• 수학 영역 •

최근 수정일 : 2025.4.3.(목)

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다.
무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

수학 정답

1	②	2	④	3	③	4	②	5	⑤
6	①	7	⑤	8	③	9	③	10	⑤
11	①	12	④	13	③	14	④	15	②
16	6	17	3	18	12	19	32	20	71
21	381	22	154						

해 설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$\sqrt[3]{4}\times 2^{\frac{1}{3}}=(2^2)^{\frac{1}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}}\times 2^{\frac{1}{3}}=2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=2^1=2$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=3x^2-8x+1$ 이므로

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)=27-24+1=4$

3. [출제의도] 등비수열을 계산하여 공비를 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r이라 하자.
수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 양수이므로 $a>0$, $r>0$

$ar^3=2ar^2+3ar$

$r^2-2r-3=(r+1)(r-3)=0$

$r=-1$ 또는 $r=3$

$r>0$ 이므로 $r=3$

4. [출제의도] 함수의 극한을 이해하여 좌극한과 우극한을 구한다.

$\lim_{x\to 0-}f(x)=1$, $\lim_{x\to 1+}f(x)=2$ 이므로

$\lim_{x\to 0-}f(x)-\lim_{x\to 1+}f(x)=1-2=-1$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$f'(x)=(2x+1)(2x^2-x)+(x^2+x)(4x-1)$

$f'(1)=3\times 1+2\times 3=9$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 식의 값을 구한다.

$\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)=-\cos\theta=\frac{1}{3}$ 이므로 $\cos\theta=-\frac{1}{3}$

$\sin\theta\tan\theta=\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}=\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{8}{9}}{-\frac{1}{3}}=-\frac{8}{3}$

7. [출제의도] 부정적분을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f(x)=\int f'(x)dx=\int(x^3+x)dx$

$=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+C$ (C는 적분상수)

$C=f(0)=-1$ 이므로

$f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2-1$

따라서 $f(2)=\frac{1}{4}\times 2^4+\frac{1}{2}\times 2^2-1=5$

8. [출제의도] 로그의 성질을 이용하여 상수의 값을 구한다.

$a=(\log 3)^2-(\log 2)^2=(\log 3-\log 2)(\log 3+\log 2)$

$=\log\frac{3}{2}\times\log 6$

$b=\log_6 10=\frac{1}{\log 6}$

$ab=\log\frac{3}{2}\times\log 6\times\frac{1}{\log 6}=\log\frac{3}{2}$

로그의 정의에 의해 $10^{ab}=\frac{3}{2}$

9. [출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

원점에서 출발한 점 P의 시각 $t=a$에서의 위치가 0 이므로

$$\begin{aligned}\int_0^a v(t)dt&=\int_0^a(-3t^2+6t)dt\\&=\Big[-t^3+3t^2\Big]_0^a\\&=-a^3+3a^2\\&=-a^2(a-3)=0\end{aligned}$$

a가 양수이므로 $a=3$, $2a=6$

시각 $t=0$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\begin{aligned}\int_0^6|v(t)|dt&=\int_0^6|-3t^2+6t|dt\\&=\int_0^2(-3t^2+6t)dt+\int_2^6(3t^2-6t)dt\\&=\Big[-t^3+3t^2\Big]_0^2+\Big[t^3-3t^2\Big]_2^6\\&=(-8+12)+(216-108)-(8-12)\\&=4+108+4=116\end{aligned}$$

10. [출제의도] 수열의 합을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 값을 구한다.

자연수 m에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\begin{cases}9+m & (n=3m-2)\\ 19+m & (n=3m-1)\\ m & (n=3m)\end{cases}$$

$\sum_{k=1}^{3n}a_k=n$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}a_k=n$

(ⅰ) $n=3m-2$인 경우

$9+m=3m-2$에서 $m=\frac{11}{2}$ 이므로

조건을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅱ) $n=3m-1$인 경우

$19+m=3m-1$에서 $m=10$ 이므로

조건을 만족시키는 자연수 n의 값은 29이다.

(ⅲ) $n=3m$인 경우

$m=3m$에서 $m=0$ 이므로

조건을 만족시키는 자연수 n은 존재하지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 자연수 n의 값은 29

11. [출제의도] 함수의 극솟값을 이해하여 함숫값을 구한다.

$f'(x)=3x^2+6ax=3x(x+2a)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2a$ 또는 $x=0$

(ⅰ) $a>0$인 경우

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극솟값을 가지므로

$f(0)=4a=-40$

$a=-10<0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a<0$인 경우

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$-2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2a$에서 극솟값을 가지므로

$f(-2a)=(-2a)^3+3a\times(-2a)^2+4a$

$=4a^3+4a=-40$

$a^3+a+10=0$, $(a+2)(a^2-2a+5)=0$

$a=-2$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a=-2$ 이고 $f(x)=x^3-6x^2-8$

따라서 $f(2)=2^3-6\times 2^2-8=-24$

12. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$f'(x)=3x^2+4x-1$ 이므로

점 A의 좌표를 $(t, f(t))$라 하면 접선의 방정식은

$y=(3t^2+4t-1)(x-t)+(t^3+2t^2-t+4)$

이 접선이 원점을 지나므로

$-2t^3-2t^2+4=0$, $-2(t-1)(t^2+2t+2)=0$

$t=1$

그러므로 점 A의 좌표는 $(1, 6)$이고 점 A에서의 접선의 방정식은 $y=6x$이다. 구하는 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^{0}(x^3+2x^2-x+4)dx+\int_0^1\{(x^3+2x^2-x+4)-6x\}dx$$

