• 수학영역 •

수학 정답

1	④	2	③	3	⑤	4	①	5	②
6	③	7	④	8	①	9	⑤	10	②
11	④	12	②	13	⑤	14	①	15	③
16	⑤	17	①	18	④	19	②	20	③
21	②	22	14	23	145	24	185	25	12
26	11	27	3	28	8	29	38	30	68

해 설

1. [출제의도] 다항식의 덧셈을 계산한다.

$A+B=(x^2+2xy-2y^2)+(x^2+3xy+2y^2)$
$\quad=(x^2+x^2)+(2xy+3xy)+(-2y^2+2y^2)$
$\quad=2x^2+5xy$

2. [출제의도] 복소수의 덧셈을 계산한다.

$(1+i)+(3-4i)=(1+3)+(1-4)i=4-3i$

3. [출제의도] 조합의 수를 계산한다.

${}_5C_2=\dfrac{{}_5P_2}{2!}=\dfrac{5\times4}{2\times1}=10$

4. [출제의도] 선분의 내분을 이해하여 점의 좌표를 구한다.

두 점 $A(-3)$, $B(5)$에 대하여 선분 AB를 $1:3$으로 내분하는 점의 좌표는
$\dfrac{1\times5+3\times(-3)}{1+3}=\dfrac{5-9}{4}=-1$

5. [출제의도] 역함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

역함수의 정의에 의하여 $f(2)=7$이므로 $k=3$
$f(3)=2\times3+3=9$

6. [출제의도] 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

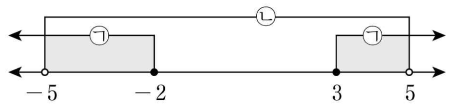
이차함수 $y=x^2-2ax+a+1$의 그래프가 직선 $y=-2x$에 접하므로 이차방정식
$x^2-2ax+a+1=-2x$는 중근을 가져야 한다.
이차방정식 $x^2-2(a-1)x+a+1=0$의 판별식을 D라 할 때,
$\dfrac{D}{4}=(a-1)^2-(a+1)=a^2-3a=a(a-3)=0$
$a=0$ 또는 $a=3$
a는 양수이므로 $a=3$

7. [출제의도] 곱셈 공식을 이용하여 식의 값을 계산한다.

$a^3-b^3=(a-b)^3+3ab(a-b)$
에서 $a-b=2$, $a^3-b^3=32$이므로
$32=8+6ab$, $6ab=24$
$ab=4$

8. [출제의도] 연립부등식을 이해하여 해를 구한다.

$x^2-x-6\ge0$에서
$(x+2)(x-3)\ge0$
$x\le-2$ 또는 $x\ge3$ …… ㉠
$x^2-25<0$에서
$(x+5)(x-5)<0$
$-5<x<5$ …… ㉡
그러므로 ㉠, ㉡에서 연립부등식의 해는
$-5<x\le-2$ 또는 $3\le x<5$



따라서 이를 만족시키는 모든 정수 x의 값은 -4, -3, -2, 3, 4이고, 그 합은 -2

9. [출제의도] 도형의 평행이동과 대칭이동을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

직선 $y=ax+4$를 x축의 방향으로 4만큼 평행이동한 직선의 방정식은 $y=a(x-4)+4$
이 직선을 y축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은
$y=a(-x-4)+4$ …… ㉠
원 $(x+3)^2+(y+5)^2=1$의 넓이를 이등분하는 직선은 원의 중심 $(-3,-5)$를 지나야 하므로, 이를 ㉠에 대입하면
$-5=a\{-(-3)-4\}+4$, $-5=-a+4$
따라서 $a=9$

10. [출제의도] 무리함수의 그래프를 이해하여 선분의 길이를 구한다.

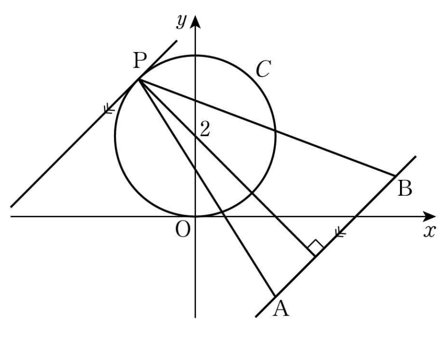
점 $A(k,\sqrt{2k})$, 점 $B(4k,2\sqrt{2k})$, 점 $C(k,0)$, 점 $D(4k,0)$이고 사각형 ACDB는 넓이가 18인 사다리꼴이므로
$\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{2k}+2\sqrt{2k})\times3k=18$
$9k\sqrt{2k}=36$, $2k^3=16$
$k^3=8$에서 $k=2$이므로
$A(2,2)$, $B(8,4)$
따라서 $\overline{AB}=\sqrt{(8-2)^2+(4-2)^2}=2\sqrt{10}$

11. [출제의도] 켤레복소수를 이해하여 식의 값을 구한다.

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 하자.
z는 실수가 아니므로 $b\ne0$
$z^2+4\bar{z}=0$에서
$(a+bi)^2+4(a-bi)=(a^2-b^2+4a)+(2ab-4b)i=0$
이므로
$a^2-b^2+4a=0$ …… ㉠
$2ab-4b=0$ …… ㉡
㉡에서 $b\ne0$이므로 $a=2$
이를 ㉠에 대입하면 $4-b^2+8=0$이므로 $b^2=12$
따라서 $z\bar{z}=(a+bi)\times(a-bi)=a^2+b^2=16$

12. [출제의도] 원과 직선의 위치관계를 이해하여 조건을 만족시키는 점의 x좌표를 구한다.

