

● 수학 영역 ●

※ 본 전국연합학력평가는 17개 시도 교육청 주관으로 시행되며, 해당 자료는 EBSi에서만 제공됩니다. 무단 전재 및 재배포는 금지됩니다.

수학 정답

1	2	2	4	3	3	4	2	5	5
6	1	7	5	8	3	9	3	10	5
11	1	12	4	13	3	14	4	15	2
16	6	17	3	18	12	19	32	20	71
21	381	22	154						

해설

1. [출제의도] 지수법칙을 이용하여 지수를 계산한다.

$$\sqrt[3]{4} \times 2^{\frac{1}{3}} = (2^2)^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3} + \frac{1}{3}} = 2^1 = 2$$

2. [출제의도] 도함수를 이용하여 미분계수를 계산한다.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 1 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 27 - 24 + 1 = 4$$

3. [출제의도] 등비수열을 계산하여 공비를 구한다.

등비수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항을 a , 공비를 r 이라 하자.
수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항이 양수이므로 $a > 0, r > 0$

$$ar^3 = 2ar^2 + 3ar$$

$$r^2 - 2r - 3 = (r+1)(r-3) = 0$$

$r = -1$ 또는 $r = 3$
 $r > 0$ 이므로 $r = 3$

4. [출제의도] 함수의 극한을 이해하여 좌극한과 우극한을 구한다.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \text{ 이므로}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1 - 2 = -1$$

5. [출제의도] 곱의 미분법을 이용하여 미분계수를 계산한다.

$$f'(x) = (2x+1)(2x^2-x) + (x^2+x)(4x-1)$$

$$f'(1) = 3 \times 1 + 2 \times 3 = 9$$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질을 이해하여 식의 값을 구한다.

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi + \theta\right) = -\cos\theta = \frac{1}{3} \text{ 이므로 } \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\sin\theta \tan\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} = \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{8}{9}}{-\frac{1}{3}} = -\frac{8}{3}$$

7. [출제의도] 부정적분을 이해하여 합숫값을 구한다.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int (x^3 + x) dx$$

$$= \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C \quad (C \text{는 적분상수})$$

$C = f(0) = -1$ 이므로

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 1$$

따라서 $f(2) = \frac{1}{4} \times 2^4 + \frac{1}{2} \times 2^2 - 1 = 5$

8. [출제의도] 로그의 성질을 이해하여 상수의 값을 구한다.

$$a = (\log 3)^2 - (\log 2)^2 = (\log 3 - \log 2)(\log 3 + \log 2)$$

$$= \log \frac{3}{2} \times \log 6$$

$$b = \log_6 10 = \frac{1}{\log 6}$$

$$ab = \log \frac{3}{2} \times \log 6 \times \frac{1}{\log 6} = \log \frac{3}{2}$$

로그의 정의에 의해 $10^{ab} = \frac{3}{2}$

9. [출제의도] 속도와 위치의 관계를 이해하여 점이 움직인 거리를 구한다.

원점에서 출발한 점 P의 시간 $t = a$ 에서의 위치가 0 이므로

$$\int_0^a v(t) dt = \int_0^a (-3t^2 + 6t) dt$$

$$= \left[-t^3 + 3t^2\right]_0^a$$

$$= -a^3 + 3a^2$$

$$= -a^2(a-3) = 0$$

a 가 양수이므로 $a = 3, 2a = 6$
시간 $t = 0$ 에서 $t = 6$ 까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_0^6 |v(t)| dt = \int_0^6 |-3t^2 + 6t| dt$$

$$= \int_0^2 (-3t^2 + 6t) dt + \int_2^6 (3t^2 - 6t) dt$$

$$= \left[-t^3 + 3t^2\right]_0^2 + \left[t^3 - 3t^2\right]_2^6$$

$$= (-8 + 12) + (216 - 108) - (8 - 12)$$

$$= 4 + 108 + 4 = 116$$

10. [출제의도] 수열의 합을 이해하여 조건을 만족시키는 자연수의 값을 구한다.

자연수 m 에 대하여

$$\sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} 9+m & (n=3m-2) \\ 19+m & (n=3m-1) \\ m & (n=3m) \end{cases}$$

$$\sum_{k=1}^{3n} a_k = n \text{ 이므로 } \sum_{k=1}^n a_k = n$$

- (i) $n = 3m - 2$ 인 경우
 $9 + m = 3m - 2$ 에서 $m = \frac{11}{2}$ 이므로
조건을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.
- (ii) $n = 3m - 1$ 인 경우
 $19 + m = 3m - 1$ 에서 $m = 10$ 이므로
조건을 만족시키는 자연수 n 의 값은 29이다.
- (iii) $n = 3m$ 인 경우
 $m = 3m$ 에서 $m = 0$ 이므로
조건을 만족시키는 자연수 n 은 존재하지 않는다.
- (i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n 의 값은 29

11. [출제의도] 함수의 극솟값을 이해하여 합숫값을 구한다.

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax = 3x(x + 2a)$$

$$f'(x) = 0 \text{에서 } x = -2a \text{ 또는 } x = 0$$

(i) $a > 0$ 인 경우
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	$-2a$...	0	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 극솟값을 가지므로
 $f(0) = 4a = -40$
 $a = -10 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a < 0$ 인 경우
함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	...	0	...	$-2a$...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$ 는 $x = -2a$ 에서 극솟값을 가지므로
 $f(-2a) = (-2a)^3 + 3a \times (-2a)^2 + 4a$

$$= 4a^3 + 4a = -40$$

$$a^3 + a + 10 = 0, (a+2)(a^2 - 2a + 5) = 0$$

$$a = -2$$

(i), (ii)에서 $a = -2$ 이고 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 8$
따라서 $f(2) = 2^3 - 6 \times 2^2 - 8 = -24$

12. [출제의도] 접선의 방정식을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

$$f'(x) = 3x^2 + 4x - 1 \text{ 이므로}$$

점 A의 좌표를 $(t, f(t))$ 라 하면 접선의 방정식은
 $y = (3t^2 + 4t - 1)(x - t) + (t^3 + 2t^2 - t + 4)$
이 접선이 원점을 지나므로
 $-2t^3 - 2t^2 + 4 = 0, -2(t-1)(t^2 + 2t + 2) = 0$
 $t = 1$
그러므로 점 A의 좌표는 $(1, 6)$ 이고 점 A에서의 접선의 방정식은 $y = 6x$ 이다. 구하는 부분의 넓이는

$$\int_{-2}^0 (x^3 + 2x^2 - x + 4) dx$$

$$+ \int_0^1 \{(x^3 + 2x^2 - x + 4) - 6x\} dx$$

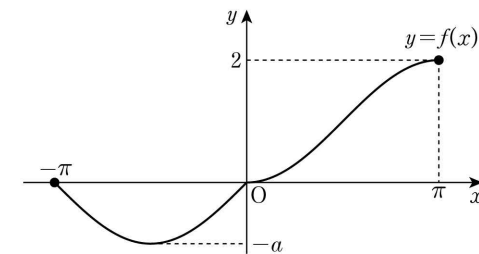
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_{-2}^0$$

$$+ \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 4x\right]_0^1$$

$$= \frac{34}{3} + \frac{17}{12} = \frac{153}{12} = \frac{51}{4}$$

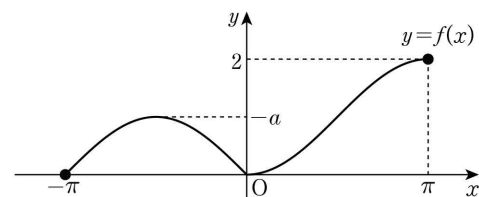
13. [출제의도] 삼각함수의 그래프를 이용하여 상수의 값을 구하는 문제를 해결한다.