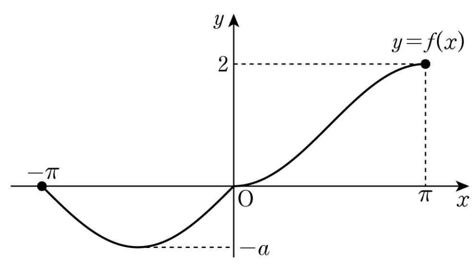
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+4x\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x\right]_0^1$$

$$=\frac{34}{3}+\frac{17}{12}=\frac{153}{12}=\frac{51}{4}$$

13. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

(ⅰ) $a>0$인 경우

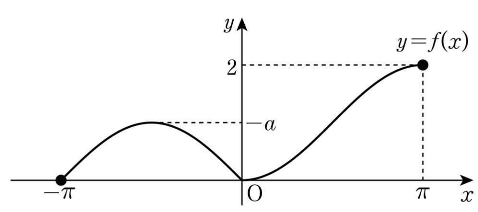
닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$M=2$, $m=-a$ 이므로 $M-m=4$를 만족시키는 실수 a의 값은 $2-(-a)=4$에서 $a=2$

(ⅱ) $-2\le a<0$인 경우

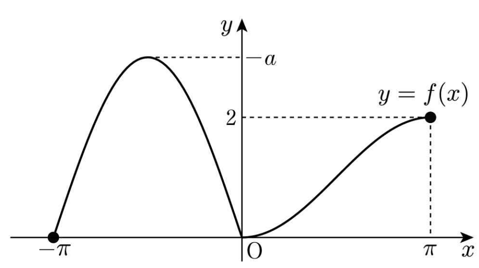
닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$M=2$, $m=0$ 이므로 $M-m=4$를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $a<-2$인 경우

닫힌구간 $[-\pi, \pi]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$M=-a$, $m=0$ 이므로 $M-m=4$를 만족시키는 실수 a의 값은 $-a=4$에서 $a=-4$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 모든 a의 값의 곱은 $2\times(-4)=-8$

14. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 함숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$\int_{x_1}^{x_2}\{f(t)-f(a)\}dt \geq \int_{x_1}^{x_2}f'(a)(t-a)dt$

$\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt-\int_{x_1}^{x_2}f(a)dt \geq \int_{x_1}^{x_2}f'(a)(t-a)dt$

$\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt \geq \int_{x_1}^{x_2}f'(a)(t-a)dt+\int_{x_1}^{x_2}f(a)dt$

$\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt \geq \int_{x_1}^{x_2}\{f'(a)(t-a)+f(a)\}dt$ 이므로

$x_1 \leq x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

$\int_{x_1}^{x_2}f(t)dt \geq \int_{x_1}^{x_2}\{f'(a)(t-a)+f(a)\}dt$

이려면 사차함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$

두 점 $(-1, f(-1))$, $(3, f(3))$을 지나는 직선의 방정식을 $y=mx+n$(m, n은 상수)라 하면

$m=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{f(3)-f(-1)}{4}$

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위가

$a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$이므로

$x=-1$, $a=3$일 때 $f(-1) \geq -4f'(3)+f(3)$

$\frac{f(3)-f(-1)}{4} \leq f'(3)$ …… ㉠

$x=3$, $a=-1$일 때 $f(3) \geq 4f'(-1)+f(-1)$

$f'(-1) \leq \frac{f(3)-f(-1)}{4}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$f'(-1) \leq m \leq f'(3)$ …… ㉢

함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)-(mx+n)$이라 하자.

$g(a)=f(a)-ma-n$

$g'(x)=f'(x)-m$에서 $g'(a)=f'(a)-m$

모든 실수 x에 대하여

$f(x) \geq f'(a)(x-a)+f(a)$

$f(x)-(mx+n) \geq f'(a)(x-a)+f(a)-(mx+n)$

$f(x)-(mx+n) \geq \{f'(a)-m\}(x-a)+\{f(a)-ma-n\}$

이므로 $g(x) \geq g'(a)(x-a)+g(a)$를 만족시키는 모든 실수 a의 값의 범위도 $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$이다.

$g(-1)=g(3)=0$이므로

$g(x) \geq g'(-1)(x+1)$ …… ㉣

$g(x) \geq g'(3)(x-3)$ …… ㉤

㉢에서 $g'(-1) \leq 0 \leq g'(3)$이므로

㉣, ㉤에서 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$일 때 $g(x) \geq 0$

구간 $(-\infty, -1]$에서 $g(x)$의 최솟값은 $g(-1)=0$이고, 구간 $[3, \infty)$에서 $g(x)$의 최솟값은 $g(3)=0$이다.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$는 최솟값을 가지고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(c)$를 만족시키는 실수 c가 닫힌구간 $[-1, 3]$에 존재한다.

$g(c)$가 극솟값이므로 $g'(c)=0$이고

$g(x) \geq g(c)=g'(c)(x-c)+g(c)$

실수 $a=c$가 $g(x) \geq g'(a)(x-a)+g(a)$를 만족시키므로 $c \leq -1$ 또는 $c \geq 3$

그러므로 $c=-1$ 또는 $c=3$

즉 $g(-1)=g(3)=0$, $g'(-1)=g'(3)=0$이므로

$g(x)=(x+1)^2(x-3)^2$

$f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+mx+n$

$f'(x)=4(x+1)(x-3)(x-1)+m$

$f(1)=15$이므로

$16+m+n=15$

$m+n=-1$ …… ㉥

$f'(1)=1$이므로 $m=1$

$m=1$을 ㉥에 대입하면 $n=-2$

$f(x)=(x+1)^2(x-3)^2+x-2$

따라서 $f(4)=27$

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 추론한다.

함수 $y=|2^x-4|$의 치역이 $\{y\,|\,y \geq 0\}$,

함수 $y=a+\log_2 x$의 치역이 실수 전체의 집합이고 함수 $f(x)$의 치역이 실수 전체의 집합이므로

$p \leq 0$ …… ㉠

$p<x<q$에서 $f(x)=a+\log_2 x$이고

함수 $f(x)$의 정의역이 실수 전체의 집합이므로

$p \geq 0$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $p=0$

$\{f(x)\,|\,x \leq 0\}=\{y\,|\,3 \leq y<4\}$

함수 $f(x)$가 일대일대응이므로

$\{f(x)\,|\,x>0\}=\{y\,|\,y<3$ 또는 $y \geq 4\}$이고

$\{f(x)\,|\,0<x<q\}=\{y\,|\,y<a+\log_2 q\}=\{y\,|\,y<3\}$,

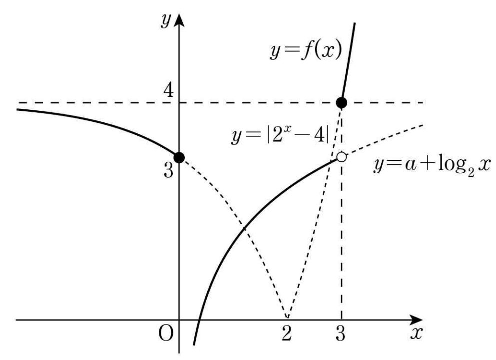
$\{f(x)\,|\,x \geq q\}=\{y\,|\,y \geq 4\}$이다.