원 $C:x^2+y^2-4y=0$에서
$x^2+(y-2)^2=4$ …… ㉠



그림과 같이 삼각형 PAB의 넓이가 최대가 될 때 원 C 위의 점 P에서의 접선은 직선 AB와 평행하고 이 접선의 y절편은 양수이어야 한다.
두 점 $A(2,-2)$, $B(5,1)$을 지나는 직선의 기울기는
$\dfrac{1-(-2)}{5-2}=1$
이므로 점 P에서의 접선의 방정식을 $y=x+k\,(k>0)$이라 하자.
원 C의 중심 $(0,2)$와 직선 $y=x+k$ 사이의 거리는 원 C의 반지름의 길이와 같으므로
$\dfrac{|-2+k|}{\sqrt{2}}=2$
$k>0$이므로 $k=2+2\sqrt{2}$
$y=x+2+2\sqrt{2}$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+(x+2\sqrt{2})^2=4$
$2x^2+4\sqrt{2}x+4=0$, $2(x+\sqrt{2})^2=0$
$x=-\sqrt{2}$
점 P의 x좌표는 $-\sqrt{2}$

13. [출제의도] 연립방정식을 이해하여 해를 구한다.

$2x^2-5xy+2y^2=(2x-y)(x-2y)=0$이므로
$x=\dfrac{1}{2}y$ 또는 $x=2y$

(i) $x=\dfrac{1}{2}y$일 때
$4x^2-y^2=4\times\left(\dfrac{1}{2}y\right)^2-y^2$
$\quad=y^2-y^2=0$
이므로 $4x^2-y^2=45$라는 조건을 만족시키지 않는다.

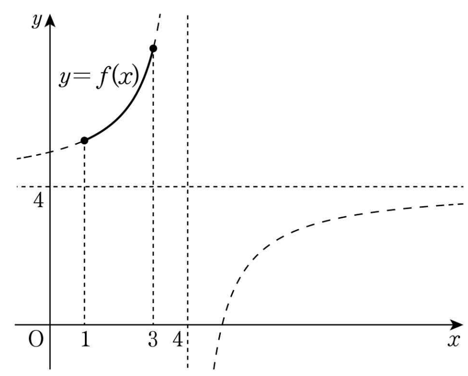
(ii) $x=2y$일 때
$4x^2-y^2=45$에서
$4\times(2y)^2-y^2=15y^2=45$, $y^2=3$
$y=\sqrt{3}$ 또는 $y=-\sqrt{3}$
$y=\sqrt{3}$이면 $x=2\sqrt{3}$,
$y=-\sqrt{3}$이면 $x=-2\sqrt{3}$

(i), (ii)에서 $\alpha>0$, $\beta>0$인 α, β는
$\alpha=2\sqrt{3}$, $\beta=\sqrt{3}$
따라서 $\alpha+\beta=3\sqrt{3}$

14. [출제의도] 유리함수의 그래프를 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$f(x)=\dfrac{4x-k}{x-4}=\dfrac{16-k}{x-4}+4$

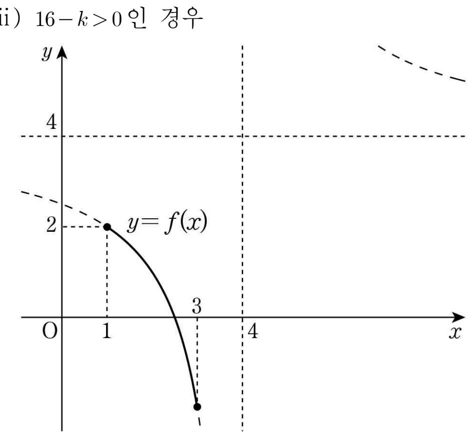
(i) $16-k<0$인 경우



$1\le x\le3$에서 $f(x)>4$이므로 $f(x)$의 최댓값이 2가 될 수 없다.

(ii) $16-k=0$인 경우
$1\le x\le3$에서 $f(x)=4$이므로 $f(x)$의 최댓값이 2가 될 수 없다.

(iii) $16-k>0$인 경우

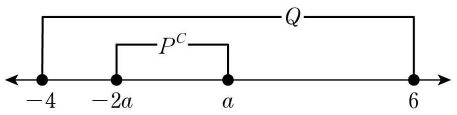


$1\le x\le3$에서 $f(x)$는 $x=1$일 때 최대이므로
$f(1)=\dfrac{16-k}{-3}+4=2$
$\dfrac{16-k}{-3}=-2$
따라서 $k=10$

15. **[출제의도] 필요조건을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.**

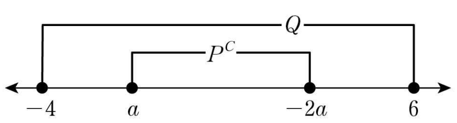
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.
q가 $\sim p$이기 위한 필요조건이므로 $P^C \subset Q$이다.
$q: |x-1| \le 5$에서 $Q=\{x \mid -4 \le x \le 6\}$
$p: (x-a)(x+2a)>0$에서
$\sim p: (x-a)(x+2a) \le 0$

(ⅰ) $a>0$인 경우
$P^C=\{x \mid -2a \le x \le a\}$이고 $P^C \subset Q$이므로
$-4 \le -2a$이고 $a \le 6$
따라서 $0<a \le 2$이다.



(ⅱ) $a=0$인 경우
$P^C=\{0\}$이므로 $P^C \subset Q$가 항상 성립한다.

(ⅲ) $a<0$인 경우
$P^C=\{x \mid a \le x \le -2a\}$이고 $P^C \subset Q$이므로
$-4 \le a$이고 $-2a \le 6$
따라서 $-3 \le a<0$이다.