(i) $a > 0$ 인 경우
단원구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



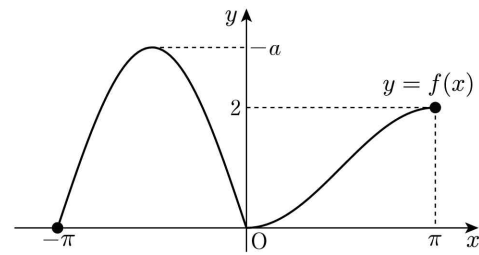
$M = 2, m = -a$ 이므로 $M - m = 4$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $2 - (-a) = 4$ 에서 $a = 2$

(ii) $-2 \leq a < 0$ 인 경우
단원구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$M = 2, m = 0$ 이므로 $M - m = 4$ 를 만족시키는 실수 a 는 존재하지 않는다.

(iii) $a < -2$ 인 경우
단원구간 $[-\pi, \pi]$ 에서 함수 $y = f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$M = -a, m = 0$ 이므로 $M - m = 4$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $-a = 4$ 에서 $a = -4$

(i), (ii), (iii)에서 구하는 모든 a 의 값의 곱은 $2 \times (-4) = -8$

14. [출제의도] 정적분의 성질을 이용하여 합숫값을 구하는 문제를 해결한다.

$$\int_{x_1}^{x_2} \{f(t) - f(a)\} dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a) dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt - \int_{x_1}^{x_2} f(a) dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a) dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq \int_{x_1}^{x_2} f'(a)(t-a) dt + \int_{x_1}^{x_2} f(a) dt$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq \int_{x_1}^{x_2} \{f'(a)(t-a) + f(a)\} dt \text{ 이므로}$$

$x_1 \leq x_2$ 인 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq \int_{x_1}^{x_2} \{f'(a)(t-a) + f(a)\} dt$$

이러면 사차함수 $f(x)$ 는 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$$

두 점 $(-1, f(-1)), (3, f(3))$ 을 지나는 직선의 방정식을 $y = mx + n$ (m, n 은 상수)라 하면

$$m = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{f(3) - f(-1)}{4}$$

모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$ 를 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 범위가

$a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이므로

$$x = -1, a = 3 \text{ 일 때 } f(-1) \geq -4f'(3) + f(3)$$

$$\frac{f(3) - f(-1)}{4} \leq f'(3) \dots \dots \text{㉑}$$

$$x = 3, a = -1 \text{ 일 때 } f(3) \geq 4f'(-1) + f(-1)$$

$$f'(-1) \leq \frac{f(3) - f(-1)}{4} \dots \dots \text{㉒}$$

㉑, ㉒에서

$$f'(-1) \leq m \leq f'(3) \dots \dots \text{㉓}$$

함수 $g(x)$ 를 $g(x) = f(x) - (mx+n)$ 이라 하자.

$$g(a) = f(a) - ma - n$$

$$g'(x) = f'(x) - m \text{ 에서 } g'(a) = f'(a) - m$$

모든 실수 x 에 대하여

$$f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$$

$$f(x) - (mx+n) \geq f'(a)(x-a) + f(a) - (mx+n)$$

$$f(x) - (mx+n) \geq \{f'(a) - m\}(x-a) + \{f(a) - ma - n\}$$

이므로 $g(x) \geq g'(a)(x-a) + g(a)$ 를 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 범위가 $a \leq -1$ 또는 $a \geq 3$ 이다.

$$g(-1) = g(3) = 0 \text{ 이므로}$$

$$g(x) \geq g'(-1)(x+1) \dots \dots \text{㉔}$$

$$g(x) \geq g'(3)(x-3) \dots \dots \text{㉕}$$

㉔에서 $g'(-1) \leq 0 \leq g'(3)$ 이므로

㉕, ㉔에서 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 3$ 일 때 $g(x) \geq 0$

구간 $(-\infty, -1]$ 에서 $g(x)$ 의 최솟값은 $g(-1) = 0$ 이고, 구간 $[3, \infty)$ 에서 $g(x)$ 의 최솟값은 $g(3) = 0$ 이다.

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 는 최솟값을 가지고, 모든 실수 x 에 대하여 $g(x) \geq g(c)$ 를 만족시키는 실수 c 가 닫힌구간 $[-1, 3]$ 에 존재한다.

$g(c)$ 가 극솟값이므로 $g'(c) = 0$ 이고

$$g(x) \geq g(c) = g'(c)(x-c) + g(c)$$

실수 $a = c$ 가 $g(x) \geq g'(a)(x-a) + g(a)$ 를 만족시키므로 $c \leq -1$ 또는 $c \geq 3$

그러므로 $c = -1$ 또는 $c = 3$

즉 $g(-1) = g(3) = 0, g'(-1) = g'(3) = 0$ 이므로

$$g(x) = (x+1)^2(x-3)^2$$

$$f(x) = (x+1)^2(x-3)^2 + mx + n$$

$$f'(x) = 4(x+1)(x-3)(x-1) + m$$

$$f(1) = 15 \text{ 이므로}$$

$$16 + m + n = 15$$

$$m + n = -1 \dots \dots \text{㉖}$$

$$f'(1) = 1 \text{ 이므로 } m = 1$$

$$m = 1 \text{ 을 ㉖에 대입하면 } n = -2$$

$$f(x) = (x+1)^2(x-3)^2 + x - 2$$

$$\text{따라서 } f(4) = 27$$

15. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 이용하여 상수의 값을 추론한다.