$|2^q-4|=4$에서 $q=3$

$a+\log_2 3=3$, $a=3-\log_2 3$

$f\left(\frac{p+q}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=3-\log_2 3+\log_2 \frac{3}{2}$

$=3-\log_2 3+\log_2 3-1=2$



16. [출제의도] 로그함수의 성질을 이해하여 방정식의 해를 구한다.

로그의 진수는 양수이므로

$x-2>0$, $x+10>0$

그러므로 $x>2$

$\log_9(x+10)=\log_{3^2}(x+10)=\frac{1}{2}\log_3(x+10)$이므로

$\log_3(x-2)=\log_9(x+10)$에서

$\log_3(x-2)=\frac{1}{2}\log_3(x+10)$

$2\log_3(x-2)=\log_3(x+10)$

$\log_3(x-2)^2=\log_3(x+10)$

$(x-2)^2=x+10$, $x^2-5x-6=(x+1)(x-6)=0$

$x=-1$ 또는 $x=6$

$x>2$이므로 $x=6$

17. [출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 상수의 개수를 구한다.

$f(x)=x^3+3x^2-k$라 하면

$f'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$의 극댓값은 $f(-2)=-8+12-k=4-k$이고 극솟값은 $f(0)=-k$이다.

방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $f(x)$의 극댓값은 양수이고 극솟값은 음수이다.

$f(-2)=4-k>0$에서 $k<4$

$f(0)=-k<0$에서 $k>0$

$0<k<4$이므로 $k=1$ 또는 $k=2$ 또는 $k=3$

따라서 구하는 자연수 k의 개수는 3

18. [출제의도] $\sum$의 성질을 이해하여 수열의 합을 구한다.

$\sum_{k=1}^{8}(a_k+3)(a_k-1)=\sum_{k=1}^{8}(a_k{}^2+2a_k-3)$

$=\sum_{k=1}^{8}a_k{}^2+\sum_{k=1}^{8}2a_k-\sum_{k=1}^{8}3$

$=\sum_{k=1}^{8}a_k{}^2+2\sum_{k=1}^{8}a_k-\sum_{k=1}^{8}3$

$=20+16-24=12$

19. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$\int_0^x\{f(t)+t^2\}dt=xf(x)-x^3$ …… ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+x^2=f(x)+xf'(x)-3x^2$

$xf'(x)=4x^2$

다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$도 다항함수이므로

$f'(x)=4x$

따라서 $\int_0^4 f'(x)dx=\int_0^4 4x\,dx=\left[2x^2\right]_0^4=32$

20. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 넓이에 관한 문제를 해결한다.

$\overline{AB}:\overline{AC}=2:1$, $\overline{BD}:\overline{DC}=3:1$이므로

$\overline{AB}=2a$, $\overline{AC}=a$, $\overline{BD}=3b$, $\overline{DC}=b$

$(a>0$, $b>0)$이라 하자.

삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{BD}\times\cos\theta$

$4a^2=2+9b^2-2\times\sqrt{2}\times 3b\times\frac{\sqrt{2}}{4}$ …… ㉠

$\angle ADC=\pi-\theta$이므로 삼각형 ADC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{AD}\times\overline{CD}\times\cos(\pi-\theta)$

$a^2=2+b^2-2\times\sqrt{2}\times b\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $9b^2-3b+2=4b^2+4b+8$

$5b^2-7b-6=(5b+3)(b-2)=0$

$b=-\frac{3}{5}$ 또는 $b=2$

$b>0$이므로 $b=2$

㉡에 $b=2$를 대입하면 $a^2=8$

$a>0$이므로 $a=2\sqrt{2}$

θ는 예각이므로

$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{14}}{4}$

삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R이라 하면 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{AB}}{\sin\theta}=2R$, $\frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{14}}{4}}=2R$, $R=\frac{8}{\sqrt{7}}$

삼각형 ABD의 외접원의 넓이는 $\frac{64}{7}\pi$

따라서 $p=7$, $q=64$이므로 $p+q=71$

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론한다.

$a_6=2$이므로 $a_6=\frac{a_5}{5}$이고 $a_5=10$

(ⅰ) $a_4 \geq 3$인 경우

$a_5=\frac{a_4}{4}$이므로 $a_4=4a_5=40$

$a_4=\frac{a_3}{3}$이므로 $a_3=3a_4=120$

$a_3=\frac{a_2}{2}$이므로 $a_2=2a_3=240$

$a_2=\frac{a_1}{1}$이므로 $a_1=a_2=240$

(ⅱ) $a_4<3$인 경우

$a_4 \neq 10$ 이므로 $a_3 \geq 3$

$a_4 = \frac{a_3}{3}$, $a_3 = 3a_4 < 9$

그러므로 $3 \leq a_3 < 9$

$a_3 \neq 10$ 이므로 $a_3 = \frac{a_2}{2}$, $a_2 = 2a_3$ 에서

$6 \leq a_2 < 18$ …… ㉠

① $a_1 \geq 3$ 이면 $a_2 = \frac{a_1}{1}$, $a_1 = a_2$ 이고

a_1 이 자연수이므로 ㉠에서 $a_1 = 6,\ 7,\ \cdots,\ 17$

② $a_1 < 3$ 이면 $a_2 = 10$ 이므로 ㉠을 만족시킨다.

a_1 이 자연수이므로 $a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 2$

(i), (ii)에서 a_1 의 값은

$1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8,\ \cdots,\ 16,\ 17,\ 240$

