^2+0}+1}$$

$$=\frac{1}{2}$$

정답 ②

26. **출제의도** : 정적분을 활용하여 입체도형의 부피를 구할 수 있는가?

풀이 :

직선 $x=t(1\le t\le e)$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\left(\sqrt{\frac{t+1}{t(t+\ln t)}}\right)^2=\frac{t+1}{t(t+\ln t)}$$

따라서 이 입체도형의 부피는

$$\int_1^e S(t)\,dt = \int_1^e \frac{t+1}{t(t+\ln t)}\,dt$$

이때 $t+\ln t = s$라 하면

$$\frac{ds}{dt} = 1+\frac{1}{t} = \frac{t+1}{t}$$

이고 $t=1$일 때 $s=1$, $t=e$일 때 $s=e+1$이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e S(t)\,dt &= \int_1^e \frac{t+1}{t(t+\ln t)}\,dt \\ &= \int_1^{e+1} \frac{1}{s}\,ds \\ &= \Big[\ln s\Big]_1^{e+1} \\ &= \ln(e+1)\end{aligned}$$

정답 ①

27. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이해하여 함숫값을 구할 수 있는가?

풀이 :

곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0,\ g(0))$에서의 접선이 x축이므로 $g(0)=0$, $g'(0)=0$이다.

$g(0)=f(e^0)+e^0=f(1)+1=0$

$f(1)=-1$ …… ㉠

$g'(x)=f'(e^x)\times e^x+e^x$이므로

$g'(0)=f'(e^0)\times e^0+e^0=f'(1)+1=0$

$f'(1)=-1$ …… ㉡

한편, 함수 $g(x)$가 역함수를 가지므로 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)\geq 0$ 또는 $g'(x)\leq 0$이어야 한다.

$$\begin{aligned}g'(x) &= f'(e^x)\times e^x+e^x \\ &= e^x\{f'(e^x)+1\}\end{aligned}$$

에서 모든 실수 x에 대하여 $e^x>0$이고 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(e^x)+1\geq 0$, 즉

$f'(e^x)\geq -1$

이어야 한다.

㉡에서 $f'(1)=-1$이고 함수 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 3인 이차함수이므로

$f'(x)=3(x-1)^2-1$

이어야 한다.

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \{3(x-1)^2-1\}\,dx \\ &= (x-1)^3-x+C \ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이고 ㉠에서 $f(1)=-1$이므로

$f(1)=-1+C=-1$, $C=0$

$f(x)=(x-1)^3-x$

$$\begin{aligned}g(x) &= f(e^x)+e^x \\ &= (e^x-1)^3-e^x+e^x \\ &= (e^x-1)^3\end{aligned}$$

한편, 함수 $h(x)$가 함수 $g(x)$의 역함수이므로 $h(8)=k$라 하면 $g(k)=8$에서

$(e^k-1)^3=8$, $e^k-1=2$, $e^k=3$, $k=\ln 3$

따라서

$$\begin{aligned}h'(8) &= \frac{1}{g'(h(8))} = \frac{1}{g'(\ln 3)} \\ &= \frac{1}{e^{\ln 3}\{f'(e^{\ln 3})+1\}} \\ &= \frac{1}{3\times[\{3\times(3-1)^2-1\}+1]} = \frac{1}{36}\end{aligned}$$

정답 ①

28. **출제의도** : 부정적분과 접선의 방정식을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

$x>0$에서

$f''(x)=-1-2xe^{1-x^2}<0$이므로

따라서 곡선 $y=f(x)$는 $x>0$에서 위로 볼록이다. 따라서 양수 t에 대하여 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)(x>0)$의 교점은 점 $(t,\ f(t))$ 하나이고, 접선은 곡선의 위쪽에 위치한다.