함수 $y = |2^x - 4|$ 의 치역이 $\{y \mid y \geq 0\}$,

함수 $y = a + \log_2 x$ 의 치역이 실수 전체의 집합이고 함수 $f(x)$ 의 치역이 실수 전체의 집합이므로

$$p \leq 0 \dots \dots \text{㉑}$$

$p < x < q$ 에서 $f(x) = a + \log_2 x$ 이고

함수 $f(x)$ 의 정의역이 실수 전체의 집합이므로

$$p \geq 0 \dots \dots \text{㉒}$$

㉑, ㉒에서 $p = 0$

$$\{f(x) \mid x \leq 0\} = \{y \mid 3 \leq y < 4\}$$

함수 $f(x)$ 가 일대일 대응이므로

$$\{f(x) \mid x > 0\} = \{y \mid y < 3 \text{ 또는 } y \geq 4\} \text{ 이고}$$

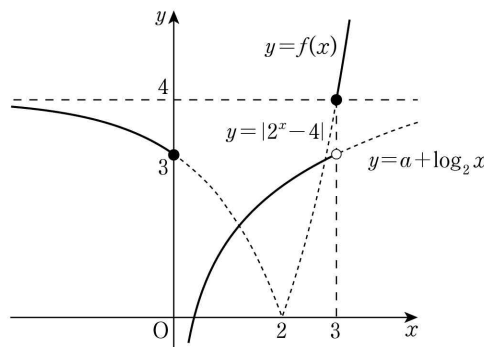
$$\{f(x) \mid 0 < x < q\} = \{y \mid y < a + \log_2 q\} = \{y \mid y < 3\},$$

$$\{f(x) \mid x \geq q\} = \{y \mid y \geq 4\} \text{ 이다.}$$

$$|2^q - 4| = 4 \text{ 에서 } q = 3$$

$$a + \log_2 3 = 3, a = 3 - \log_2 3$$

$$f\left(\frac{p+q}{2}\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 - \log_2 3 + \log_2 \frac{3}{2} = 3 - \log_2 3 + \log_2 3 - 1 = 2$$



16. [출제의도] 로그함수의 성질을 이해하여 방정식의 해를 구한다.

로그의 진수는 양수이므로

$$x - 2 > 0, x + 10 > 0$$

그러므로 $x > 2$

$$\log_9(x+10) = \log_{3^2}(x+10) = \frac{1}{2} \log_3(x+10) \text{ 이므로}$$

$$\log_3(x-2) = \log_9(x+10) \text{ 에서}$$

$$\log_3(x-2) = \frac{1}{2} \log_3(x+10)$$

$$2\log_3(x-2) = \log_3(x+10)$$

$$\log_3(x-2)^2 = \log_3(x+10)$$

$$(x-2)^2 = x+10, x^2 - 5x - 6 = (x+1)(x-6) = 0$$

$$x = -1 \text{ 또는 } x = 6$$

$$x > 2 \text{ 이므로 } x = 6$$

17. [출제의도] 함수의 증가와 감소를 이해하여 상수의 개수를 구한다.

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - k \text{ 라 하면}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

$$f'(x) = 0 \text{ 에서 } x = -2 \text{ 또는 } x = 0$$

함수 $f(x)$ 의 증가와 감소를 표로 나타내면

x	\dots	-2	\dots	0	\dots
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	\nearrow	극대	\searrow	극소	\nearrow

함수 $f(x)$ 의 극댓값은 $f(-2) = -8 + 12 - k = 4 - k$ 이고 극솟값은 $f(0) = -k$ 이다.

방정식 $f(x) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 함수 $f(x)$ 의 극댓값은 양수이고 극솟값은 음수이다.

$$f(-2) = 4 - k > 0 \text{ 에서 } k < 4$$

$$f(0) = -k < 0 \text{ 에서 } k > 0$$

$$0 < k < 4 \text{ 이므로 } k = 1 \text{ 또는 } k = 2 \text{ 또는 } k = 3$$

따라서 구하는 자연수 k 의 개수는 3

18. [출제의도] \sum 의 성질을 이해하여 수열의 합을 구

한다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 (a_k + 3)(a_k - 1) &= \sum_{k=1}^8 (a_k^2 + 2a_k - 3) \\ &= \sum_{k=1}^8 a_k^2 + \sum_{k=1}^8 2a_k - \sum_{k=1}^8 3 \\ &= \sum_{k=1}^8 a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^8 a_k - \sum_{k=1}^8 3 \\ &= 20 + 16 - 24 = 12 \end{aligned}$$

19. [출제의도] 정적분과 미분의 관계를 이용하여 정적분의 값을 구하는 문제를 해결한다.

$$\int_0^x \{f(t) + t^2\} dt = xf(x) - x^3 \dots \dots \text{㉑}$$

㉑의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f(x) + x^2 = f(x) + xf'(x) - 3x^2$$

$$xf'(x) = 4x^2$$

다항함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 도 다항함수이므로

$$f'(x) = 4x$$

$$\text{따라서 } \int_0^4 f'(x) dx = \int_0^4 4x dx = [2x^2]_0^4 = 32$$

20. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 외접원의 넓이에 관한 문제를 해결한다.

$$\overline{AB} : \overline{AC} = 2 : 1, \overline{BD} : \overline{DC} = 3 : 1 \text{ 이므로}$$

$$\overline{AB} = 2a, \overline{AC} = a, \overline{BD} = 3b, \overline{DC} = b$$

($a > 0, b > 0$) 이라 하자.

삼각형 ABD 에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{BD} \times \cos \theta$$

$$4a^2 = 2 + 9b^2 - 2 \times \sqrt{2} \times 3b \times \frac{\sqrt{2}}{4} \dots \dots \text{㉑}$$

$\angle ADC = \pi - \theta$ 이므로 삼각형 ADC 에서

코사인법칙에 의하여

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{CD} \times \cos(\pi - \theta)$$

$$a^2 = 2 + b^2 - 2 \times \sqrt{2} \times b \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) \dots \dots \text{㉒}$$

$$\text{㉑, ㉒에서 } 9b^2 - 3b + 2 = 4b^2 + 4b + 8$$

$$5b^2 - 7b - 6 = (5b + 3)(b - 2) = 0$$

$$b = -\frac{3}{5} \text{ 또는 } b = 2$$

$$b > 0 \text{ 이므로 } b = 2$$

$$\text{㉒에 } b = 2 \text{ 를 대입하면 } a^2 = 8$$

$$a > 0 \text{ 이므로 } a = 2\sqrt{2}$$

θ 는 예각이므로

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

삼각형 ABD 의 외접원의 반지름의 길이를 R 이라

하면 삼각형 ABD 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin \theta} = 2R, \frac{4\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{14}}{4}} = 2R, R = \frac{8}{\sqrt{7}}$$

$$\text{삼각형 ABD 의 외접원의 넓이는 } \frac{64}{7} \pi$$

$$\text{따라서 } p = 7, q = 64 \text{ 이므로 } p + q = 71$$

21. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 항을 추론한다.

