2025학년도 5월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	⑤	**2**	①	**3**	③	**4**	①	**5**	④
6	⑤	**7**	②	**8**	①	**9**	④	**10**	③
11	①	**12**	③	**13**	②	**14**	④	**15**	⑤
16	10	**17**	2	**18**	23	**19**	16	**20**	110
21	200	**22**	71						

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$\left(3^{1-\sqrt{2}}\right)^2 \times 9^{\sqrt{2}} = 3^{2-2\sqrt{2}} \times 3^{2\sqrt{2}} = 3^2 = 9$

2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$이고

$f'(x) = 3x^2 - 2$이므로 $f'(1) = 1$

3. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 k이므로

$a_n = k^n$

$a_2(k^2+1) = 3a_4$에서 $k^2(k^2+1) = 3k^4$

$k > 0$이므로 $k^2 + 1 = 3k^2$, $k^2 = \dfrac{1}{2}$에서

$k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $a_3 = k^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim\limits_{x \to -1-} f(x) + \lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0 + (-1) = -1$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$f'(x) = 2 \times (x^2 - 2x + 5) + (2x+1)(2x-2)$

이므로 $f'(2) = 20$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\theta\tan\theta + \cos\theta = 3$의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 3\cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$에서 $\sin\theta < 0$이므로

$\sin\theta = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

그러므로 $\tan\theta = -2\sqrt{2}$

따라서 $\sin\theta - \tan\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - (-2\sqrt{2}) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

7. [출제의도] 부정적분 이해하기

다항함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = x^2 - kx + k - 1 \ge 0$이다.

이차방정식 $x^2 - kx + k - 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (k-1)$

$= k^2 - 4k + 4$

$= (k-2)^2 \le 0$

이므로 $k = 2$

$f(x) = \displaystyle\int (x^2 - 2x + 1)dx$

$= \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$ (C는 적분상수)

$f(0) = 2$에서 $C = 2$

따라서 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2$이므로 $f(3) = 5$

8. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

$2^{|x|} = t\ (t \ge 1)$이라 하면 $t + \dfrac{64}{t} \le 20$에서

$t^2 - 20t + 64 \le 0$, $(t-4)(t-16) \le 0$

$4 \le t \le 16$

$2^2 \le 2^{|x|} \le 2^4$에서 밑 2가 1보다 크므로

$2 \le |x| \le 4$, $-4 \le x \le -2$ 또는 $2 \le x \le 4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 6

9. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$xf(x) = ax^3 + 2x - 3 + \displaystyle\int_0^1 f'(t)dt$의 양변에

$x = 0$을 대입하면

$0 \times f(0) = -3 + \displaystyle\int_0^1 f'(t)dt$에서 $\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt = 3$

$xf(x) = ax^3 + 2x$, $f(x) = ax^2 + 2$

$\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0) = a = 3$

그러므로 $f(x) = 3x^2 + 2$

따라서 $\displaystyle\int_0^2 f(x)dx = \Big[x^3 + 2x\Big]_0^2 = 12$

10. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

$\dfrac{1}{a_1 \times b_1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{1} \dfrac{1}{a_k \times b_k} = \dfrac{1}{12}$

$n \ge 2$일 때

$\dfrac{1}{a_n \times b_n} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k \times b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{a_k \times b_k}$

$= \dfrac{n}{8n+4} - \dfrac{n-1}{8n-4} = \dfrac{4}{(8n+4)(8n-4)}$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{1}{a_n \times b_n} = \dfrac{4}{(8n+4)(8n-4)}$

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 같으므로 공차를 d라 하면

$a_n = a_1 + (n-1)d$, $b_n = b_1 + (n-1)d$

$a_n \times b_n = (dn + a_1 - d)(dn + b_1 - d)$

$= \dfrac{(8n+4)(8n-4)}{4} = (4n+2)(4n-2)$

에서 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 $a_n = 4n+2$, $b_n = 4n-2$ 또는 $a_n = 4n-2$, $b_n = 4n+2$

따라서

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} 8k = 8\sum_{k=1}^{5} k = 8 \times \frac{5 \times 6}{2} = 120$

11. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 속도를 v라 하면

$v = 3kt^2 - 12t + 1$

시각 $t = k$에서 점 P의 속도가 1이므로

$3k^3 - 12k + 1 = 1$에서

$3k^3 - 12k = 0$, $3k(k+2)(k-2) = 0$

$k > 0$이므로 $k = 2$

점 P의 시각 $t\ (t \ge 0)$에서의 가속도를 a라 하면

$a = 6kt - 12$

따라서 시각 $t = 2k$에서 점 P의 가속도는

$12k^2 - 12 = 12 \times 4 - 12 = 36$

12. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 같으므로

$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{AB}}$이다.