(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는 $-3 \le a \le 2$이다.
따라서 $M=2$이고 $m=-3$이므로
$M+m=-1$

16. **[출제의도] 조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.**

한 청소년이 조건 (가)를 만족시키도록 동아리를 선택하는 경우의 수는 서로 다른 5개의 동아리에서 3개의 동아리를 선택하는 경우 중 체육 동아리만 3개를 선택하는 경우를 제외하면 되므로
${}_5C_3-{}_3C_3=10-1=9$
따라서 A와 B 각자가 조건 (가)를 만족시키도록 동아리를 선택하는 경우의 수는
$9 \times 9=81$
조건 (나)를 만족시키기 위해 전체 경우의 수에서 'A는 선택하고, B는 선택하지 않은 동아리의 개수가 0인' 경우의 수, 즉 'A와 B 각자가 선택한 동아리가 모두 같은' 경우의 수를 빼면 된다.
A와 B 각자가 선택한 동아리가 모두 같은 경우의 수는 $({}_5C_3-{}_3C_3) \times 1=9$
따라서 구하는 경우의 수는 $81-9=72$

17. **[출제의도] 사차방정식의 해의 개수를 이용하여 조건을 만족시키는 미지수의 값을 추론한다.**

$f(x)=(x-1)(x-5)$이므로
$f(x)f(x-k)=(x-1)(x-5)(x-1-k)(x-5-k)$
에서 방정식 $f(x)f(x-k)=0$의 실근은
$1,\ 5,\ 1+k,\ 5+k$이다.
$1 \ne 5$이고, $k+1 \ne k+5$이므로 $g(t)$의 값은 2 이상 4 이하의 자연수이다.

(ⅰ) $g(t)=2$인 경우
$1<5$, $k+1<k+5$이므로
$1=k+1$이고 $5=k+5$이어야 한다.
그러므로 $k=0$

(ⅱ) $g(t)=3$인 경우
$1<5$, $k+1<k+5$이므로
$5=k+1$ 또는 $1=k+5$이어야 한다.
그러므로 $k=4$ 또는 $k=-4$

(ⅲ) $g(t)=4$인 경우
$1 \ne k+1$, $1 \ne k+5$, $5 \ne k+1$, $5 \ne k+5$이어야 하므로 $k \ne 0$, $k \ne -4$, $k \ne 4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $g(k)$는

$$g(k)=\begin{cases} 2 & (k=0) \\ 3 & (k=-4 \text{ 또는 } k=4) \\ 4 & (k \ne -4,\ k \ne 0,\ k \ne 4\text{인 모든 실수}) \end{cases}$$

$g(k-7)+g(k+1)=6$을 만족시키기 위해서는
$g(k-7)=2$, $g(k+1)=4$ 또는
$g(k-7)=3$, $g(k+1)=3$ 또는
$g(k-7)=4$, $g(k+1)=2$
이어야 한다.
$g(k-7)=2$에서 $k=7$이고 이때 $g(0)+g(8)=6$
$k-7<k+1$이고 $g(k-7)=g(k+1)=3$에서 $k-7=-4$
$k=3$이고 이때 $g(-4)+g(4)=3+3=6$
$g(k+1)=2$에서 $k=-1$이고 이때 $g(-8)+g(0)=6$
따라서 $g(k-7)+g(k+1)=6$이 되도록 하는 모든 실수 k의 값은 $7,\ 3,\ -1$이고, 그 합은 9

18. **[출제의도] 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.**

(ⅰ) 관광객 A가 객실 번호가 101 또는 205인 객실에 숙박하는 경우
관광객 A가 객실 번호가 101인 객실에 숙박하면 관광객 B는 객실 번호가 201인 객실에 숙박해야 하므로 관광객 B가 숙박하는 경우의 수는 1
관광객 C는 객실 번호가 202, 203, 205인 객실 중 한 곳에 숙박해야 하므로 관광객 C가 숙박하는 경우의 수는 3
나머지 2명의 관광객이 남은 5개의 객실에 숙박하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$
그러므로 관광객 A가 객실 번호가 101인 객실에 숙박하는 경우의 수는 $1 \times 3 \times 20=60$
같은 방법으로 관광객 A가 객실 번호가 205인 객실에 숙박하는 경우의 수는 60
따라서 구하는 경우의 수는 $60+60=120$

(ⅱ) 관광객 A가 객실 번호가 103 또는 203인 객실에 숙박하는 경우
관광객 A가 객실 번호가 103인 객실에 숙박하면 관광객 B는 객실 번호가 104 또는 203인 객실에 숙박해야 하므로
관광객 B가 숙박하는 경우의 수는 2
관광객 C는 객실 번호가 201, 202, 205인 객실 중 한 곳에 숙박해야 하므로 관광객 C가 숙박하는 경우의 수는 3
나머지 2명의 관광객이 남은 5개의 객실에 숙박하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$
그러므로 관광객 A가 객실 번호가 103인 객실에 숙박하는 경우의 수는 $2 \times 3 \times 20=120$
같은 방법으로 관광객 A가 객실 번호가 203인 객실에 숙박하는 경우의 수는 120
따라서 구하는 경우의 수는 $120+120=240$

(ⅲ) 관광객 A가 객실 번호가 104 또는 202인 객실에 숙박하는 경우
관광객 A가 객실 번호가 104인 객실에 숙박하면 관광객 B는 객실 번호가 103 또는 105인 객실에 숙박해야 하므로
관광객 B가 숙박하는 경우의 수는 2
관광객 C는 객실 번호가 201, 202, 203, 205인 객실 중 한 곳에 숙박해야 하므로 관광객 C가 숙박하는 경우의 수는 4
나머지 2명의 관광객이 남은 5개의 객실에 숙박하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$
그러므로 관광객 A가 객실 번호가 104인 객실에 숙박하는 경우의 수는 $2 \times 4 \times 20=160$
같은 방법으로 관광객 A가 객실 번호가 202인 객실에 숙박하는 경우의 수는 160
따라서 구하는 경우의 수는 $160+160=320$