$$a_6 = 2 \text{ 이므로 } a_6 = \frac{a_5}{5} \text{ 이고 } a_5 = 10$$

(i) $a_4 \geq 3$ 인 경우

$$a_5 = \frac{a_4}{4} \text{ 이므로 } a_4 = 4a_5 = 40$$

$$a_4 = \frac{a_3}{3} \text{ 이므로 } a_3 = 3a_4 = 120$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} \text{ 이므로 } a_2 = 2a_3 = 240$$

$$a_2 = \frac{a_1}{1} \text{ 이므로 } a_1 = a_2 = 240$$

(ii) $a_4 < 3$ 인 경우

$$a_4 = 10 \text{ 이므로 } a_3 \geq 3$$

$$a_4 = \frac{a_3}{3}, a_3 = 3a_4 < 9$$

$$\text{그러므로 } 3 \leq a_3 < 9$$

$$a_3 \neq 10 \text{ 이므로 } a_3 = \frac{a_2}{2}, a_2 = 2a_3 \text{ 에서}$$

$$6 \leq a_2 < 18 \dots\dots \textcircled{7}$$

$$\textcircled{1} a_1 \geq 3 \text{ 이면 } a_2 = \frac{a_1}{1}, a_1 = a_2 \text{ 이고}$$

a_1 이 자연수이므로 $\textcircled{1}$ 에서 $a_1 = 6, 7, \dots, 17$

$$\textcircled{2} a_1 < 3 \text{ 이면 } a_2 = 10 \text{ 이므로 } \textcircled{1} \text{ 을 만족시킨다.}$$

a_1 이 자연수이므로 $a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 2$

(i), (ii)에서 a_1 의 값은

1, 2, 6, 7, 8, ..., 16, 17, 240

따라서 구하는 모든 a_1 의 값의 합은

$$1 + 2 + \sum_{n=6}^{17} n + 240 = 381$$

22. [출제의도] 함수의 연속성과 미분가능성을 이용하여 함수를 추론한다.

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이므로

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -f(0), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = |f(0)| - 8$$

$$-f(0) = |f(0)| - 8$$

$$f(0) = 4 \dots\dots \textcircled{7}$$

$$g(0) = |f(0)| - 8 = -4$$

함수 $g(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-f(0+h) + f(0)}{h} \\ = -f'(0)$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(0+h) - g(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(0+h)| + 2h^2 - 8 + 4}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(0+h)| - f(0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} + 0 = f'(0)$$

$$-f'(0) = f'(0)$$

$$f'(0) = 0 \dots\dots \textcircled{8}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하므로

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| + 2(2+h)^2 - 8 - |f(2)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{2h^2 + 8h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{g(2+h) - g(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - 2(2+h)^2 + 8 - |f(2)|}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{2h^2 + 8h}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} + 8$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} - 8 \dots\dots \textcircled{9}$$

즉 함수 $|f(x)|$ 가 $x=2$ 에서 미분가능하지 않다.

$$f(2) = 0 \dots\dots \textcircled{10}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = |f'(2)| \text{ 와}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{|f(2+h)| - |f(2)|}{h} = -|f'(2)| \text{ 를 } \textcircled{9} \text{ 에 대입하면}$$

$$|f'(2)| = 8 \dots\dots \textcircled{11}$$

$\textcircled{7}, \textcircled{8}, \textcircled{9}, \textcircled{11}$ 을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$ 는

$$f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4 \text{ 또는 } f(x) = -x^3 + x^2 + 4$$

(i) $f(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4$ 인 경우

$$3x^3 - 7x^2 + 4 = (3x+2)(x-1)(x-2) \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능하지 않다.

(ii) $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$ 인 경우

$$-x^3 + x^2 + 4 = -(x-2)(x^2 + x + 2) \text{ 이므로}$$

함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

(i), (ii)에서 $f(x) = -x^3 + x^2 + 4$ 이다.

$$\text{따라서 } f(-5) = 154$$

[확률과 통계]

23	①	24	⑤	25	②	26	③	27	④
28	④	29	363	30	330				

23. [출제의도] 중복조합의 수를 계산한다.

$${}_{4H_3} = {}_{4+3-1C_3} = {}_6C_3 = 20$$

24. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

도로망을 따라 오른쪽으로 한 칸 이동하는 것을 a , 위쪽으로 한 칸 이동하는 것을 b 라 하자.

P지점에서 출발하여 Q지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 4개의 a 와 3개의 b 를 일렬로 나열하는 경우의 수에서 $aaabbb$ 인 경우의 수를 뺀 것과 같다.

$$\text{따라서 구하는 경우의 수는 } \frac{7!}{4!3!} - 1 = 35 - 1 = 34$$

25. [출제의도] 중복순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

네 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_4\Pi_4 = 4^4 = 256$$

세 문자 b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하는 경우의 수는

$${}_3\Pi_4 = 3^4 = 81$$

$$\text{따라서 구하는 경우의 수는 } 256 - 81 = 175$$

26. [출제의도] 같은 것이 있는 순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

서로 이웃한 2장의 카드에 적힌 수의 합이 모두 4 이상이 되려면 숫자 1이 적힌 카드와 이웃한 카드에는 숫자 3이 적혀 있어야 한다.

(i) 숫자 1이 적힌 카드가 양 끝에 있는 경우

$$1, 3, \square, \square, \square, \square \text{ 또는 } \square, \square, \square, \square, 3, 1$$

$$\text{에서 } \square \text{에 } 2, 2, 3, 3 \text{을 나열하는 경우의 수는}$$

$$2 \times \frac{4!}{2!2!} = 12$$

(ii) 숫자 1이 적힌 카드가 양 끝에 있지 않은 경우
숫자 1이 적힌 카드의 양옆에 숫자 3이 적힌 카드가 있어야 하므로 3, 1, 3을 하나의 문자 a 로 보고 $a, 2, 2, 3$ 을 나열하는 경우의 수는

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$12 + 12 = 24$$

27. [출제의도] 중복조합을 이용하여 함수의 개수를 추론한다.

조건 (가)에서

$$f(1) \leq f(2) \leq f(3) \leq f(4) \leq f(5) \leq f(6)$$

3의 배수 a 에 대하여 $f(a) = b$ 라 하자.

조건 (나)에서 $f(f(a)) = a$ 이므로 $f(b) = a$

$a > b$ 이면 $f(b) > f(a)$ 이고, $a < b$ 이면 $f(b) < f(a)$ 이므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(a) = a$, 즉 $f(3) = 3$ 이고 $f(6) = 6$

$f(1), f(2)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 세 숫자 1, 2, 3에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_3H_2 = {}_4C_2 = 6$$

$f(4), f(5)$ 의 값을 정하는 경우의 수는 네 숫자 3, 4, 5, 6에서 중복을 허락하여 2개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$6 \times 10 = 60$$

28. [출제의도] 원순열을 이해하여 경우의 수를 구한다.

검은색 접시를 배열하는 원순열의 수는 $(3-1)! = 2$

조건 (가)에서 각각의 검은색 접시 사이에 흰색 접시가 적어도 한 개 있다.