점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 방정식 $y=f'(t)(x-t)+f(t)$에 대하여

$$g(t)=\int_0^t\{f'(t)(x-t)+f(t)-f(x)\}dx$$

이때 $f'(x)=-x+e^{1-x^2}$에서 양변에 x를 곱하면 $xf'(x)=-x^2+xe^{1-x^2}$

$$\int xf'(x)\,dx=\int\left(-x^2+xe^{1-x^2}\right)dx$$

$$xf(x)-\int f(x)\,dx=-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

$$\int f(x)\,dx=xf(x)+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}e^{1-x^2}$$

$$g(t)=\left[\frac{f'(t)}{2}x^2-tf'(t)x+f(t)x\right]_0^t-\int_0^t f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}t^2f'(t)-t^2f'(t)+tf(t)-\left[xf(x)+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}e^{1-x^2}\right]_0^t$$

$$=-\frac{1}{2}t^2f'(t)+tf(t)-\left(tf(t)+\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}e^{1-t^2}-\frac{1}{2}e\right)$$

$$=-\frac{1}{2}t^2\left(-t+e^{1-t^2}\right)-\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$$

$$=\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{2}\left(t^2+1\right)e^{1-t^2}+\frac{1}{2}e$$

$$g'(t)=\frac{1}{2}t^2+t^3e^{1-t^2}$$

따라서

$$g(1)+g'(1)=\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{2}e\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}e+\frac{2}{3}$$

정답 ②

29. **출제의도** : 조건을 만족시키는 등비급수를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.

$a>0,\ r>0$인 경우 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|-a_n=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$a<0,\ r>0$인 경우 모든 자연수 n에 대하여 $|a_n|+a_n=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $a>0,\ r<0$이거나 $a<0,\ r<0$이다.

(ⅰ) $a>0,\ r<0$인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|+a_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n-1}=\frac{2a}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(|a_n|-a_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-2a_{2n}\right)=\frac{-2ar}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}\times(-r)=\frac{20}{3},\quad \frac{40}{3}\times(-r)=\frac{20}{3}$$

$$r=-\frac{1}{2},\quad a=5$$

(ⅱ) $a<0,\ r<0$인 경우

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2a_{2n}=\frac{2ar}{1-r^2}=\frac{40}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}(-2a_{2n-1})$$

$$=\frac{-2a}{1-r^2}=\frac{20}{3}$$

$$\frac{2a}{1-r^2}\times r=\frac{40}{3},\quad -\frac{20}{3}r=\frac{40}{3}$$

$r=-2$

이때, $r<-1$이므로 $r^2>1$이 되어 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+a_n)$와 $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|-a_n)$ 모두 수렴하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=5$, $r=-\frac{1}{2}$

이므로

$$a_n=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

부등식

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times a_{m+k}\right)>\frac{1}{700}\text{에서}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)\right\}$$

$$>\frac{1}{700}$$

이때

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\text{에서}$$

$k=4l-3$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=1$

$k=4l-2$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=-1$

$k=4l-1$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=-1$

$k=4l$이면 $(-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}=1$

(단, l은 자연수)이므로

$2n=4p-2$(p는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$$-\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{p-1}\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$2n=4p$(p는 자연수)이면

$$\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+3)}{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$$-\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}+\sum_{i=1}^{p}\frac{1}{16}\times\left(\frac{1}{16}\right)^{i-1}$$

$n\to\infty$이면 $p\to\infty$이고

$2n=4p-2$, $2n=4p$의 두 경우 모두 각 급수가 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}\left\{5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\sum_{k=1}^{2n}\left((-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right)\right\}$$

$$=5\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}\times\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)\times\frac{1}{1-\frac{1}{16}}\right\}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^{m-1}>\frac{1}{700}$$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 m의 값은 1, 3, 5, 7, 9이고, 그 합은

$1+3+5+7+9=25$

정답 25

30. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 극대를 갖는 x의 값을 추론할 수 있는가?

풀이 :

$f(x)=\sin(ax+b+\sin x)$이고 조건 (가)에서 $f(0)=0$이므로

$f(0)=\sin b=0$, $b=k\pi$ (단, k는 정수) …… ㉠

$f(2\pi)=2\pi a+b$이므로

$f(2\pi)=\sin(2\pi a+b)=2\pi a+b$ …… ㉡

이때 $\sin x=x$를 만족시키는 실수 x의 값은 0뿐이므로 ㉡에서

$2\pi a+b=0$, $b=-2\pi a$ …… ㉢

㉠, ㉢에서

$-2\pi a=k\pi$, $a=-\dfrac{k}{2}$ …… ㉣

이고 $f(x)=\sin(ax-2\pi a+\sin x)$이다.