따라서 구하는 모든 a_1 의 값의 합은

$1 + 2 + \sum_{n=6}^{17} n + 240 = 381$

22. [출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0-} g(x) = -f(0)$, $\lim_{x \to 0+} g(x) = |f(0)| - 8$

$-f(0) = |f(0)| - 8$

$f(0) = 4$ …… ㉠

$g(0) = |f(0)| - 8 = -4$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0-} \frac{-f(0+h) + f(0)}{h} = -f'(0)$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{|f(0+h)| + 2h^2 - 8 + 4}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{|f(0+h)| - f(0)}{h} + \lim_{h \to 0+} \frac{2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} + 0 = f'(0)$$

$-f'(0) = f'(0)$

$f'(0) = 0$ …… ㉡

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \to 0-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{|f(2+h)| + 2(2+h)^2 - 8 - |f(2)|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + \lim_{h \to 0-} \frac{2h^2 + 8h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8$$

$$\lim_{h \to 0+} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{|f(2+h)| - 2(2+h)^2 + 8 - |f(2)|}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - \lim_{h \to 0+} \frac{2h^2 + 8h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8$$

$$\lim_{h \to 0-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8 = \lim_{h \to 0+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8 \quad \cdots\cdots \text{㉢}$$

즉 함수 $|f(x)|$가 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

$f(2) = 0$ …… ㉣

$\lim_{h \to 0+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = |f'(2)|$ 와

$\lim_{h \to 0-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = -|f'(2)|$ 를 ㉢에 대입하면

$|f'(2)| = 8$ …… ㉤

㉠, ㉡, ㉣, ㉤을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$는

$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ 또는 $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$

(i) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ 인 경우

$3x^3 - 7x^2 + 4 = (3x+2)(x-1)(x-2)$ 이므로

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않다.

(ii) $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$ 인 경우

$-x^3 + x^2 + 4 = -(x-2)(x^2 + x + 2)$ 이므로

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$ 이다.

따라서 $f(-5) = 154$

[확률과 통계]

23	①	24	⑤	25	②	26	③	27	④
28	④	29	363	30	330				

23. [출제의도] 중복조합의 수를 계산한다.

${}_4\mathrm{H}_3 = {}_{4+3-1}\mathrm{C}_3 = {}_6\mathrm{C}_3 = 20$

24. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

도로망을 따라 오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a, 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b라 하자.

P지점에서 출발하여 Q지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 4개의 a와 3개의 b를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 $aaaabbb$인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

따라서 구하는 경우의 수는 $\frac{7!}{4!3!} - 1 = 35 - 1 = 34$

25. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

네 문자 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$

세 문자 $b,\ c,\ d$ 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$

따라서 구하는 경우의 수는 $256 - 81 = 175$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

서로 이웃한 2장의 카드에 적힌 수의 합이 모두 4 이상이 되려면 숫자 1이 적힌 카드와 이웃한 카드에는 숫자 3이 적혀 있어야 한다.

(i) 숫자 1이 적힌 카드가 양 끝에 있는 경우

1, 3, □, □, □, □ 또는 □, □, □, □, 3, 1

에서 □에 2, 2, 3, 3을 나열하는 경우의 수는

$2 \times \frac{4!}{2!2!} = 12$

(ii) 숫자 1이 적힌 카드가 양 끝에 있지 않은 경우

숫자 1이 적힌 카드의 양옆에 숫자 3이 적힌 카드가 있어야 하므로 3, 1, 3을 하나의 문자 a로 보고 a, 2, 2, 3을 나열하는 경우의 수는 $\frac{4!}{2!} = 12$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$12 + 12 = 24$

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 추론한다.

조건 (가)에서

$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6)$

3의 배수 a에 대하여 $f(a) = b$라 하자.

조건 (나)에서 $f(f(a)) = a$이므로 $f(b) = a$

$a > b$이면 $f(b) > f(a)$이고, $a < b$이면 $f(b) < f(a)$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(a) = a$, 즉 $f(3) = 3$이고 $f(6) = 6$

$f(1),\ f(2)$의 값을 정하는 경우의 수는 세 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_2 = {}_4\mathrm{C}_2 = 6$

$f(4),\ f(5)$의 값을 정하는 경우의 수는 네 숫자 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

${}_4\mathrm{H}_2 = {}_5\mathrm{C}_2 = 10$

따라서 구하는 경우의 수는

$6 \times 10 = 60$

28. [출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

검은색 접시를 배열하는 원순열의 수는 $(3-1)! = 2$

조건 (가)에서 각각의 검은색 접시 사이에 흰색 접시가 적어도 한 개 있다.

검은색 접시 사이에 놓인 흰색 접시의 개수를 각각 $a,\ b,\ c\,(a \geq b \geq c)$라 하면 $a=2,\ b=1,\ c=1$

흰색 접시를 놓는 경우의 수는 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열할 때, 첫 번째와 두 번째에 있는 수가 모두 홀수인 경우와 모두 짝수인 경우를 제외한 경우의 수와 같다.

숫자 1, 2, 3, 4를 나열하는 경우의 수는 $4! = 24$

첫 번째와 두 번째 있는 수가 모두 홀수인 경우의 수는 $2! \times 2! = 4$

첫 번째와 두 번째 있는 수가 모두 짝수인 경우의 수는 $2! \times 2! = 4$

검은색 접시 사이에 2개, 1개, 1개의 흰색 접시를 놓는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$

흰색 접시를 놓는 경우의 수는

$(24 - 4 - 4) \times 3 = 48$

따라서 구하는 경우의 수는 $2 \times 48 = 96$

29. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

주사위를 네 번 던져서 나온 눈의 수인 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 짝수의 개수는 2 이상이어야 한다.

(i) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 짝수의 개수가 2인 경우

$a \times b \times c \times d$가 16의 배수이므로 4의 개수는 2이다.

네 수 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 4인 수 2개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$

남은 2개의 수가 홀수인 경우의 수는 ${}_3\Pi_2 = 9$

구하는 경우의 수는

$6 \times 9 = 54$

(ii) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 짝수의 개수가 3인 경우

$a \times b \times c \times d$가 16의 배수이므로 4의 개수는 1 이상이다.