검은색 접시 사이에 놓인 흰색 접시의 개수를 각각 a, b, c ($a \geq b \geq c$)라 하면 $a = 2, b = 1, c = 1$

흰색 접시를 놓는 경우의 수는 숫자 1, 2, 3, 4를 일렬로 나열할 때, 첫 번째와 두 번째에 있는 수가 모두 홀수인 경우와 모두 짝수인 경우를 제외한 경우의 수와 같다.

$$\text{숫자 } 1, 2, 3, 4 \text{를 나열하는 경우의 수는 } 4! = 24$$

$$\text{첫 번째와 두 번째 있는 수가 모두 홀수인 경우의 수는 } 2! \times 2! = 4$$

$$\text{첫 번째와 두 번째 있는 수가 모두 짝수인 경우의 수는 } 2! \times 2! = 4$$

검은색 접시 사이에 2개, 1개, 1개의 흰색 접시를 놓는 경우의 수는 $\frac{3!}{2!} = 3$

흰색 접시를 놓는 경우의 수는

$$(24 - 4 - 4) \times 3 = 48$$

$$\text{따라서 구하는 경우의 수는 } 2 \times 48 = 96$$

29. [출제의도] 중복순열을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

주사위를 네 번 던져서 나온 눈의 수인 a, b, c, d 중에서 짝수의 개수는 2 이상이어야 한다.

(i) a, b, c, d 중 짝수의 개수가 2인 경우

$$a \times b \times c \times d \text{가 } 16 \text{의 배수이므로 } 4 \text{의 개수는 } 2 \text{이다.}$$

$$\text{네 수 } a, b, c, d \text{ 중에서 } 4 \text{인 수 } 2 \text{개를 선택하는 경우의 수는 } {}_4C_2 = 6$$

$$\text{남은 } 2 \text{개의 수가 홀수인 경우의 수는 } {}_3\Pi_2 = 9$$

$$\text{구하는 경우의 수는}$$

$$6 \times 9 = 54$$

(ii) a, b, c, d 중 짝수의 개수가 3인 경우

$$a \times b \times c \times d \text{가 } 16 \text{의 배수이므로 } 4 \text{의 개수는 } 1 \text{ 이상이다.}$$

$$\text{네 수 } a, b, c, d \text{ 중에서 짝수인 수 } 3 \text{개를 선택하는 경우의 수는 } {}_4C_3 = 4$$

$$\text{짝수인 수 중 } 4 \text{의 개수가 } 1 \text{ 이상인 경우의 수는}$$

$${}_3\Pi_3 - {}_2\Pi_3 = 27 - 8 = 19$$

$$\text{남은 } 1 \text{개의 수가 홀수인 경우의 수는 } {}_3\Pi_1 = 3$$

$$\text{구하는 경우의 수는}$$

$$4 \times 19 \times 3 = 228$$

(iii) a, b, c, d 중 짝수의 개수가 4인 경우

$$\text{구하는 경우의 수는 } {}_3\Pi_4 = 81$$

(i), (ii), (iii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$54 + 228 + 81 = 363$$

30. [출제의도] 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

학생 A, B, C, D, E가 받는 검은 공의 개수를 각각 a, b, c, d, e 라 하고

학생 A, B, C, D, E가 받는 흰 공의 개수를 각각 a', b', c', d', e' 이라 하자.

이때 $a, b, c, d, e, a', b', c', d', e'$ 은 모두 음이 아닌 정수이다.

공이 모두 8개이고 조건 (가)에서 학생 A, B, C가 받는 공의 개수의 합이 홀수이므로

학생 D, E가 받는 공의 개수의 합 $(d+d') + (e+e')$ 은 홀수이다.

이때, 조건 (나)를 만족시키는 $d+d', e+e'$ 의 값은

$$d+d' = 2, e+e' = 1 \text{ 뿐이다.}$$

(i) $(d, d', e, e') = (2, 0, 1, 0)$ 인 경우

$a+b+c=1, a'+b'+c'=4$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는 ${}^3H_1 \times {}^3H_4 = 45$

(ii) $(d, d', e, e') = (2, 0, 0, 1)$ 인 경우

$a+b+c=2, a'+b'+c'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는 ${}^3H_2 \times {}^3H_3 = 60$

(iii) $(d, d', e, e') = (1, 1, 1, 0)$ 인 경우

$a+b+c=2, a'+b'+c'=3$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는 ${}^3H_2 \times {}^3H_3 = 60$

(iv) $(d, d', e, e') = (1, 1, 0, 1)$ 인 경우

$a+b+c=3, a'+b'+c'=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는 ${}^3H_3 \times {}^3H_2 = 60$

(v) $(d, d', e, e') = (0, 2, 1, 0)$ 인 경우

$a+b+c=3, a'+b'+c'=2$ 를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는 ${}^3H_3 \times {}^3H_2 = 60$

(vi) $(d, d', e, e') = (0, 2, 0, 1)$ 인 경우

$a+b+c=4, a'+b'+c'=1$ 을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, a', b', c' 의 모든 순서쌍의 개수는 ${}^3H_4 \times {}^3H_1 = 45$

(i) ~ (vi)에 의하여 구하는 경우의 수는

$$2 \times (45 + 60 + 60) = 330$$

[미적분]

23	①	24	③	25	④	26	⑤	27	②
28	④	29	13	30	25				

23. [출제의도] 수열의 극한값을 계산한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n + 2}{4n^2 - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{4 - \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4}$$

24. [출제의도] 수열의 극한에 대한 성질을 이해하여 극한값을 구한다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)a_n}{n^2} = 3 \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{3n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{(2n+3)a_n}{n^2} \times \frac{n^3}{(2n+3)(3n^2+1)} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)a_n}{n^2} \times \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(2 + \frac{3}{n}\right)\left(3 + \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= 3 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

25. [출제의도] 등비수열의 극한을 이해하여 자연수의 개수를 구한다.

$$a_n = \left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n + \left(\frac{3}{k}\right)^n \text{ 에서 } k \text{가 자연수이므로}$$

$$\frac{k^2+9}{10k} > 0, \frac{3}{k} > 0$$

두 등비수열 $\left\{\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}, \left\{\left(\frac{3}{k}\right)^n\right\}$ 중 어느 한 수열이 발산하면 수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하지 않으므로

두 등비수열 $\left\{\left(\frac{k^2+9}{10k}\right)^n\right\}, \left\{\left(\frac{3}{k}\right)^n\right\}$ 이 모두 수렴하여야 한다.

$$\frac{k^2+9}{10k} \leq 1 \text{ 에서 } k^2 - 10k + 9 \leq 0, 1 \leq k \leq 9$$

$$\frac{3}{k} \leq 1 \text{ 에서 } k \geq 3 \text{ 이므로}$$

$$3 \leq k \leq 9$$

따라서 구하는 자연수 k 의 개수는 7

26. [출제의도] 수열의 합과 일반항 사이의 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

모든 자연수 n 에 대하여

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k - k^2}{k+1} = 2n^2 - n \text{ 이라 하자.}$$