점 A는 선분 OB의 중점이고 점 B의 x좌표가

t이므로 점 A의 x좌표는 $\dfrac{t}{2}$이다.

직선 AB는 점 O를 지나므로

두 직선 OA, OB의 기울기가 같다.

그러므로 $\dfrac{\log_a \frac{t}{2} - 0}{\frac{t}{2} - 0} = \dfrac{\log_a t - 0}{t - 0}$에서

$\log_a t = \log_a 4$, $t = 4$

점 A는 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = -2\log_a x + k$가 만나는 점이므로 $\log_a 2 = -2\log_a 2 + k$에서

$k = 3\log_a 2$

점 B의 좌표는 $(4, 2\log_a 2)$,

점 C의 좌표는 $(4, -\log_a 2)$에서

$\overline{\mathrm{BC}} = 2\log_a 2 - (-\log_a 2) = 3\log_a 2$

삼각형 ACB의 넓이가 2이므로

$\dfrac{1}{2} \times \overline{\mathrm{BC}} \times 2 = 3\log_a 2 = 2$에서 $a = 2\sqrt{2}$, $k = 2$

따라서 $a \times k \times t = 2\sqrt{2} \times 2 \times 4 = 16\sqrt{2}$

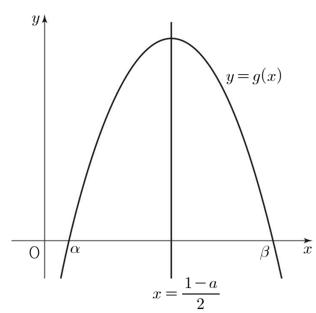
13. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b는 상수),

$g(x) = x - 3 - f(x)$라 하자.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha < 3 < \beta)$라 하면 $g(\alpha) = g(\beta) = 0$



$S_2 = \displaystyle\int_\alpha^\beta |f(x) - (x-3)|dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$이므로

직선 $x = 3$은 곡선 $y = g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 이등분한다.

이때 $g(x) = -x^2 + (1-a)x - 3 - b$에서

이차함수 $y = g(x)$의 그래프는 직선 $x = \dfrac{1-a}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\dfrac{1-a}{2} = 3$, $a = -5$

$S_2 - 2S_1 = 6$에서 $\dfrac{1}{2}S_2 - S_1 = 3$

$\dfrac{1}{2}S_2 - S_1$

$= \displaystyle\int_\alpha^3 |f(x) - (x-3)|dx - \int_0^\alpha |f(x) - (x-3)|dx$

$= -\displaystyle\int_\alpha^3 \{f(x) - (x-3)\}dx - \int_0^\alpha \{f(x) - (x-3)\}dx$

$= -\displaystyle\int_0^3 \{f(x) - (x-3)\}dx$

$= -\displaystyle\int_0^3 (x^2 - 6x + b + 3)dx$

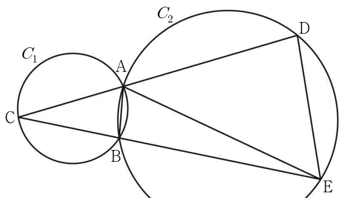
$= -\left[\dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (b+3)x\right]_0^3$

$=18-3(b+3)=9-3b=3$

$b=2$

따라서 $f(x)=x^2-5x+2$이므로 $f(-1)=8$

14. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기



사각형 ABED가 원 C_2에 내접하므로

$\angle\mathrm{EBA}=\pi-\angle\mathrm{ADE}$에서 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ADE}$

삼각형 ACB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle\mathrm{ABC})}=\dfrac{3}{\sin(\angle\mathrm{ABC})}=2r_1$

삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin(\angle\mathrm{ADE})}=2r_2$

$r_1:r_2=1:2$에서

$\dfrac{3}{\sin(\angle\mathrm{ABC})}:\dfrac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin(\angle\mathrm{ADE})}=2r_1:2r_2=1:2$

이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=6$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle\mathrm{ADE})=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\times5\times4}=\dfrac{1}{8}$

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}}^2=8^2+4^2-2\times8\times4\times\dfrac{1}{8}=72$

따라서 선분 CE의 길이는 $6\sqrt{2}$

15. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\{g(x)-x\}\{g(x)-f(x)\}=0$이므로

$g(x)=x$ 또는 $g(x)=f(x)$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=2$에서 연속이다.