네 수 $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 짝수인 수 3개를 선택하는 경우의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3 = 4$

짝수인 수 중 4의 개수가 1 이상인 경우의 수는

${}_3\Pi_3 - {}_2\Pi_3 = 27 - 8 = 19$

남은 1개의 수가 홀수인 경우의 수는 ${}_3\Pi_1 = 3$

구하는 경우의 수는

$4 \times 19 \times 3 = 228$

(iii) $a,\ b,\ c,\ d$ 중 짝수의 개수가 4인 경우

구하는 경우의 수는 ${}_3\Pi_4 = 81$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$54 + 228 + 81 = 363$

30. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

학생 A, B, C, D, E가 받는 검은 공의 개수를 각각 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$라 하고

학생 A, B, C, D, E가 받는 흰 공의 개수를 각각 $a',\ b',\ c',\ d',\ e'$이라 하자.

이때 $a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ a',\ b',\ c',\ d',\ e'$은 모두 음이 아닌 정수이다.

공이 모두 8개이고 조건 (가)에서 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합이 홀수이므로

학생 D, E가 받는 공의 개수의 합 $(d+d')+(e+e')$은 홀수이다.

이때, 조건 (나)를 만족시키는 $d+d',\ e+e'$의 값은 $d+d' = 2,\ e+e' = 1$ 뿐이다.

(ⅰ) $(d, d', e, e')=(2, 0, 1, 0)$인 경우
$a+b+c=1$, $a'+b'+c'=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는
${}_3H_1 \times {}_3H_4 = 45$

(ⅱ) $(d, d', e, e')=(2, 0, 0, 1)$인 경우
$a+b+c=2$, $a'+b'+c'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는
${}_3H_2 \times {}_3H_3 = 60$

(ⅲ) $(d, d', e, e')=(1, 1, 1, 0)$인 경우
$a+b+c=2$, $a'+b'+c'=3$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는
${}_3H_2 \times {}_3H_3 = 60$

(ⅳ) $(d, d', e, e')=(1, 1, 0, 1)$인 경우
$a+b+c=3$, $a'+b'+c'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는
${}_3H_3 \times {}_3H_2 = 60$

(ⅴ) $(d, d', e, e')=(0, 2, 1, 0)$인 경우
$a+b+c=3$, $a'+b'+c'=2$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는
${}_3H_3 \times {}_3H_2 = 60$

(ⅵ) $(d, d', e, e')=(0, 2, 0, 1)$인 경우
$a+b+c=4$, $a'+b'+c'=1$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c'의 모든 순서쌍의 개수는
${}_3H_4 \times {}_3H_1 = 45$

(ⅰ)~(ⅵ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$2 \times (45+60+60) = 330$

[미적분]

23	①	24	③	25	④	26	⑤	27	②
28	④	29	13	30	25				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+2}{4n^2-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{4-\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4}$$

24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)a_n}{n^2}=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n}{3n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n+3)a_n}{n^2}\times\frac{n^3}{(2n+3)(3n^2+1)}\right\}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)a_n}{n^2}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(2+\frac{3}{n}\right)\left(3+\frac{1}{n^2}\right)}$$
$$= 3\times\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

25. [출제의도] 등비수열의 극한을 이해하여 자연수의 개수를 구한다.

$a_n = \left(\dfrac{k^2+9}{10k}\right)^n + \left(\dfrac{3}{k}\right)^n$에서 k가 자연수이므로

$\dfrac{k^2+9}{10k}>0$, $\dfrac{3}{k}>0$

두 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}$, $\left\{\left(\dfrac{3}{k}\right)^n\right\}$ 중 어느 한 수열이 발산하면 수열 $\{a_n\}$이 수렴하지 않으므로

두 등비수열 $\left\{\left(\dfrac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}$, $\left\{\left(\dfrac{3}{k}\right)^n\right\}$이 모두 수렴하여야 한다.

$\dfrac{k^2+9}{10k}\le 1$에서 $k^2-10k+9\le 0$, $1\le k\le 9$

$\dfrac{3}{k}\le 1$에서 $k\ge 3$이므로

$3\le k\le 9$

따라서 구하는 자연수 k의 개수는 7

26. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

모든 자연수 n에 대하여

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{a_k-k^2}{k+1} = 2n^2-n$이라 하자.

$n\ge 2$일 때,

$$\frac{a_n-n^2}{n+1} = S_n - S_{n-1}$$
$$= (2n^2-n)-\{2(n-1)^2-(n-1)\}$$
$$= 4n-3$$

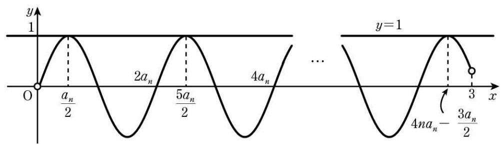
$a_n = (4n-3)(n+1)+n^2 = 5n^2+n-3\ (n\ge 2)$에서

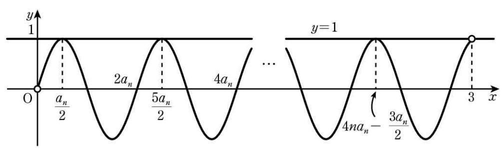
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n^2+n-3}{n^2+1} = 5$$

27. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

함수 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)$의 주기는 $2a_n$이고

$0<x<3$일 때, 모든 자연수 n에 대하여 x에 대한 방정식 $\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)=1$의 서로 다른 실근의 개수가 $2n$이므로 $0<x<3$에서 함수 $y=\sin\left(\dfrac{\pi}{a_n}x\right)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.





$$\left(4n-\frac{3}{2}\right)\times a_n < 3 \le \left(4n+\frac{1}{2}\right)\times a_n$$

$$\frac{3}{4n+\frac{1}{2}} \le a_n < \frac{3}{4n-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{3n}{4n+\frac{1}{2}} \le na_n < \frac{3n}{4n-\frac{3}{2}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{4n+\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{4}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n}{4n-\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{4}$이므로

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n = \dfrac{3}{4}$

28. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 추론하여 함숫값을 구한다.