$n \geq 2$ 일 때,

$$\begin{aligned} \frac{a_n - n^2}{n+1} &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^2 - n) - \{2(n-1)^2 - (n-1)\} \\ &= 4n - 3 \end{aligned}$$

$$a_n = (4n-3)(n+1) + n^2 = 5n^2 + n - 3 \quad (n \geq 2) \text{ 에서}$$

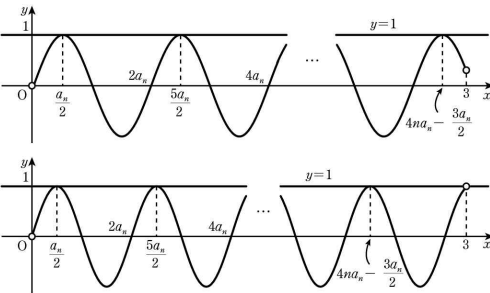
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + n - 3}{n^2 + 1} = 5$$

27. [출제의도] 수열의 극한의 대소 관계를 이해하여 수열의 극한값을 구한다.

함수 $y = \sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ 의 주기는 $2a_n$ 이고

$0 < x < 3$ 일 때, 모든 자연수 n 에 대하여 x 에 대한 방정식 $\sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right) = 1$ 의 서로 다른 실근의 개수가 $2n$

이므로 $0 < x < 3$ 에서 함수 $y = \sin\left(\frac{\pi}{a_n}x\right)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$$\left(4n - \frac{3}{2}\right) \times a_n < 3 \leq \left(4n + \frac{1}{2}\right) \times a_n$$

$$\frac{3}{4n + \frac{1}{2}} \leq a_n < \frac{3}{4n - \frac{3}{2}}$$

$$\frac{3n}{4n + \frac{1}{2}} \leq na_n < \frac{3n}{4n - \frac{3}{2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n + \frac{1}{2}} = \frac{3}{4}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{4n - \frac{3}{2}} = \frac{3}{4} \text{ 이므로}$$

수열의 극한의 대소 관계에 의하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{3}{4}$

28. [출제의도] 수열의 극한으로 정의된 함수를 추론하여 함수값을 구한다.

(i) $|x| < 1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 \text{ 이므로}$$

$$g(x) = f(x)$$

(ii) $|x| > 1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^n} = 0 \text{ 이므로}$$

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + \frac{1}{x^n} + \frac{f(x)}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{2n}}} = 2x^2$$

(iii) $x = -1$ 인 경우

$$g(-1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + (-1)^n + f(-1)}{2 + (-1)^n}$$

$$\text{수열 } \left\{ \frac{2 + (-1)^n + f(-1)}{2 + (-1)^n} \right\} \text{의 값은}$$

$$\text{교대로 } 1 + f(-1) \text{ 과 } 1 + \frac{f(-1)}{3} \text{ 이 된다.}$$

$f(-1) \neq 0$ 이면 이 수열은 발산하므로 조건을 만족시키지 않고, $f(-1) = 0$ 이면 이 수열은 수렴하므로 $f(-1) = 0, g(-1) = 1$

(iv) $x = 1$ 인 경우

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 1$$

$$\text{이므로 } g(1) = \frac{3 + f(1)}{3} \text{ 이다.}$$

$$f(1) = a + b = -f(-1) = 0 \text{ 이므로 } b = -a, g(1) = 1$$

(i) ~ (iv)에 의하여 함수 $g(x)$ 는

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (|x| < 1) \\ 1 & (|x| = 1) \\ 2x^2 & (|x| > 1) \end{cases}$$

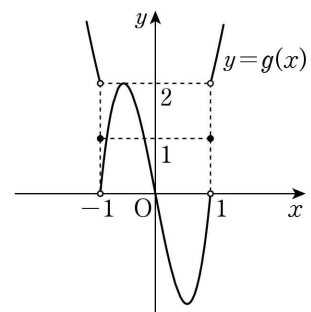
$f(x) = ax^3 + bx$ ($a > 0$)에서 $b = -a$ 이므로

$$f(x) = ax(x+1)(x-1)$$

$f'(x) = 3ax^2 - a = 0$ 에서 함수 $f(x)$ 는

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 에서 극대이고 } x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 에서 극소이다.}$$

이때, 함수 $y = g(x)$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 가 만나는 점의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 k 가 존재하므로 조건을 만족시키는 함수 $y = g(x)$ 의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $f(x)$ 의 극댓값 $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 은 2이므로

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}a}{9} + \frac{\sqrt{3}a}{3} = \frac{2\sqrt{3}a}{9} = 2 \text{ 에서 } a = 3\sqrt{3}$$

$$f(x) = 3\sqrt{3}x(x^2 - 1) \text{ 이므로}$$

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) \times g(2) = f\left(-\frac{1}{2}\right) \times 8 = \frac{9\sqrt{3}}{8} \times 8 = 9\sqrt{3}$$

29. [출제의도] 도형의 성질을 이용하여 수열의 극한에 대한 문제를 해결한다.

점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H_1 이라 할 때, 삼각형 ABC는 이등변삼각형이므로 $\overline{AB} = 2\overline{AH_1}$ 이

$$\text{고 } \angle CH_1A = \frac{\pi}{2} \text{ 이므로 } \cos \angle BAC = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{CA}} = \frac{1}{n}$$

각 BAD는 호 BD의 원주각이고 각 BCD는 부채꼴 CBD의 중심각이므로 $\angle BCD = 2\angle BAD = \angle BAC$

$$\text{삼각형 BCD에서 코사인법칙에 의해}$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \times \overline{CB} \times \overline{CD} \times \cos \angle BCD = 2n^2 - 2n$$

$$\overline{BD} = \sqrt{2n^2 - 2n}$$

$$\overline{BD} : \overline{DE} = \sqrt{2} : 1 \text{ 이므로 } \overline{DE} = \frac{\overline{BD}}{\sqrt{2}} = \sqrt{n^2 - n}$$

점 C에서 선분 DE에 내린 수선의 발을 H_2 라 하면 삼각형 CDE는 이등변삼각형이므로 $\overline{DE} = 2\overline{DH_2}$ 이고

$$\angle CH_2D = \frac{\pi}{2} \text{ 이다.}$$

$$\overline{CH_2}^2 = \overline{CD}^2 - \overline{DH_2}^2 = \frac{3n^2 + n}{4} \text{ 이므로 } \overline{CH_2} = \frac{\sqrt{3n^2 + n}}{2}$$

$$S_n = \frac{1}{2} \times \overline{DE} \times \overline{CH_2} = \frac{n\sqrt{3n^2 - 2n - 1}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n} = \frac{\sqrt{3}n - \sqrt{3n^2 - 2n - 1}}{4}$$

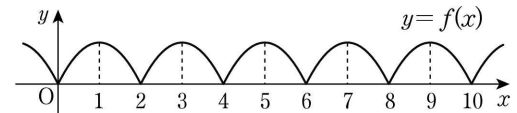
$$= \frac{2n + 1}{4(\sqrt{3}n + \sqrt{3n^2 - 2n - 1})}$$

$$\text{이므로 } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{4}n - \frac{S_n}{n} \right) = \frac{1}{4\sqrt{3}} = \frac{1}{12}\sqrt{3}$$

따라서 $p = 12, q = 1$ 이므로 $p + q = 13$

30. [출제의도] 등비수열의 극한을 이용하여 등비수열의 항의 값을 구하는 문제를 해결한다.