$g(2)=2$ 또는 $g(2)=f(2)$에서

$f(2)\neq2$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가

$x=2$에서 만나지 않으므로

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-2}{x-2}=1$ 또는

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$가 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(2)=2$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$에서 $f(0)=0$, $f'(0)=1$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,0)$에서의

접선의 방정식은 $y=x$이다.

$h(x)=f(x)-x$라 하면

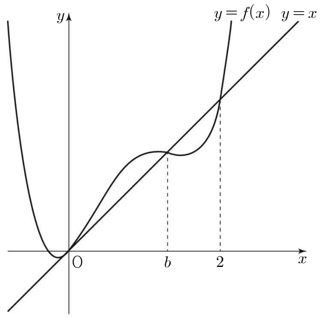
함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고

$h(0)=h'(0)=h(2)=0$이므로

$h(x)=x^2(x-2)(x-b)$ (b는 상수)

$h(b)=0$이므로 $f(b)=b$

(ⅰ) $0\le b\le2$일 때



조건 (나)에 의하여 $g(-4)=-g(4)$이므로

$g(4)=4$, $g(-4)=-4$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x\le0$ 또는 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

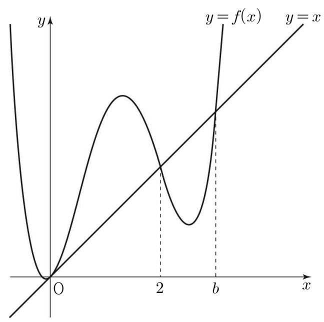
$g(x)=x$이다.

이때 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $b>2$일 때



(ⅰ)과 같은 방법으로 함수 $g(x)$를 구하면

$x\le0$ 또는 $x\ge b$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x$이다.

$2\le x\le b$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x$이면

$x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $2\le x\le b$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)$이다.

이때 $0\le x\le2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)$이면 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=f'(2)$가 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $0\le x\le2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x$이다.

$x\ge b$인 모든 실수 x에 대하여

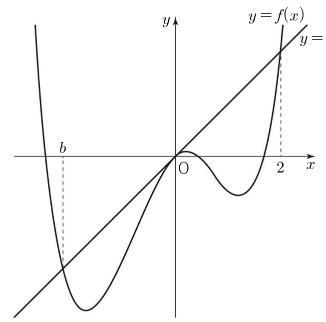
$g(-x)=-g(x)$이므로 조건 (나)에 의하여 $b=4$

$f(x)=x^2(x-2)(x-4)+x$

$g(x)=\begin{cases}x & (x\le2\text{ 또는 }x\ge4)\\ x^2(x-2)(x-4)+x & (2<x<4)\end{cases}$

그러므로 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}=\dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}$

(ⅲ) $b<0$일 때



(ⅱ)와 같은 방법으로 함수 $g(x)$를 구하면

$x\le b$ 또는 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x$이고

$b<x<2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)$이다.

$-2\le b<0$이면 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $b<-2$

$x\ge-b$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로 조건 (나)에 의하여 $b=-4$

$f(x)=x^2(x-2)(x+4)+x$

$g(x)=\begin{cases}x & (x\le-4\text{ 또는 }x\ge2)\\ x^2(x-2)(x+4)+x & (-4<x<2)\end{cases}$

그러므로 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}=\dfrac{-34}{3}=-\dfrac{34}{3}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

모든 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}$의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{34}{3}\right)=-11$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$x-3$, $5x-1$은 로그의 진수이므로

$x-3>0$, $5x-1>0$에서 $x>3$

방정식 $\log_{\sqrt{3}}(x-3)=\log_3(5x-1)$에서

$\log_3(x-3)^2=\log_3(5x-1)$

$(x-3)^2=5x-1$

$x^2-11x+10=(x-1)(x-10)=0$

따라서 $x>3$이므로 $x=10$

17. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\displaystyle\int_0^a(4x^2-3x)dx=\int_0^a(x^2+x)dx$에서

$\displaystyle\int_0^a(4x^2-3x)dx-\int_0^a(x^2+x)dx$

$\displaystyle=\int_0^a(3x^2-4x)dx$

$=\Big[x^3-2x^2\Big]_0^a$

$=a^3-2a^2=a^2(a-2)=0$

따라서 $a>0$이므로 $a=2$

18. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k+3)=\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}3$