(ⅰ) $|x|<1$인 경우
$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}x^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}x^n = 0$이므로
$g(x)=f(x)$

(ⅱ) $|x|>1$인 경우
$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^{2n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x^n} = 0$이므로

$$g(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{2x^2+\frac{1}{x^n}+\frac{f(x)}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^{2n}}} = 2x^2$$

(ⅲ) $x=-1$인 경우

$$g(-1) = \lim_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n+f(-1)}{2+(-1)^n}$$

수열 $\left\{\dfrac{2+(-1)^n+f(-1)}{2+(-1)^n}\right\}$의 값은 교대로 $1+f(-1)$과 $1+\dfrac{f(-1)}{3}$이 된다.

$f(-1)\ne 0$이면 이 수열은 발산하므로 조건을 만족시키지 않고, $f(-1)=0$이면 이 수열은 수렴하므로
$f(-1)=0$, $g(-1)=1$

(ⅳ) $x=1$인 경우
$\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}x^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}x^n = 1$

이므로 $g(1) = \dfrac{3+f(1)}{3}$이다.

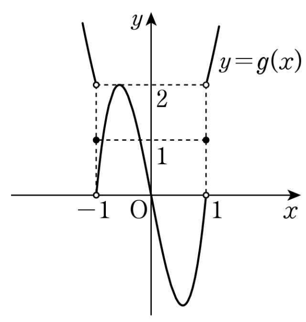
$f(1) = a+b = -f(-1) = 0$이므로 $b=-a$, $g(1)=1$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 함수 $g(x)$는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (|x|<1) \\ 1 & (|x|=1) \\ 2x^2 & (|x|>1) \end{cases}$$

$f(x) = ax^3+bx\ (a>0)$에서 $b=-a$이므로
$f(x) = ax(x+1)(x-1)$
$f'(x) = 3ax^2-a = 0$에서 함수 $f(x)$는
$x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극대이고 $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 극소이다.

이때, 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 k가 존재하므로 조건을 만족시키는 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $f(x)$의 극댓값 $f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$은 2이므로

$f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}a}{9}+\dfrac{\sqrt{3}a}{3} = \dfrac{2\sqrt{3}a}{9} = 2$에서 $a=3\sqrt{3}$

$f(x) = 3\sqrt{3}x(x^2-1)$이므로

$g\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times g(2) = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times 8 = \dfrac{9\sqrt{3}}{8}\times 8 = 9\sqrt{3}$

29. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H_1이라 할 때, 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 $\overline{AB} = 2\overline{AH_1}$이고 $\angle CH_1A = \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos\angle BAC = \dfrac{\overline{AH_1}}{\overline{CA}} = \dfrac{1}{n}$

각 BAD는 호 BD의 원주각이고 각 BCD는 부채꼴 CBD의 중심각이므로 $\angle BCD = 2\angle BAD = \angle BAC$

삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해

$\overline{BD}^2 = \overline{CB}^2+\overline{CD}^2-2\times\overline{CB}\times\overline{CD}\times\cos\angle BCD = 2n^2-2n$

$\overline{BD} = \sqrt{2n^2-2n}$

$\overline{BD} : \overline{DE} = \sqrt{2} : 1$이므로 $\overline{DE} = \dfrac{\overline{BD}}{\sqrt{2}} = \sqrt{n^2-n}$

점 C에서 선분 $\overline{DE}$에 내린 수선의 발을 H_2라 하면 삼각형 CDE는 이등변삼각형이므로 $\overline{DE} = 2\overline{DH_2}$이고 $\angle CH_2D = \dfrac{\pi}{2}$이다.

$\overline{CH_2}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DH_2}^2 = \dfrac{3n^2+n}{4}$이므로 $\overline{CH_2} = \dfrac{\sqrt{3n^2+n}}{2}$

$$S_n = \frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{CH_2} = \frac{n\sqrt{3n^2-2n-1}}{4}$$

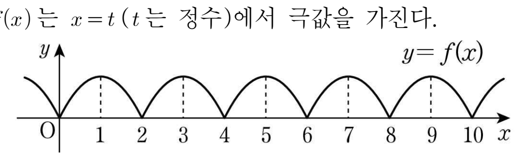
$$\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n} = \frac{\sqrt{3}n-\sqrt{3n^2-2n-1}}{4}$$
$$= \frac{2n+1}{4\left(\sqrt{3}n+\sqrt{3n^2-2n-1}\right)}$$

이므로 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{4}n-\dfrac{S_n}{n}\right) = \dfrac{1}{4\sqrt{3}} = \dfrac{1}{12}\sqrt{3}$

따라서 $p=12$, $q=1$이므로 $p+q=13$

30. [출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 등비수열의 항의 값을 구하는 문제를 해결한다.

함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같고, 함수 $f(x)$는 $x=t$ (t는 정수)에서 극값을 가진다.



등비수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로 $-1<r\le 1$이다.

조건 (나)를 만족시키는 3개의 자연수를 i, j, l $(i<j<l)$이라 하면 $a_i \neq a_j$이므로 $r \neq 1$이고, $a_1 \neq 0$

서로소인 두 자연수 $u\,(u \geq 2)$, v에 대하여 $|r| = \frac{v}{u}$라 하자.

$a_l = a_i r^{l-i}$이고 a_i, a_l은 자연수, $l-i \geq 2$이므로

a_i는 u^2의 배수이다.

$0 < a_i < 10$에서 u는 2 또는 3이므로

r의 값은 $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\pm\frac{2}{3}$

이때, 조건 (나)를 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$의 공비와 순서쌍 (a_i, a_j, a_l)은

$r = \frac{1}{2}$일 때, $(4, 2, 1)$, $r = \frac{1}{3}$일 때, $(9, 3, 1)$,

$r = \frac{2}{3}$일 때 $(9, 6, 4)$뿐이다.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1 a_{n+1} + a_{2n}}{a_{n+1} + a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_1^2 r^n + a_1 r^{2n-1}}{a_1 r^n + a_1 r^{n-1}}$$

$$= \frac{a_1 r}{r+1} = \frac{81}{10} = \frac{3^4}{10}$$

에서 $a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r}$이다.