$1\le a\le 2$이고 ㉣에서 $a=-\dfrac{k}{2}$ (k는 정수)이므로

$a=1$ 또는 $a=\dfrac{3}{2}$ 또는 $a=2$이다.

이때

$f'(x)=\cos(ax-2\pi a+\sin x)\times(a+\cos x)$

에서

$f'(0)=\cos(-2\pi a)\times(a+1)$

$\qquad=(a+1)\cos 2\pi a$

$f'(4\pi)=\cos 2\pi a\times(a+1)=(a+1)\cos 2\pi a$

이고

$f'(2\pi)=\cos 0\times(a+1)=a+1$

이므로 $a=1$ 또는 $a=2$이면

$f'(0)=(a+1)\cos 2\pi a=a+1$

즉, $f'(0)=f'(2\pi)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서

$a=\dfrac{3}{2}$, $b=-2\pi a=-3\pi$

이고

$f(x)=\sin\left(\dfrac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$

$f'(x)=\left(\cos x+\dfrac{3}{2}\right)\cos\left(\dfrac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)$

이다. 모든 실수 x에 대하여

$\cos x+\dfrac{3}{2}\neq 0$이므로 $f'(x)=0$에서

$\cos\left(\dfrac{3}{2}x-3\pi+\sin x\right)=0$

$g(x)=\dfrac{3}{2}x-3\pi+\sin x$라 하면 모든 실수 x에 대하여 $g'(x)>0$이므로 실수 전체의 집합에서 함수 $g(x)$는 증가하고

$g(0)=-3\pi$, $g(4\pi)=3\pi$

이다. 이때 $i=1$, 2, 3, 4, 5, 6에 대하여 $g(x)=\dfrac{2i-7}{2}\pi$를 만족시키는 실수 x의 값을 β_i라 하면 함수 $f(x)$는 $x=\beta_1$, $x=\beta_3$, $x=\beta_5$에서 극소이고 $x=\beta_2$, $x=\beta_4$, $x=\beta_6$에서 극대이다. 즉, $n=3$이다.

$g(\beta_2)=-\dfrac{3}{2}\pi$에서

$\dfrac{3}{2}\beta_2-3\pi+\sin\beta_2=-\dfrac{3}{2}\pi$

$\sin\beta_2=-\dfrac{3}{2}(\beta_2-\pi)$

이때 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-\dfrac{3}{2}(x-\pi)$는 점 $(\pi,\ 0)$에서만 만나므

로 $\beta_2=\pi$이다. 즉, $\alpha_1=\pi$이다.

따라서

$$n\alpha_1-ab=3\times\pi-\frac{3}{2}\times(-3\pi)$$

$$=\frac{15}{2}\pi$$

$p=2$, $q=15$이므로

$p+q=2+15=17$

정답 17

■ [선택: 기하]

23. ③ 24. ④ 25. ③ 26. ① 27. ①
28. ④ 29. 107 30. 316

23. 출제의도 : 성분으로 나타내어진 벡터의 연산을 할 수 있는가?

풀이 :

$\vec{a}=(k,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$에서

$\vec{a}+3\vec{b}=(k,\ 3)+(3,\ 6)$

$=(k+3,\ 9)$

이고, $\vec{a}+3\vec{b}=(6,\ 9)$이므로

$(k+3,\ 9)=(6,\ 9)$

따라서

$k+3=6$

이므로

$k=3$

정답 ③

24. 출제의도 : 포물선의 정의를 이용하여 포물선 위의 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 :

포물선의 꼭짓점의 좌표가 $(1,0)$이고 준선이 직선 $x=-1$이므로 초점의 좌표는 $(3,0)$이다.

이때 포물선 위의 점 $(3,a)$에서 포물선의 초점까지의 거리와 준선까지의 거리가 같으므로

$\sqrt{0^2+a^2}=|3-(-1)|$

$a^2=16$

$a>0$이므로 $a=4$

정답 ④

[다른 풀이]

포물선의 꼭짓점 $(1,0)$에서 준선 $x=-1$까지의 거리가 2이므로 포물선의 방정식은

$y^2=4\times2(x-1)$

즉, $y^2=8(x-1)$

이다.