$\displaystyle\qquad=\sum_{k=1}^{5}a_k+15=30$

에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_k=15$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)=2\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k$

$=2\times 15+\sum_{k=1}^{5} b_k=53$

따라서 $\sum_{k=1}^{5} b_k=23$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선을 l이라 하면 직선 l의 기울기는 $f'(0)=b$

이때 직선 l이 두 점 $(0, 1)$, $(1, 0)$을 지나므로

직선 l의 기울기는 $\frac{0-1}{1-0}=-1$에서 $b=-1$

곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 0)$을 지나므로

$f(1)=2+a+b=a+1=0$에서 $a=-1$

따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1$이므로 $f(3)=16$

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$0<k<\frac{2}{t}$에서 $0<tk\pi<2\pi$

$f(k)=3k$에서 $\sin(tk\pi)=\sqrt{3}k>0$이고

$g(k)=3k$에서 $\cos(tk\pi)=-k<0$이므로

$\frac{\pi}{2}<tk\pi<\pi$

$f(k)=g(k)$에서 $\tan(tk\pi)=-\sqrt{3}$이므로

$tk\pi=\frac{2}{3}\pi$, $tk=\frac{2}{3}$

$f(k)=3k$에서 $\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}=3k$이므로

$k=\frac{1}{2}$, $t=\frac{4}{3}$

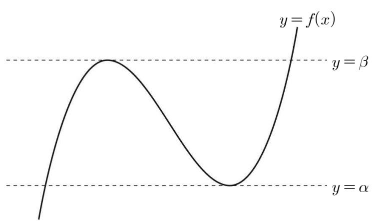
따라서 $60(t+k)=60\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=110$

21. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수이므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$

그러므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)+g(t-4)=2$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.



삼차함수 $f(x)$의 극솟값을 α, 극댓값을 β라 하자.
(α, β는 $\alpha<\beta$인 상수)

$$g(t)=\begin{cases} 1 & (t<\alpha \text{ 또는 } t>\beta) \\ 2 & (t=\alpha \text{ 또는 } t=\beta) \\ 3 & (\alpha<t<\beta) \end{cases}$$

함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 불연속이고,
함수 $g(t-4)$는 $t=\alpha+4$와 $t=\beta+4$에서만 불연속이다.

$\lim_{t\to\alpha+}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to\alpha+}g(t)+\lim_{t\to\alpha+}g(t-4)=3+1=4$,

$\lim_{t\to\alpha-}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to\alpha-}g(t)+\lim_{t\to\alpha-}g(t-4)=1+1=2$

이므로

$\lim_{t\to\alpha+}\{g(t)+g(t-4)\}\neq\lim_{t\to\alpha-}\{g(t)+g(t-4)\}$이고,

$\lim_{t\to(\beta+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to(\beta+4)+}g(t)+\lim_{t\to(\beta+4)+}g(t-4)=1+1=2$,

$\lim_{t\to(\beta+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to(\beta+4)-}g(t)+\lim_{t\to(\beta+4)-}g(t-4)=1+3=4$

이므로

$\lim_{t\to(\beta+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}\neq\lim_{t\to(\beta+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$

에서 함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=\alpha$, $t=\beta+4$에서 불연속이다.

조건에 의하여 함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=0$과 $t=a$에서만 불연속이고 $a>0$이므로

$\alpha=0$, $\beta+4=a$ ⋯ ㉠

함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=\alpha$, $t=\beta+4$에서만 불연속이므로 $t=\alpha+4$에서 연속이다.

$\lim_{t\to(\alpha+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}=\lim_{t\to(\alpha+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=g(\alpha+4)+g(\alpha)$

$\lim_{t\to(\alpha+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t-4)=\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+3$,

$\lim_{t\to(\alpha+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$

$=\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t-4)=\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+1$,

$g(\alpha+4)+g(\alpha)=g(\alpha+4)+2$이므로

$\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+3=\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+1=g(\alpha+4)+2$

이때 모든 실수 t에 대하여

$g(t)=1$ 또는 $g(t)=2$ 또는 $g(t)=3$이므로

$\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)=1$, $\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)=3$, $g(\alpha+4)=2$

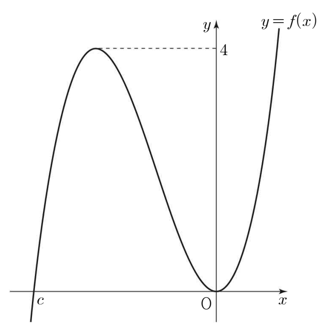
그러므로 $\beta=\alpha+4$

㉠에 의하여 $\beta=4$, $a=8$

그러므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 0, 극댓값은 4이다.