(ⅳ) 관광객 A가 객실 번호가 105 또는 201인 객실에 숙박하는 경우
관광객 A가 객실 번호가 105인 객실에 숙박하면 관광객 B는 객실 번호가 104 또는 205인 객실에 숙박해야 하므로
관광객 B가 숙박하는 경우의 수는 2
관광객 C는 객실 번호가 201, 202, 203인 객실 중 한 곳에 숙박해야 하므로 관광객 C가 숙박하는 경우의 수는 3
나머지 2명의 관광객이 남은 5개의 객실에 숙박하는 경우의 수는 ${}_5P_2=20$
그러므로 관광객 A가 객실 번호가 105인 객실에 숙박하는 경우의 수는 $2 \times 3 \times 20=120$
같은 방법으로 관광객 A가 객실 번호가 201인 객실에 숙박하는 경우의 수는 120
따라서 구하는 경우의 수는 $120+120=240$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 경우의 수는
$120+240+320+240=920$

19. **[출제의도] 인수정리를 이용하여 식의 값을 구하는 문제를 해결한다.**

조건 (가)에서 $f(x)+g(x)$는 x^2-5x+6으로 나누어떨어지고 $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$이므로
$f(x)+g(x)$는 $x-2$, $x-3$을 각각 인수로 갖는다.
$f(1)-g(1)=0$이므로 $f(x)-g(x)$는 $x-1$을 인수로 가지고, 조건 (나)에서 $P_1(x)$, $P_2(x)$는 $f(x)-g(x)$로 나누어떨어지므로 $P_1(x)$, $P_2(x)$도 $x-1$을 인수로 갖는다.
조건 (가)에서 $f(x)+g(x)$는 $P_1(x)$, $P_2(x)$로 나누어떨어지므로 $f(x)+g(x)$도 $x-1$을 인수로 갖는다.
즉, $f(x)+g(x)$는 $x-1$, $x-2$, $x-3$을 각각 인수로 갖는다. $f(x)$, $g(x)$가 각각 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로 $f(x)+g(x)$는 최고차항의 계수가 2인 삼차식이고
$f(x)+g(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)$ …… ㉠
한편, $f(x)$, $g(x)$가 각각 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로 $f(x)-g(x)$는 이차 이하의 다항식이다.

(ⅰ) $f(x)-g(x)$가 이차식인 경우
$f(x)-g(x)$의 이차항의 계수를 $a\,(a \ne 0)$이라 하자.
$P_1(x)$, $P_2(x)$가 $f(x)-g(x)$로 나누어떨어지고 $P_1(x)$, $P_2(x)$가 각각 최고차항의 계수가 1인 이차식이므로

$$P_1(x)=P_2(x)=\frac{1}{a}\{f(x)-g(x)\}$$

가 되어 $P_1(x)$, $P_2(x)$가 서로 다른 이차식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $f(x)-g(x)$가 일차식인 경우
상수 $b\,(b \ne 0)$에 대하여
$f(x)-g(x)=b(x-1)$ …… ㉡
이라 할 때, ㉠+㉡에서
$2f(x)=2(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)$

$$f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+\frac{b}{2}(x-1)$$

이므로 $f(2)=\dfrac{b}{2}=1$에서 $b=2$
㉠−㉡에서
$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-(x-1)$

(ⅲ) $f(x)-g(x)$가 상수인 경우
상수 c에 대하여 $f(x)-g(x)=c$라 하면
$f(1)-g(1)=0$이므로 $c=0$이고 $f(x)-g(x)=0$
즉, $f(x)=g(x)$가 되어 $f(x)$, $g(x)$가 서로 다른 삼차식이라는 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서
$g(x)=(x-1)(x-2)(x-3)-(x-1)$이므로
$g(3)=-(3-1)=-2$

20. **[출제의도] 명제의 참, 거짓을 이용하여 집합을 추론한다.**

조건 (가)에서 명제 '어떤 $x \in U$에 대하여

$\{x, x^2+1\}\subset A$이다.'가 참이다.
따라서 집합 A는 $\{1, 2\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 10\}$, $\{4, 17\}$ 중 적어도 하나의 집합을 부분집합으로 가진다. 이때 $1\not\in A$이므로 $\{1, 2\}\not\subset A$
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, p는 q이기 위한 필요충분조건이므로 $P=Q$이다.

(ⅰ) $\{2, 5\}\subset A$인 경우
$2\in A$이고 2가 짝수이므로 조건 (나)에서 $2\in Q$이고 $P=Q$에서 $2\in P$이다.
$x=2$가 조건 p를 만족시키므로 $\frac{1}{2}\times 2=1\in A$가 되어 조건 $1\not\in A$를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\{4, 17\}\subset A$인 경우
$4\in A$이고 4가 짝수이므로 조건 (나)에서 $4\in Q$이고 $P=Q$에서 $4\in P$이다.
$x=4$가 조건 p를 만족시키므로 $\frac{1}{2}\times 4=2\in A$이고, (ⅰ)과 마찬가지로 $1\in A$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