이 포물선이 점 $(3,a)$를 지나므로

$a^2=8(3-1)=16$

$a>0$이므로 $a=4$

25. 출제의도 : 좌표공간에서 선분을 내분하는 점과 외분하는 점의 좌표를 구할 수 있는가?

풀이 :

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점을 P라 하면 점 P가 z축 위에 있으므로 x좌표와 y좌표가 모두 0이다.

이때, 점 P의 x좌표는

$\frac{3\times(-4)+2\times a}{3+2}=0$

이므로 $a=6$

또, 점 P의 y좌표는

$\frac{3\times(-2)+2\times b}{3+2}=0$

이므로 $b=3$

또, 선분 AB를 $3:2$로 외분하는 점을 Q라 하면 점 Q가 xy평면 위에 있으므로 z좌표가 0이다.

이때, 점 Q의 z좌표는

$$\frac{3\times c-2\times 6}{3-2}=0$$

이므로 $c=4$

따라서

$a+b+c=6+3+4=13$

정답 ③

26. 출제의도 : 타원 위의 점에서의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

풀이 :

점 P의 x좌표는 $\frac{1}{n}$이므로

점 P의 y좌표를 y_1이라 하면

타원 C_1 : $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$$\frac{\frac{1}{n}x}{2}+y_1y=1 \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서

$y=0$일 때,

$x=2n$

이므로 점 P에서의 접선의 x절편 α는

$\alpha=2n$

점 Q의 x좌표는 $\frac{1}{n}$이므로

점 Q의 y좌표를 y_2라 하면

타원 C_2 : $2x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 위의 점 Q에서의 접선의 방정식은

$$\frac{2}{n}x+\frac{y_2y}{2}=1 \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉡에서

$y=0$일 때,

$$x=\frac{n}{2}$$

이므로 점 Q에서의 접선의 x절편 β는

$$\beta=\frac{n}{2}$$

$6\le\alpha-\beta\le 15$에서

$$6\le 2n-\frac{n}{2}\le 15$$

$$6\le\frac{3n}{2}\le 15$$

$4\le n\le 10$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n은 4, 5, 6, $\cdots$, 10이고, 그 개수는 7이다.

정답 ①

27. 출제의도 : 공간도형의 위치관계에 관한 성질을 이용하여 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

직선 BC가 평면 AMD와 수직이므로

$\overline{BC}\perp\overline{AM}$

이때 점 M이 선분 BC의 중점이므로 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}=6$인 이등변삼각형이고

$\overline{BM}=2\sqrt{5}$

이므로 $\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{36-20}=4$

즉, 삼각형 AMD는 한 변의 길이가 4인 정삼각형이다.

또, $\overline{\mathrm{DM}}\perp\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{16+20}=6$

이고, 점 M이 선분 BC의 중점이므로 삼각형 DBC도 이등변삼각형이다.

그러므로 점 A에서 평면 BCD에 내린 수선의 발은 선분 DM 위에 있고, 삼각형 AMD가 정삼각형이므로 수선의 발은 선분 DM의 중점이다. 이 점을 N이라 하자.

이때 삼각형 NCD의 넓이를 S_1이라 하면

S_1은 삼각형 BCD의 넓이의 $\frac{1}{4}$이므로

$S_1=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times4\sqrt{5}\times4=2\sqrt{5}$

한편, 삼각형 ACD에서 선분 AD의 중점을 L이라 하면

$\overline{\mathrm{CL}}=\sqrt{\overline{\mathrm{CD}}^2-\overline{\mathrm{DL}}^2}=\sqrt{36-4}=4\sqrt{2}$

이므로 삼각형 ACD 넓이를 S_2라 하면

$S_2=\frac{1}{2}\times4\times4\sqrt{2}=8\sqrt{2}$

그러므로 두 평면 ACD, BCD가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 삼각형 ACD의 평면 BCD 위로의 정사영이 삼각형 NCD이므로

$\cos\theta=\frac{2\sqrt{5}}{8\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{8}$

이때 삼각형 ACD에 내접하는 원의 반지름의 길이를 r이라 하면

$(4\sqrt{2}-r):r=3:1$

이므로

$r=\sqrt{2}$

따라서 삼각형 ACD에 내접하는 원의 넓이가 2π이므로 이 원의 평면 BCD 위로의 정사영의 넓이는

$$2\pi\times cos\theta=2\pi\times\frac{\sqrt{10}}{8}$$
$$=\frac{\sqrt{10}}{4}\pi$$