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형은 그림과 같고, 함수 $f(x)$ 는 $x = t$ (t 는 정수)에서 극값을 가진다.



등비수열 $\{a_n\}$ 이 수렴하므로 $-1 < r \leq 1$ 이다.

조건 (나)를 만족시키는 3개의 자연수를 i, j, l

($i < j < l$)이라 하면 $a_i \neq a_j$ 이므로 $r \neq 1$ 이고, $a_1 \neq 0$ 서로소인 두 자연수 $p(p \geq 2)$, q 에 대하여 $|r| = \frac{q}{p}$ 라 하자.

$a_l = a_1 r^{l-i}$ 이고 a_i, a_l 은 자연수, $l-i \geq 2$ 이므로 a_i 는 p^2 의 배수이다.

$0 < a_i < 10$ 에서 p 는 2 또는 3이므로

r 의 값은 $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$

이때, 조건 (나)를 만족시키는 등비수열 $\{a_n\}$ 의 공비와 순서쌍 (a_i, a_j, a_l) 은

$r = \frac{1}{2}$ 일 때, $(4, 2, 1)$, $r = \frac{1}{3}$ 일 때, $(9, 3, 1)$,

$r = \frac{2}{3}$ 일 때 $(9, 6, 4)$ 뿐이다.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_{n+1} + a_{2n}}{a_{n+1} + a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1^2 r^n + a_1 r^{2n-1}}{a_1 r^n + a_1 r^{n-1}} = \frac{a_1 r}{r+1} = \frac{81}{10} = \frac{3^4}{10}$$

에서 $a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r}$ 이다.

(i) $r = \frac{1}{2}$ 인 경우

$(a_i, a_j, a_l) = (4, 2, 1)$ 이고 $a_1 = 4$ 이다.

이때 $a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{3^5}{10}$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $r = \frac{1}{3}$ 일 때,

$(a_i, a_j, a_l) = (9, 3, 1)$ 이다.

$a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{2 \times 3^4}{5}$ 에서

$a_l = a_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{l-1} = 1$ 인 자연수 l 이 존재하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(iii) $r = \frac{2}{3}$ 일 때,

$(a_i, a_j, a_l) = (9, 6, 4)$ 이다.

$a_1 = \frac{3^4(r+1)}{10r} = \frac{3^4}{4}$ 에서 $i=3, j=4, l=5$ 이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 $r = \frac{2}{3}$

$a_7 = a_1 r^6 = \frac{3^4}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{16}{9}$ 에서

$p=9, q=16$ 이므로 $p+q=25$

[기하]

23	⑤	24	③	25	①	26	④	27	②
28	④	29	128	30	60				

23. [출제의도] 타원의 정의를 이용하여 단축의 길이를 계산한다.

타원 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 의 y 축 위의 두 꼭짓점의 좌표가 $(0, 2)$, $(0, -2)$ 이므로 단축의 길이는 4

24. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{4} = 1$ 의 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{2}{a}x$ 이고 $a > 0$ 이므로 $\frac{2}{a} = \frac{1}{3}$, $a = 6$

25. [출제의도] 포물선의 성질을 이해하여 한 점에서 포물선의 준선까지의 거리를 구한다.

원의 반지름의 길이가 5이므로 $\overline{FP} = 10$ 포물선의 성질에 의해 점 P에서 포물선의 준선 $x = -4$ 까지의 거리가 10이므로 점 P의 x 좌표는 6이다. 초점 F의 x 좌표는 4이고 원의 중심은 선분 FP의 중점이므로 원의 중심의 x 좌표는 5이다. 따라서 원의 중심에서 포물선의 준선까지의 거리는

$$5 - (-4) = 9$$

26. [출제의도] 타원의 성질을 이해하여 미지수를 구한다.

$\overline{FP} = \overline{PQ}$ 이고 $\overline{F'Q} \perp \overline{FP}$ 이므로 $\overline{FF'} = \overline{FQ}$
 $\overline{FQ} = \overline{F'Q}$ 이므로 삼각형 QF'F는 한 변의 길이가 $\overline{FF'}$ 인 정삼각형이다.
 $\overline{FF'} = 2c$ 이므로 $\overline{FP} = c$, $\overline{FP} = \sqrt{3}c$
 타원의 장축의 길이가 2이므로
 $\overline{FP} + \overline{FP} = (\sqrt{3}+1)c = 2$
 따라서 $c = \frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$

27. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이해하여 삼각형의 둘레의 길이를 구한다.

$\overline{F'Q} = a$ 라 하자.
 점 Q는 주축의 길이가 2인 쌍곡선 위의 점이므로
 $\overline{FQ} = \overline{F'Q} + 2 = a + 2$
 $\overline{PQ} = 4$ 이므로 $\overline{FP} = a + 4$
 두 점 P, R은 쌍곡선 위의 점이므로
 $\overline{FP} = \overline{FR} - 2 = a + 2$, $\overline{FR} = \overline{FR} + 2$
 삼각형 F'RQ의 둘레의 길이가 16이므로
 $\overline{FR} + \overline{QR} + \overline{F'Q} = (\overline{FR} + 2) + (\overline{FQ} - \overline{FR}) + a = 2a + 4 = 16$
 즉 $a = 6$
 따라서 삼각형 FPQ의 둘레의 길이는
 $\overline{FP} + \overline{PQ} + \overline{FQ} = (a + 2) + 4 + (a + 2) = 2a + 8 = 20$

28. [출제의도] 포물선의 성질을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.