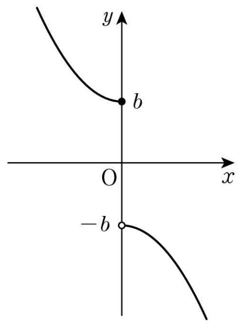
(ⅲ) $\{3, 10\}\subset A$인 경우
$\frac{1}{2}\times 6=3\in A$에서 $x=6$은 조건 p를 만족시킨다.
즉, $6\in P$이고 $P=Q$에서 $6\in Q$이므로 $x=6$은 조건 q를 만족시킨다.
따라서 $6\in A$이고 $\{3, 6, 10\}\subset A$
$\frac{1}{2}\times 12=6\in A$에서 $x=12$는 조건 p를 만족시킨다.
즉, $12\in P$이고 $P=Q$에서 $12\in Q$이므로 $x=12$는 조건 q를 만족시킨다.
따라서 $12\in A$이고 $\{3, 6, 10, 12\}\subset A$
이때 $\frac{1}{2}\times 24=12\in A$이지만, $24>20$이므로 $x=24$는 조건 p를 만족시키지 않는다.
또한 $10\in A$이고 10은 짝수이므로 $x=10$은 조건 q를 만족시킨다.
즉, $10\in Q$이고 $P=Q$에서 $10\in P$이다. $x=10$이 조건 p를 만족시키므로
$\frac{1}{2}\times 10=5\in A$이고 $\{3, 5, 6, 10, 12\}\subset A$
한편 $\frac{1}{2}\times 20=10\in A$에서 $x=20$은 조건 p를 만족시킨다.
즉, $20\in P$이고 $P=Q$에서 $20\in Q$이므로 $x=20$은 조건 q를 만족시킨다.
따라서 $20\in A$이고 $\{3, 5, 6, 10, 12, 20\}\subset A$
이때 $\frac{1}{2}\times 40=20\in A$이지만, $40>20$이므로 $x=40$은 조건 p를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $\{3, 5, 6, 10, 12, 20\}\subset A$이다.
$A=\{3, 5, 6, 10, 12, 20\}$이면
$P=Q=\{6, 10, 12, 20\}$이 되어 조건을 만족시킨다.
따라서 $A=\{3, 5, 6, 10, 12, 20\}$일 때 A의 모든 원소의 합이 최소이고, 그 합은 56

21. [출제의도] 이차함수의 그래프를 추론하여 조건을 만족시키는 함숫값을 구한다.

$-x^2+ax-b=-\{(-x)^2+a(-x)+b\}$이므로
함수 $y=x^2+ax+b\,(x<0)$의 그래프와
함수 $y=-x^2+ax-b\,(x>0)$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+b$에서
함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

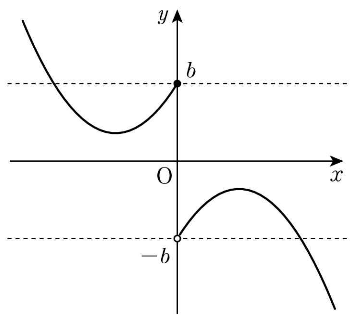
(ⅰ) $a\le 0$인 경우



x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t가 존재하지 않으므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

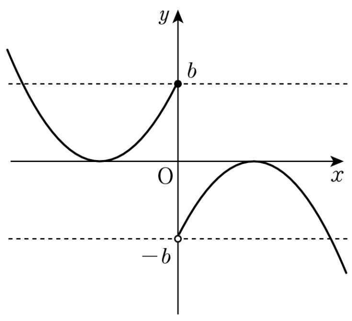
(ⅱ) $a>0$인 경우

① $-\frac{a^2}{4}+b>0$인 경우



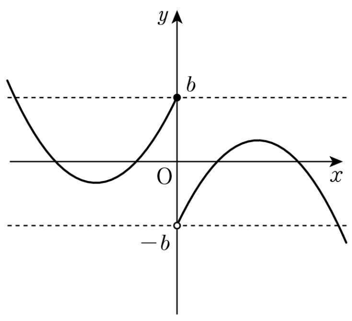
x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t가 무수히 많이 존재하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

② $-\frac{a^2}{4}+b=0$인 경우



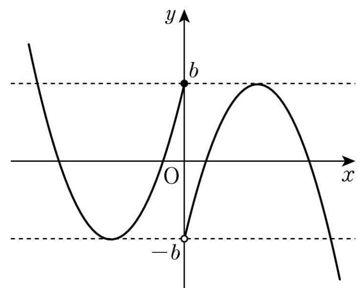
x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t가 무수히 많이 존재하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

③ $-b<-\frac{a^2}{4}+b<0$인 경우



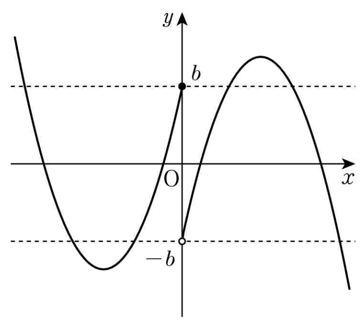
x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t가 무수히 많이 존재하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

④ $-\frac{a^2}{4}+b=-b$인 경우



x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t는 $t=-b$ 하나만 존재하므로 조건 (가)를 만족시킨다.

⑤ $-\frac{a^2}{4}+b<-b$인 경우



x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 실수 t는 두 개 존재하므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ)에서
$-\frac{a^2}{4}+b=-b$
$b=\frac{a^2}{8}$ …… ㉠
조건 (나)에서 $f(0)f(1)\ge 0$, $f(-1)f(0)\ge 0$이어야 한다.
$f(0)>0$이므로 $f(1)\ge 0$, $f(-1)\ge 0$이어야 하고
$f(-1)=-f(1)$이므로 $f(1)=0$이 되어야 한다.
$f(1)=-1+a-b=0$에서 $b=a-1$ …… ㉡
㉠을 ㉡에 대입하면
$\frac{a^2}{8}=a-1$
$a^2-8a+8=0$, $a=4\pm 2\sqrt{2}$
$x>0$일 때, $f(x)=-x^2+ax-b=-x^2+ax-a+1$이므로 방정식 $-x^2+ax-a+1=-(x-1)(x-a+1)=0$의 두 근은 1, $a-1$이다.
$a=4+2\sqrt{2}$ 즉, $a-1=3+2\sqrt{2}$이면
$5<3+2\sqrt{2}<6$이고
$x>0$에서 $f(x)=-(x-1)(x-3-2\sqrt{2})$이므로
$f(5)=-(5-1)\times\{5-(3+2\sqrt{2})\}>0$
$f(6)=-(6-1)\times\{6-(3+2\sqrt{2})\}<0$이다.
따라서 $f(5)f(5+1)<0$이 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
$a=4-2\sqrt{2}$ 즉, $a-1=3-2\sqrt{2}$이면
$0<3-2\sqrt{2}<1$이고
$x>0$에서 $f(x)=-(x-1)(x-3+2\sqrt{2})$이므로
$f(x)<0$을 만족시키는 양수 x의 값의 범위는
$0<x<3-2\sqrt{2}$ 또는 $x>1$이다.
따라서 $k>1$인 모든 정수 k에 대하여 $f(k)<0$이므로 $f(k)f(k+1)>0$이다.
또한 $f(1)=0$이므로
$k=0$이면 $f(k)f(k+1)=f(0)f(1)=0$,
$k=1$이면 $f(k)f(k+1)=f(1)f(2)=0$이다.
한편, $x<0$에서 $f(x)=(x+1)(x+3-2\sqrt{2})$이므로
$f(x)>0$을 만족시키는 음수 x의 값의 범위는
$x<-1$ 또는 $-3+2\sqrt{2}<x<0$이다.
따라서 $k+1<-1$ 즉, $k<-2$인 모든 정수 k에 대하여 $f(k+1)>0$이므로 $f(k)f(k+1)>0$이다.