정답 ①

28. 출제의도 : 공간에서 구와 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

풀이 :

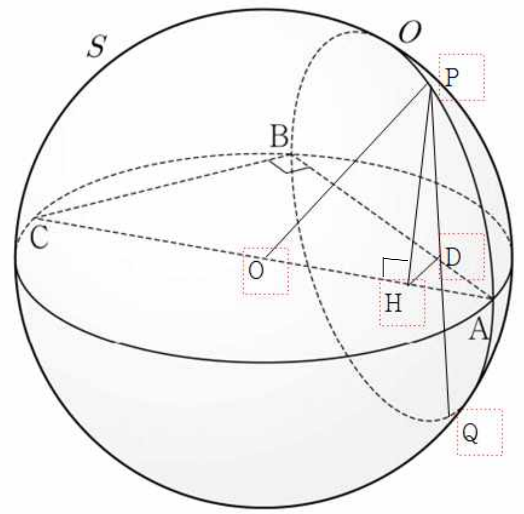
$\overline{\mathrm{AB}}=8,\ \overline{\mathrm{BC}}=6,\ \angle\mathrm{ABC}=\frac{\pi}{2}$

이므로

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2}$

$=\sqrt{8^2+6^2}$

$=10$



선분 AC의 중점을 O라 하면

구 S의 중심은 점 O이고, 반지름의 길이는 5이다.

원 O를 포함하는 평면과 평면 ABC가 수직이므로

선분 PQ와 선분 AB가 만나는 점을 D라 하면

$\overline{\mathrm{PD}} \perp \overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{PD}} = \overline{\mathrm{QD}}$

점 P에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$\overline{\mathrm{PO}} = 5$, $\overline{\mathrm{PH}} = 4$

이므로

직각삼각형 POH에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{OH}} &= \sqrt{\overline{\mathrm{PO}}^2 - \overline{\mathrm{PH}}^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 4^2} \\ &= 3\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AH}} = \overline{\mathrm{OA}} - \overline{\mathrm{OH}} = 5 - 3 = 2$

한편,

$\overline{\mathrm{PH}} \perp \overline{\mathrm{AC}}$, $\overline{\mathrm{PD}} \perp (\text{평면 ABC})$

이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{DH}}$

삼각형 ABC와 삼각형 AHD는 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{AH}} : \overline{\mathrm{HD}}$ 에서

$8 : 6 = 2 : \overline{\mathrm{HD}}$

$\overline{\mathrm{HD}} = \dfrac{3}{2}$

직각삼각형 PHD에서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PD}} &= \sqrt{\overline{\mathrm{PH}}^2 - \overline{\mathrm{HD}}^2} \\ &= \sqrt{4^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} \\ &= \frac{\sqrt{55}}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{PQ}} &= 2 \times \overline{\mathrm{PD}} \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{55}}{2} \\ &= \sqrt{55}\end{aligned}$$

정답 ④

29. 출제의도 : 쌍곡선의 성질을 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

풀이 :

쌍곡선 $x^2 - \dfrac{y^2}{35} = 1$의 두 초점이

$\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$ $(c > 0)$

이므로

$c^2 = 1 + 35 = 36$에서

$c > 0$이므로

$c = 6$

$\overline{\mathrm{PF}} = \alpha$라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{PF}} = \alpha$

또, 점 P가 쌍곡선 위에 있는 제1사분면 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}} - \overline{\mathrm{PF}} = 2$에서

$\overline{\mathrm{PF'}} = \overline{\mathrm{PF}} + 2 = \alpha + 2$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{QF'}} &= \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{PF'}} \\ &= \alpha + (\alpha + 2) \\ &= 2(\alpha + 1)\end{aligned}$$

삼각형 QF′F와 삼각형 FF′P가 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{QF'}}:\overline{\mathrm{FF'}}=\overline{\mathrm{FF'}}:\overline{\mathrm{PF'}}$에서