함수 $f(x)$가 극소가 되는 x의 값을 b라 하자.

(i) $b=0$일 때



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 $c(c<0)$이라 하자.

$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^2(x-c)$

$f'(x)=3x^2-2cx=x(3x-2c)$에서 $f'\left(\frac{2}{3}c\right)=0$

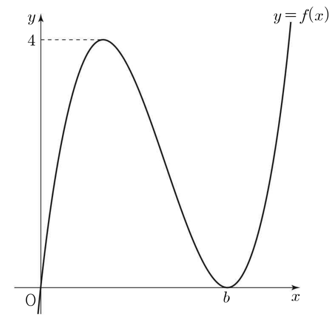
그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}c$에서 극댓값 4를 갖는다.

$f\left(\frac{2}{3}c\right)=-\frac{4}{27}c^3=4$이므로 $c=-3$에서

$f(x)=x^2(x+3)$

그러므로 $f(a)=f(8)=704$

(ii) $b\neq 0$일 때



$f(0)=0$이므로 $f(x)=x(x-b)^2$

$f'(x)=3x^2-4bx+b^2=(3x-b)(x-b)$에서

$f'\left(\frac{b}{3}\right)=0$

그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{b}{3}$에서 극댓값 4를 갖는다.

$f\left(\frac{b}{3}\right)=\frac{4}{27}b^3=4$이므로 $b=3$에서

$f(x)=x(x-3)^2$

그러므로 $f(a)=f(8)=200$

(i), (ii)에 의하여 $f(a)$의 최솟값은 200

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $a_1\times a_2>0$이므로

$a_1>0$, $a_2>0$ 또는 $a_1<0$, $a_2<0$

$a_1<0$이면 $a_2=a_1^2>0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

$a_1>0$이므로 $a_2=-2a_1+3$

$a_2>0$이므로 $a_3=-2a_2+3=4a_1-3$ ⋯ ㉠

(i) $a_3<0$일 때

$a_4=a_3^2>0$이므로

$a_5=-2a_3^2+3=a_3$에서 $(2a_3+3)(a_3-1)=0$

$a_3<0$이므로 $a_3=-\frac{3}{2}$

㉠에 의하여 $a_1=\frac{3}{8}$

(ii) $a_3=0$일 때

$a_4=a_3^2=0$, $a_5=a_4^2=0$이므로 $a_3=a_5=0$

㉠에 의하여 $a_1=\frac{3}{4}$

(iii) $a_3>0$일 때

(a) $0<a_3<\frac{3}{2}$일 때

$a_4=-2a_3+3>0$이므로

$a_5=-2a_4+3=4a_3-3=a_3$에서 $a_3=1$

㉠에 의하여 $a_1=1$

(b) $a_3\geq\frac{3}{2}$일 때

$a_4=-2a_3+3\leq 0$이므로

$a_5=a_4^2=(-2a_3+3)^2=a_3$에서

$(4a_3-9)(a_3-1)=0$

$a_3\geq\frac{3}{2}$이므로 $a_3=\frac{9}{4}$

㉠에 의하여 $a_1=\frac{21}{16}$

(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은

$\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+1+\frac{21}{16}=\frac{55}{16}$이므로 $p=16$, $q=55$

따라서 $p+q=71$

[미적분]

23	②	**24**	③	**25**	①	**26**	⑤	**27**	④
28	③	**29**	45	**30**	15				

23. [출제의도] 지수함수의 극한 계산하기

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4^x-1}{x}=\ln 4=2\ln 2$

24. [출제의도] 여러 가지 미분법 이해하기

$\dfrac{dx}{dt}=2e^{2t-2}$, $\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1-\ln t}{t^2}$이므로

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\dfrac{1-\ln t}{2t^2e^{2t-2}}$

따라서 $t=1$일 때, $\dfrac{dy}{dx}$의 값은 $\dfrac{1}{2}$

25. [출제의도] 수열의 극한 이해하기

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(bn-1)^2}{(b+6)n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(b-\dfrac{1}{n}\right)^2}{b+6+\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{b^2}{b+6}$