또한 $f(-1)=0$이므로

$k=-1$이면 $f(k)f(k+1)=f(-1)f(0)=0$이다.

$k=-2$이면 $f(k)f(k+1)=f(-2)f(-1)=0$이다.

그러므로 $a=4-2\sqrt{2}$일 때 모든 정수 k에 대하여 $f(k)f(k+1)\geq 0$이므로 조건을 만족시킨다.

$f(2)=-4+2a-b$

$\quad=-4+2a-(a-1)$

$\quad=a-3=1-2\sqrt{2}$

따라서 $p=1$, $q=-2$이고 $p-q=1-(-2)=3$

22. [출제의도] 집합의 연산을 이용하여 원소의 합을 계산한다.

$A\cap B=\{5, 9\}$이므로 $A\cap B$의 모든 원소의 합은 14

23. [출제의도] 합성함수를 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(9)=9+3=12$이므로

$(g\circ f)(9)=g(f(9))=g(12)=12^2+1=145$

24. [출제의도] 복소수를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $2+3i$이므로

$(2+3i)^2+a(2+3i)+b=(2a+b-5)+(3a+12)i=0$

이때 a, b는 실수이므로

$2a+b-5=0$, $3a+12=0$

$a=-4$, $b=13$

따라서 $a^2+b^2=(-4)^2+13^2=185$

25. [출제의도] 무리함수의 역함수를 이해하여 미지수의 값을 구한다.

역함수의 정의에 의하여 무리함수 $y=\sqrt{2(x-1)}+a$의 그래프는 두 점 $(1, 5)$, $(3, b)$를 지난다.

$\sqrt{2(1-1)}+a=5$이므로 $a=5$,

$\sqrt{2(3-1)}+5=b$이므로 $b=7$

따라서 $a+b=12$

26. [출제의도] 선분의 외분과 직선의 방정식을 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.

선분 OA를 $2:1$로 외분하는 점 P의 좌표는

$\left(\dfrac{2\times1-1\times0}{2-1}, \dfrac{2\times2-1\times0}{2-1}\right)$

즉, $\mathrm{P}(2, 4)$

직선 AB의 방정식은 $y=\dfrac{3}{4}x+\dfrac{5}{4}$이므로

점 Q의 x좌표를 t라 하면 $\mathrm{Q}\left(t, \dfrac{3}{4}t+\dfrac{5}{4}\right)$이고

$\overline{\mathrm{PQ}}^2=(t-2)^2+\left\{\left(\dfrac{3}{4}t+\dfrac{5}{4}\right)-4\right\}^2=\dfrac{25}{16}\left(t-\dfrac{13}{5}\right)^2+1$

점 Q가 선분 AB 위의 점이므로 $1\leq t\leq 5$

따라서 $t=5$일 때 $M=10$이고 $t=\dfrac{13}{5}$일 때 $m=1$이므로 $M+m=11$

27. [출제의도] 삼차방정식을 이해하여 미지수의 값을 구한다.

x에 대한 방정식 $x^3+ax^2+bx-3a=0$이 a를 한 근으로 가지므로

$a^3+a^3+ab-3a=a(2a^2+b-3)=0$에서

$a=0$ 또는 $2a^2+b-3=0$

(i) $a=0$인 경우

$x^3+ax^2+bx-3a=x^3+bx=x(x^2+b)$에서

방정식 $x^3+ax^2+bx-3a=0$이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 $b<0$

그런데 $x^3+bx^2-2ax-2ab=x^3+bx^2=x^2(x+b)$에서 $b\neq0$이므로 방정식 $x^3+bx^2-2ax-2ab=0$은 서로 다른 두 정수 $-b$, 0을 근으로 가진다.

그러므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $2a^2+b-3=0$인 경우

$b=-2a^2+3$ …… ㉠

$x^3+ax^2+(-2a^2+3)x-3a=(x-a)(x^2+2ax+3)=0$

에서 방정식 $(x-a)(x^2+2ax+3)=0$이 a를 포함한 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 방정식 $x^2+2ax+3=0$이 a가 아닌 서로 다른 두 정수를 근으로 가져야 하고, 그 곱은 3이다.

따라서 $x^2+2ax+3=(x-1)(x-3)$

또는 $x^2+2ax+3=(x+1)(x+3)$이다.

① $x^2+2ax+3=(x-1)(x-3)$일 때

$a=-2$이고, 이를 ㉠에 대입하면 $b=-5$

$x^3+bx^2-2ax-2ab=(x+b)(x^2-2a)$

$\qquad=(x-5)(x^2+4)$

에서 $x^3+bx^2-2ax-2ab=0$은 정수인 근을 오직 하나만 가지므로 조건을 만족시킨다.