두 포물선 C_1, C_2 의 초점은 각각 $F_1(3, 0)$, $F_2(-\frac{3}{2}, 0)$ 이고 준선의 방정식은 각각 $x = -3$, $x = \frac{3}{2}$ 이다.
 즉 $\overline{F_1F_2} = 3 - (-\frac{3}{2}) = \frac{9}{2}$
 선분 PQ가 y 축과 만나는 점을 H라 하면
 두 점 P, Q는 각각 포물선 C_1, C_2 위의 점이므로
 $\overline{F_1P} = \overline{PH} + 3$, $\overline{F_2Q} = \overline{QH} + \frac{3}{2}$
 사각형 PQF₂F₁의 둘레의 길이가 41이므로
 $\overline{PQ} + \overline{F_2Q} + \overline{F_1F_2} + \overline{F_1P} = \overline{PQ} + (\overline{QH} + \frac{3}{2}) + \frac{9}{2} + (\overline{PH} + 3) = 2\overline{PQ} + 9 = 41$
 즉 $\overline{PQ} = 16$

점 P의 좌표를 (x_1, a) , 점 Q의 좌표를 (x_2, a) 라 하면 $12x_1 = -6x_2$, $2x_1 = -x_2$

$\overline{PQ} = x_1 - x_2 = 3x_1 = 16$ 에서 $x_1 = \frac{16}{3}$

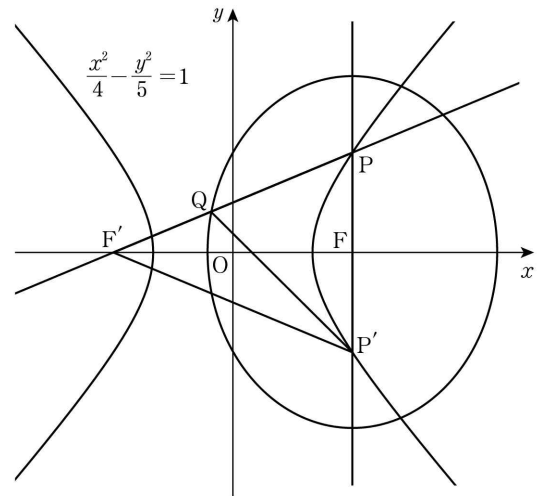
점 P는 포물선 C_1 위의 점이므로

$$a^2 = 12x_1 = 64, a = 8$$

따라서 구하는 사각형 PQF₂F₁의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times (\overline{PQ} + \overline{F_1F_2}) \times a = \frac{1}{2} \times (16 + \frac{9}{2}) \times 8 = 82$$

29. [출제의도] 쌍곡선의 성질을 이용하여 타원의 장축의 길이를 구하는 문제를 해결한다.



$$c^2 = 4 + 5 = 9 \text{이므로 } c = 3$$

점 P의 x 좌표가 3이므로

$$\frac{3^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \text{에서 점 P의 } y \text{좌표는 } \frac{5}{2}$$

$\overline{FP} = \frac{5}{2}$ 이고 쌍곡선의 주축의 길이가 4이므로

$$\overline{F'P} = \overline{FP} + 4 = \frac{13}{2}$$

$\overline{F'P} = \overline{FP}$, $\overline{PP'} = \overline{QP'}$ 이고 $\angle F'PP' = \angle QPP'$ 이므로

삼각형 F'P'P와 삼각형 P'PQ는 서로 닮음인 이등변삼각형이다.

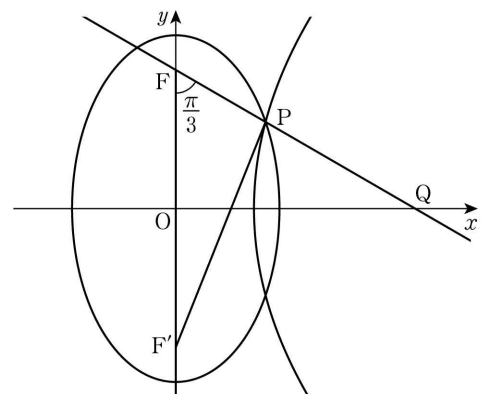
$$\frac{\overline{PP'}}{\overline{F'P}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{PP'}} \text{에서 } \frac{10}{13} = \frac{\overline{PQ}}{5}, \text{ 즉 } \overline{PQ} = \frac{50}{13}$$

타원의 장축의 길이는

$$\overline{F'Q} + \overline{PQ} = 5 + \frac{50}{13} = \frac{115}{13} \text{이므로 } p = 13, q = 115$$

따라서 $p+q = 13+115 = 128$

30. [출제의도] 타원과 포물선의 관계를 추론하여 선분의 길이를 구한다.



$\overline{FP} = k$ 라 하면 타원의 장축의 길이가 10이므로

$$\overline{F'P} = 10 - \overline{FP} = 10 - k$$

$\overline{FF'} = 8$ 이고 $\angle F'FP = \frac{\pi}{3}$ 이므로

삼각형 PFF'에서 코사인법칙에 의해

$$\overline{F'P}^2 = \overline{FP}^2 + \overline{FF'}^2 - 2 \times \overline{FP} \times \overline{FF'} \times \cos \frac{\pi}{3}$$

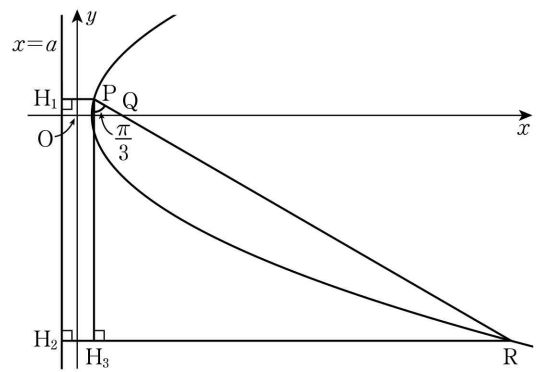
$$(10-k)^2 = k^2 + 8^2 - 2 \times k \times 8 \times \frac{1}{2}$$

$$12k = 36, \text{ 즉 } k = 3$$

$\angle F'FP = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\overline{OF} = 4$ 이므로 $\overline{FQ} = 8$

$$\overline{PQ} = \overline{FQ} - \overline{FP} = 8 - k = 5$$

점 P, R에서 준선 $x = a$ 에 내린 수선의 발을 각각 H_1, H_2 , 점 P에서 직선 RH_2 에 내린 수선의 발을 H_3 이라 하자.



$\overline{QR} = t$ 라 하자. 삼각형 RPH_3 에서

$$\overline{RH_3} = \overline{PR} \times \sin \frac{\pi}{3} = (t+5) \times \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots \textcircled{1}$$

두 점 R, P 는 포물선 위의 점이므로

$\overline{RH_2} = \overline{QR} = t$ 이고 $\overline{PH_1} = \overline{QP} = 5$ 이다.

$$\overline{H_3H_2} = \overline{PH_1} = 5$$

$$\overline{RH_3} = \overline{RH_2} - \overline{H_3H_2} = t - 5 \dots\dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{에서 } \frac{\sqrt{3}}{2}(t+5) = t-5$$

$$\approx t = \frac{10+5\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = 35+20\sqrt{3}$$

$\overline{PR} = t+5 = 40+20\sqrt{3}$ 이므로 $p = 40, q = 20$

따라서 $p+q = 40+20 = 60$