(i) $r = \frac{1}{2}$인 경우

$(a_i, a_j, a_l) = (4, 2, 1)$이고 $a_1 = 4$이다.

이때 $a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{3^5}{10}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r = \frac{1}{3}$일 때,

$(a_i, a_j, a_l) = (9, 3, 1)$이다.

$a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{2 \times 3^4}{5}$에서

$a_l = a_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{l-1} = 1$인 자연수 l이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $r = \frac{2}{3}$일 때,

$(a_i, a_j, a_l) = (9, 6, 4)$이다.

$a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{3^4}{4}$에서 $i=3$, $j=4$, $l=5$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $r = \frac{2}{3}$

$a_7 = a_1 r^6 = \frac{3^4}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{16}{9}$에서

$p=9$, $q=16$이므로 $p+q=25$

[기하]

23	⑤	24	③	25	①	26	④	27	②
28	④	29	128	30	60				

23. [출제의도] 타원의 정의를 이용하여 단축의 길이를 계산한다.

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$의 y축 위의 두 꼭짓점의 좌표가 $(0, 2)$, $(0, -2)$이므로 단축의 길이는 4

24. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$의 점근선의 방정식은 $y = \pm\frac{2}{a}x$이고 $a>0$이므로 $\frac{2}{a} = \frac{1}{3}$, $a=6$

25. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 한 점에서 포물선의 준선까지의 거리를 구한다.

원의 반지름의 길이가 5이므로 $\overline{\mathrm{FP}} = 10$

포물선의 성질에 의해 점 P에서 포물선의 준선 $x=-4$까지의 거리가 10이므로 점 P의 x좌표는 6이다. 초점 F의 x좌표는 4이고 원의 중심은 선분 FP의 중점이므로 원의 중심의 x좌표는 5이다.

따라서 원의 중심에서 포물선의 준선까지의 거리는

$5-(-4)=9$

26. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

$\overline{\mathrm{F'P}} = \overline{\mathrm{PQ}}$이고 $\overline{\mathrm{F'Q}} \perp \overline{\mathrm{FP}}$이므로 $\overline{\mathrm{FF'}} = \overline{\mathrm{FQ}}$

$\overline{\mathrm{FQ}} = \overline{\mathrm{F'Q}}$이므로 삼각형 $\mathrm{QF'F}$는 한 변의 길이가 $\overline{\mathrm{F'F}}$인 정삼각형이다.

$\overline{\mathrm{F'F}} = 2c$이므로 $\overline{\mathrm{F'P}} = c$, $\overline{\mathrm{FP}} = \sqrt{3}c$

타원의 장축의 길이가 2이므로

$\overline{\mathrm{F'P}} + \overline{\mathrm{FP}} = (\sqrt{3}+1)c = 2$

따라서 $c = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$

27. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 삼각형의 둘레의 길이를 구한다.

$\overline{\mathrm{F'Q}} = a$라 하자.

점 Q는 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{FQ}} = \overline{\mathrm{F'Q}} + 2 = a+2$

$\overline{\mathrm{PQ}} = 4$이므로 $\overline{\mathrm{F'P}} = a+4$

두 점 P, R은 쌍곡선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{FP}} = \overline{\mathrm{F'P}} - 2 = a+2$, $\overline{\mathrm{F'R}} = \overline{\mathrm{FR}} + 2$

삼각형 $\mathrm{F'RQ}$의 둘레의 길이가 16이므로

$\overline{\mathrm{F'R}} + \overline{\mathrm{QR}} + \overline{\mathrm{F'Q}} = (\overline{\mathrm{FR}} + 2) + (\overline{\mathrm{FQ}} - \overline{\mathrm{FR}}) + a$

$= 2a+4 = 16$

즉 $a=6$

따라서 삼각형 FPQ의 둘레의 길이는

$\overline{\mathrm{FP}} + \overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{FQ}} = (a+2)+4+(a+2)$

$= 2a+8$

$= 20$

28. [출제의도] 포물선의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

두 포물선 C_1, C_2의 초점은 각각 $\mathrm{F_1}(3, 0)$, $\mathrm{F_2}\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$이고 준선의 방정식은 각각 $x=-3$, $x=\frac{3}{2}$이다.

즉 $\overline{\mathrm{F_1F_2}} = 3 - \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$

선분 PQ가 y축과 만나는 점을 H라 하면

두 점 P, Q는 각각 포물선 C_1, C_2 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{F_1P}} = \overline{\mathrm{PH}} + 3$, $\overline{\mathrm{F_2Q}} = \overline{\mathrm{QH}} + \frac{3}{2}$

사각형 $\mathrm{PQF_2F_1}$의 둘레의 길이가 41이므로

$\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{F_2Q}} + \overline{\mathrm{F_1F_2}} + \overline{\mathrm{F_1P}} = \overline{\mathrm{PQ}} + \left(\overline{\mathrm{QH}} + \frac{3}{2}\right) + \frac{9}{2} + (\overline{\mathrm{PH}} + 3)$

$= 2\overline{\mathrm{PQ}} + 9 = 41$

즉 $\overline{\mathrm{PQ}} = 16$

점 P의 좌표를 (x_1, a), 점 Q의 좌표를 (x_2, a)라 하면 $12x_1 = -6x_2$, $2x_1 = -x_2$

$\overline{\mathrm{PQ}} = x_1 - x_2 = 3x_1 = 16$에서 $x_1 = \frac{16}{3}$

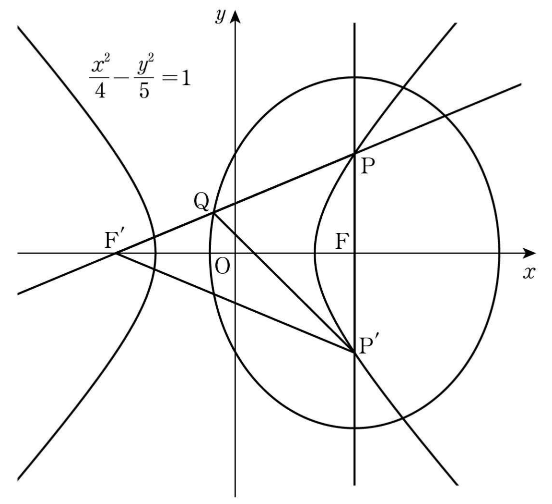
점 P는 포물선 C_1 위의 점이므로

$a^2 = 12x_1 = 64$, $a=8$

따라서 구하는 사각형 $\mathrm{PQF_2F_1}$의 넓이는

$\frac{1}{2} \times (\overline{\mathrm{PQ}} + \overline{\mathrm{F_1F_2}}) \times a = \frac{1}{2} \times \left(16 + \frac{9}{2}\right) \times 8 = 82$

29. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



$c^2 = 4+5 = 9$이므로 $c=3$

점 P의 x좌표가 3이므로

$\frac{3^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$에서 점 P의 y좌표는 $\frac{5}{2}$

$\overline{\mathrm{FP}} = \frac{5}{2}$이고 쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로

$\overline{\mathrm{F'P}} = \overline{\mathrm{FP}} + 4 = \frac{13}{2}$

$\overline{\mathrm{F'P'}} = \overline{\mathrm{F'P}}$, $\overline{\mathrm{PP'}} = \overline{\mathrm{QP'}}$이고 $\angle \mathrm{F'PP'} = \angle \mathrm{QPP'}$이므로

삼각형 $\mathrm{F'P'P}$와 삼각형 $\mathrm{P'PQ}$는 서로 닮음인 이등변삼각형이다.

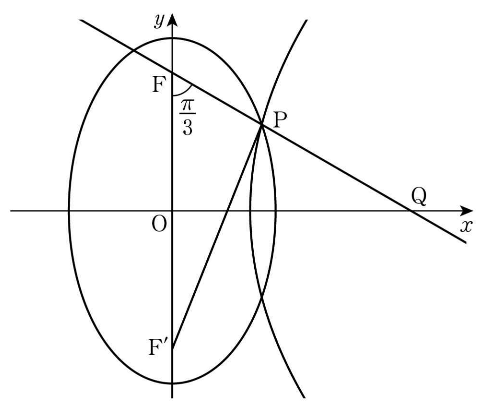
$\frac{\overline{\mathrm{PP'}}}{\overline{\mathrm{F'P}}} = \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{\overline{\mathrm{P'P}}}$에서 $\frac{10}{13} = \frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{5}$, 즉 $\overline{\mathrm{PQ}} = \frac{50}{13}$

타원의 장축의 길이는

$\overline{\mathrm{P'Q}} + \overline{\mathrm{PQ}} = 5 + \frac{50}{13} = \frac{115}{13}$이므로 $p=13$, $q=115$

따라서 $p+q = 13+115 = 128$

30. [출제의도] 타원과 포물선의 관계를 추론하여 선분의 길이를 구한다.



$\overline{\mathrm{FP}} = k$라 하면 타원의 장축의 길이가 10이므로

$\overline{\mathrm{F'P}} = 10 - \overline{\mathrm{FP}} = 10-k$

$\overline{\mathrm{FF'}} = 8$이고 $\angle \mathrm{F'FP} = \frac{\pi}{3}$이므로

삼각형 $\mathrm{PFF'}$에서 코사인법칙에 의해

$\overline{\mathrm{F'P}}^2 = \overline{\mathrm{FP}}^2 + \overline{\mathrm{FF'}}^2 - 2 \times \overline{\mathrm{FP}} \times \overline{\mathrm{FF'}} \times \cos\frac{\pi}{3}$

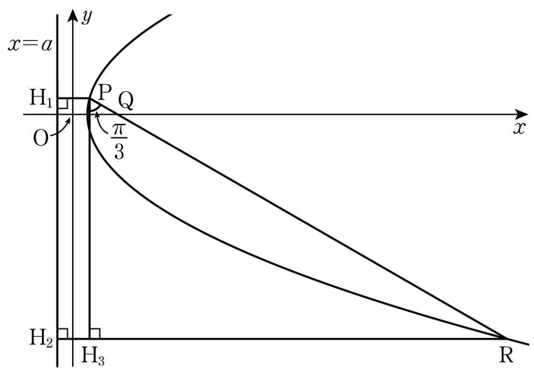
$(10-k)^2 = k^2 + 8^2 - 2 \times k \times 8 \times \frac{1}{2}$

$12k = 36$, 즉 $k=3$

$\angle \mathrm{F'FP} = \frac{\pi}{3}$이고 $\overline{\mathrm{OF}} = 4$이므로 $\overline{\mathrm{FQ}} = 8$

$\overline{\mathrm{PQ}} = \overline{\mathrm{FQ}} - \overline{\mathrm{FP}} = 8-k = 5$

점 P, R에서 준선 $x=a$에 내린 수선의 발을 각각 $\mathrm{H_1}$, $\mathrm{H_2}$, 점 P에서 직선 $\mathrm{RH_2}$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H_3}$이라 하자.



$\overline{\mathrm{QR}}=t$ 라 하자. 삼각형 $\mathrm{RPH_3}$ 에서

$\overline{\mathrm{RH_3}}=\overline{\mathrm{PR}}\times\sin\frac{\pi}{3}=(t+5)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$ …… ㉠

두 점 R, P는 포물선 위의 점이므로

$\overline{\mathrm{RH_2}}=\overline{\mathrm{QR}}=t$ 이고 $\overline{\mathrm{PH_1}}=\overline{\mathrm{QP}}=5$이다.

$\overline{\mathrm{H_3H_2}}=\overline{\mathrm{PH_1}}=5$

$\overline{\mathrm{RH_3}}=\overline{\mathrm{RH_2}}-\overline{\mathrm{H_3H_2}}=t-5$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{\sqrt{3}}{2}(t+5)=t-5$

즉 $t=\frac{10+5\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=35+20\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{PR}}=t+5=40+20\sqrt{3}$ 이므로 $p=40$, $q=20$

따라서 $p+q=40+20=60$