② $x^2+2ax+3=(x+1)(x+3)$일 때

$a=2$이고, 이를 ㉠에 대입하면 $b=-5$

$x^3+bx^2-2ax-2ab=(x+b)(x^2-2a)$

$\qquad=(x-5)(x+2)(x-2)$

에서 $x^3+bx^2-2ax-2ab=0$은 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 조건을 만족시키지 않는다.

(i), (ii)에서 $a=-2$, $b=-5$이므로 $a-b=3$

28. [출제의도] 원의 방정식과 직선의 방정식을 이용하여 직선의 기울기를 구하는 문제를 해결한다.

원 C의 반지름의 길이를 r이라 하자.

$\overline{\mathrm{AP_1}}=\overline{\mathrm{AP_2}}=r$, $\angle\mathrm{AP_1Q_1}=\angle\mathrm{AP_2Q_2}=90^\circ$이고

삼각형 $\mathrm{AQ_2P_2}$의 넓이가 삼각형 $\mathrm{AP_1Q_1}$의 넓이의 4배이므로 $\overline{\mathrm{P_2Q_2}}=4\overline{\mathrm{P_1Q_1}}$

삼각형 $\mathrm{OP_1Q_1}$과 삼각형 $\mathrm{OP_2Q_2}$는 서로 닮음이고 닮음비가 $1:4$이므로 $\overline{\mathrm{OP_1}}:\overline{\mathrm{OP_2}}=1:4$

$\overline{\mathrm{OP_1}}=2$, $\overline{\mathrm{OP_2}}=2r+2$

$2:(2r+2)=1:4$이므로 $2r+2=8$, $r=3$

$\overline{\mathrm{OA}}=2+3=5$이고 점 A는 직선 $y=x$ 위의 점이므로

점 A의 좌표는 $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{2}, \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)$이다. 따라서 원 C의 방정식은 $\left(x-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2=9$

원 C와 직선 l이 접하므로 점 A와 직선 l 사이의 거리는 원 C의 반지름의 길이인 3이다. 즉,

$\dfrac{\left|m\times\dfrac{5\sqrt{2}}{2}-1\times\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

$\dfrac{25}{2}(m-1)^2=9(m^2+1)$

$7m^2-50m+7=0$, $(7m-1)(m-7)=0$

$m=\dfrac{1}{7}$ 또는 $m=7$

원 C에 접하는 두 직선 중 기울기가 작은 직선이 $y=mx$이므로 $m=\dfrac{1}{7}$

$p=7$, $q=1$이므로 $p+q=7+1=8$

29. [출제의도] 조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 부분집합의 개수를 추론한다.

집합 U의 부분집합 P는 $P=\{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$이다.

조건 (가)에서 $n(X-P)=1$, $n(X\cup P^C)=11$ 또는 $n(X-P)=11$, $n(X\cup P^C)=1$이다.

이때, $(X-P)\subset X\subset(X\cup P^C)$이므로

$n(X-P)\leq n(X)\leq n(X\cup P^C)$이고

$n(X-P)=1$, $n(X\cup P^C)=11$이다.

$n(X-P)=1$이므로 집합 X의 소수가 아닌 원소의 개수는 1이다.

$n(P^C)=n(U)-n(P)=9$이고

$n(X\cup P^C)=n(X)+n(P^C)-n(X\cap P^C)$

$\qquad=n(P^C)+\{n(X)-n(X-P)\}$

$\qquad=n(P^C)+n(X\cap P)$

이므로 $n(X\cap P)=2$이다. 즉, 집합 X의 소수인 원소의 개수는 2이다.

따라서 집합 X는 15 이하의 서로 다른 소수 p_1, p_2와 소수가 아닌 15 이하의 자연수 k에 대하여 $X=\{p_1, p_2, k\}$로 나타낼 수 있다.

조건 (나)에서 $M=p_1\times p_2\times k$의 양의 약수의 개수가 $16=2^4$이므로, p_1, p_2가 아닌 서로 다른 소수 p_3, p_4에 대하여 $k=p_3\times p_4$ 또는 $k=(p_1)^2\times p_3$ 또는 $k=(p_3)^3$의 꼴이다.

(i) $k=p_3\times p_4$의 꼴인 경우

$k\leq15$이므로 $k=2\times3$, $k=2\times5$, $k=2\times7$, $k=3\times5$의 4가지 경우가 있다. 각각의 경우마다 k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 k의 소인수가 아닌 4개의 원소 중에서 2개의 원소를 택하는 ${}_4\mathrm{C}_2$가지가 있으므로, 구하는 경우의 수는 $4\times{}_4\mathrm{C}_2=24$

(ii) $k=(p_1)^2\times p_3$의 꼴인 경우

$k\leq15$이므로 $k=2^2\times3$의 1가지 경우가 있다. k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 2와 3이 아닌 4개의 원소 중에서 1개의 원소를 택하는 ${}_4\mathrm{C}_1$가지이므로 구하는 경우의 수는 $1\times{}_4\mathrm{C}_1=4$

(iii) $k=(p_3)^3$의 꼴인 경우

$k\leq15$이므로 $k=2^3$의 1가지 경우가 있다. k를 제외한 집합 X의 나머지 두 원소를 정하는 경우는 집합 P의 원소 중 2가 아닌 5개의 원소 중에서 2개의 원소를 택하는 ${}_5\mathrm{C}_2$가지이므로 구하는 경우의 수는 $1\times{}_5\mathrm{C}_2=10$

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 부분집합 X의 개수는 $24+4+10=38$

30. [출제의도] 함수의 그래프의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax-an}{x-2}-n & (x<2\text{ 또는 }2<x<n)\\ -a\sqrt{x-n}-n & (x\geq n)\end{cases}$$