$2(\alpha+1):12=12:(\alpha+2)$

$2(\alpha+1)(\alpha+2)=144$

$\alpha^2+3\alpha-70=0$

$(\alpha+10)(\alpha-7)=0$

$\alpha>0$이므로

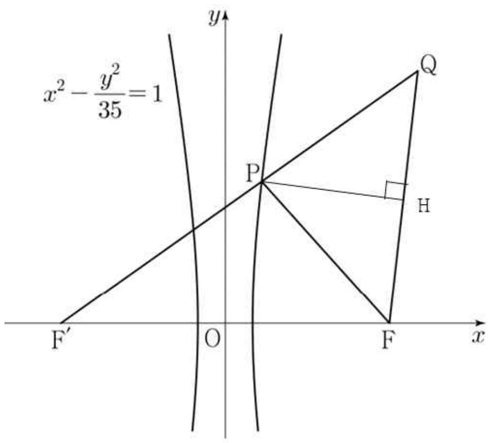
$\alpha=7$

또, $\overline{\mathrm{QF'}}:\overline{\mathrm{QF}}=\overline{\mathrm{FF'}}:\overline{\mathrm{FP}}$에서

$16:\overline{\mathrm{QF}}=12:7$

$12\times\overline{\mathrm{QF}}=16\times7$

$\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{28}{3}$



삼각형 PFQ에서

점 P에서 변 QF에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PF}}$

이므로 점 H는 선분 QF의 중점이다.

즉, $\overline{\mathrm{FH}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{QF}}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{28}{3}=\dfrac{14}{3}$

직각삼각형 PFH에서

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{PF}}^2-\overline{\mathrm{FH}}^2}$

$=\sqrt{7^2-\left(\dfrac{14}{3}\right)^2}$

$=\dfrac{7\sqrt{5}}{3}$

삼각형 PFQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\overline{\mathrm{PH}}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{28}{3}\times\dfrac{7\sqrt{5}}{3}$

$=\dfrac{98}{9}\sqrt{5}$

따라서

$p=9,\ q=98$

이므로

$p+q=9+98=107$

정답 107

30. 출제의도 : 벡터의 연산을 이용하여 두 벡터의 내적의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는가?

풀이 :

선분 BC의 중점이 원점 O에 오고 점 B의 좌표가 $(-2, 0)$이 되도록 정사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓자.

$|\overrightarrow{\mathrm{XB}}+\overrightarrow{\mathrm{XC}}|=|2\overrightarrow{\mathrm{XO}}|$

이고,

$|\overrightarrow{\mathrm{XB}}-\overrightarrow{\mathrm{XC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=4$

이므로 주어진 조건에 의하여

$|2\overrightarrow{\mathrm{XO}}|=4$, 즉 $|\overrightarrow{\mathrm{XO}}|=2$

이므로 점 X가 나타내는 도형 S는 원점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원이다.

한편, $4\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PD}}$에서

$4(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})+2(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OP})$

$4\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OP}$

즉, $\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$

이때 $\overrightarrow{OB}=(-2,\ 0)$, $\overrightarrow{OD}=(2,\ 4)$이므로

$$\overrightarrow{OQ}=\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)+(1,\ 2)+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$$

$$=\left(\frac{1}{2},\ 2\right)+\frac{1}{4}\overrightarrow{OP}$$

그러므로 점 Q가 나타내는 도형은 도형 S를 원점 O를 중심으로 $\frac{1}{4}$배로 축소한 후 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$, y축이 방향으로 2만큼 평행이동한 원이다. 이 원의 중심을 R이라 하자. 즉, 점 Q가 나타내는 도형은 중심이 $R\left(\frac{1}{2},\ 2\right)$이고 반지름의 길이가 $\frac{1}{2}$인 원이다.

이때,

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{RQ})$$

$$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AR}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{RQ}$$

이고,

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AR}=(4,\ -4)\cdot\left(\frac{5}{2},\ -2\right)=18$$

로 일정하다.

한편, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 값은 두 벡터 $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{RQ}$가 같은 방향일 때 최대이고 반대 방향일 때 최소이므로

$$M=18+|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{RQ}|=18+4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=18+2\sqrt{2}$$

$$m=18-|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{RQ}|=18-4\sqrt{2}\times\frac{1}{2}$$

$$=18-2\sqrt{2}$$

따라서

$$M\times m=(18+2\sqrt{2})(18-2\sqrt{2})$$

$$=324-8=316$$

정답 316