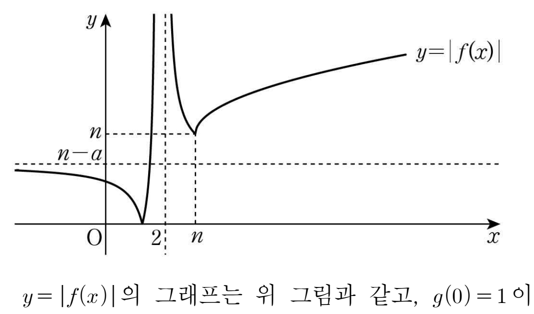
$\dfrac{ax-an}{x-2}-n=\dfrac{a(x-2)+2a-an}{x-2}-n$

$\qquad=\dfrac{a(2-n)}{x-2}+a-n$

이므로

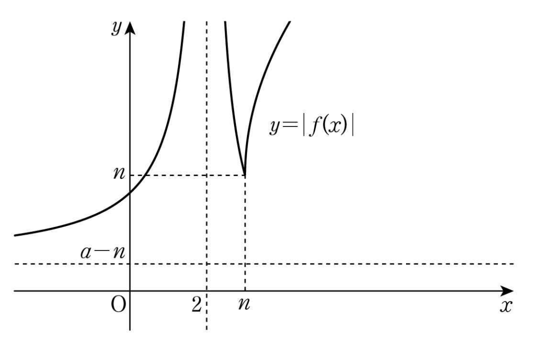
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(2-n)}{x-2}+a-n & (x<2\text{ 또는 }2<x<n)\\ -a\sqrt{x-n}-n & (x\geq n)\end{cases}$$

(i) $0<a<n$인 경우



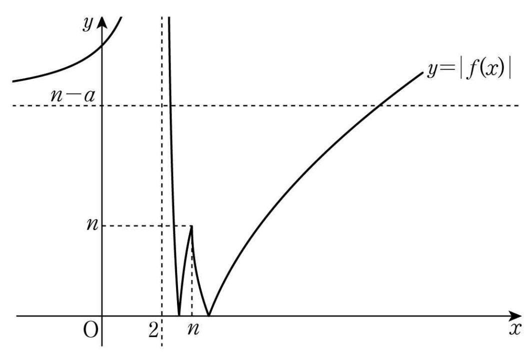
$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고, $g(0)=1$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $a>n$인 경우



$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고, $g(0)=0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $a<0$인 경우



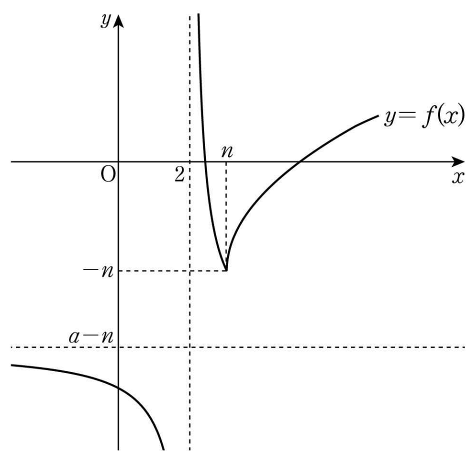
$y=|f(x)|$의 그래프는 위 그림과 같고, 이때

$$g(t)=\begin{cases} 0 & (t<0) \\ 2 & (t=0 \text{ 또는 } n<t\le n-a) \\ 3 & (t=n \text{ 또는 } t>n-a) \\ 4 & (0<t<n) \end{cases} \quad \cdots\cdots \ ㉠$$

$g(t)=2$를 만족시키는 실수 t의 최솟값은 0, 최댓값은 $n-a$이다. 조건 (가)에서 $n-a=\frac{3}{2}n$이므로 $a=-\frac{1}{2}n$이고

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{n^2-2n}{2x-4}-\dfrac{3}{2}n & (x<2 \text{ 또는 } 2<x<n) \\ \dfrac{1}{2}n\sqrt{x-n}-n & (x\ge n) \end{cases}$$

조건 (나)에서 $g(n)=3$이므로 $g(|f(5)|)=2$



$f(5)<0$인 경우 $-n<f(5)<0$이므로 ㉠에서 $g(|f(5)|)=4$가 되어 조건 (나)를 만족시키지 않는다. 그러므로 $f(5)\ge 0$

즉, ㉠에서 $f(5)=0$ 또는 $n<f(5)\le\frac{3}{2}n$

① $f(5)=0$인 경우

$2<n\le 5$이면

$f(5)=\frac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n=0$

$2n=n\sqrt{5-n}$

$2=\sqrt{5-n}$

$n=1$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$n>5$이면

$f(5)=\frac{n^2-2n}{6}-\frac{3}{2}n=\frac{1}{6}n(n-11)=0$이므로

조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 11

② $n<f(5)\le\frac{3}{2}n$인 경우

$2<n\le 5$이면

$f(5)=\frac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n$이므로

$n<\frac{1}{2}n\sqrt{5-n}-n\le\frac{3}{2}n$

$1<\frac{1}{2}\sqrt{5-n}-1\le\frac{3}{2}$

$4<\sqrt{5-n}\le 5$

그런데 $2<n\le 5$에서 $\sqrt{5-n}<\sqrt{3}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

$n>5$이면

$f(5)=\frac{n^2-2n}{6}-\frac{3}{2}n$

$=\frac{1}{6}n^2-\frac{11}{6}n$

$n<\frac{1}{6}n^2-\frac{11}{6}n\le\frac{3}{2}n$

$1<\frac{1}{6}n-\frac{11}{6}\le\frac{3}{2}$

$6<n-11\le 9$

$17<n\le 20$

이므로 조건을 만족시키는 자연수 n의 값은

18, 19, 20

(i), (ii), (iii)에서 조건을 만족시키는 모든 n의 값은 11, 18, 19, 20이고 그 합은 68이다.