이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{an^2+bn}-bn\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a-b^2)n^2+bn}{\sqrt{an^2+bn}+bn}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(a-b^2)n+b}{\sqrt{a+\dfrac{b}{n}}+b}=\dfrac{b^2}{b+6}$

그러므로 $a-b^2=0$, $a=b^2$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b}{\sqrt{b^2+\dfrac{b}{n}}+b}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{b^2}{b+6}$

$2b^2-b-6=(2b+3)(b-2)=0$

$b>0$이므로 $b=2$, $a=4$

따라서 $a+b=6$

26. [출제의도] 급수의 뜻 이해하기

점 P_n에서 x축, y축에 내린 수선의 발을 각각 S_n, T_n이라 하면

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{S}_n}=\sqrt{2}\left(n^2+5n+3\right)$,

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{T}_n}=\sqrt{2}\,n$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}-\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}=\sqrt{2}\left(n^2+5n+3\right)-\sqrt{2}\,n$

$=\sqrt{2}\left(n^2+4n+3\right)$

$=\sqrt{2}(n+1)(n+3)$

따라서

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3\sqrt{2}}{\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}-\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{R}_n}}$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3}{(n+1)(n+3)}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}-\dfrac{1}{k+3}\right)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\left\{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+3}\right)\right\}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)$

$=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{5}{6}=\dfrac{5}{4}$

27. [출제의도] 여러 가지 미분법을 활용하여 문제해결하기

$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2f'(x)e^{2f(x)}-2f'(2x)e^{f(2x)}-6e^{3x}=0$

$x=0$을 대입하면

$2f'(0)e^{2f(0)}-2f'(0)e^{f(0)}-6=0$

$f'(0)\left(e^{2f(0)}-e^{f(0)}\right)=3\ \cdots$ ㉠

$e^{2f(x)}-e^{f(2x)}-2e^{3x}=0$에 $x=0$을 대입하면

$e^{2f(0)}-e^{f(0)}-2=0$

$e^{2f(0)}-e^{f(0)}=2$

이므로 ㉠에서 $f'(0)=\dfrac{3}{2}$

따라서 $g'(f(0))=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{2}{3}$

28. [출제의도] 삼각함수의 미분을 이용하여 추론하기

$f(x)=\sin(a+b\cos x)$에서

$f'(x)=\cos(a+b\cos x)\times(-b\sin x)$

$f'(x)=b$에서

$-b\sin x\cos(a+b\cos x)=b$

$\sin x\cos(a+b\cos x)=-1$

$-1\le\sin x\le 1$, $-1\le\cos(a+b\cos x)\le 1$이므로

$\sin x=1$, $\cos(a+b\cos x)=-1$이거나

$\sin x=-1$, $\cos(a+b\cos x)=1$이다.

이때 $\sin x=1$ 또는 $\sin x=-1$이면

$\cos x=0$이므로

$\cos a=-1$ 또는 $\cos a=1$

$a=(2n-1)\pi$ 또는 $a=2n\pi$ (n은 3 이하의 자연수)

조건 (나)에서

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(f(a)\left(\pi+\dfrac{x}{4}\right)\right)}{x}=\dfrac{b}{a}$이고 $\lim\limits_{x\to 0}x=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0}\sin\left(f(a)\left(\pi+\dfrac{x}{4}\right)\right)=\sin(f(a)\pi)=0$

$-1\le f(a)\le 1$이므로

$f(a)=-1$ 또는 $f(a)=0$ 또는 $f(a)=1$

(i) $f(a)=1$일 때

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\dfrac{x}{4}\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(\pi+\dfrac{x}{4}\right)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin\dfrac{x}{4}}{x}=-\dfrac{1}{4}<0$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ii) $f(a)=0$일 때

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\dfrac{x}{4}\right)\right)=0$

이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(iii) $f(a)=-1$일 때

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\left(f(a)\left(\pi+\dfrac{x}{4}\right)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(-\pi-\dfrac{x}{4}\right)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{4}}{x}=\dfrac{1}{4}$

이므로 조건 (나)에서 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{1}{4}$, $a=4b$

(i), (ii), (iii)에 의하여 $f(a)=-1$이고, $b=\dfrac{a}{4}$

$a=(2n-1)\pi$ (n은 3 이하의 자연수)이면

$f(a)=\sin(a+b\cos a)=\sin\left(a-\dfrac{a}{4}\right)=\sin\dfrac{6n-3}{4}\pi$

이므로 3 이하의 자연수 n에 대하여 $f(a)\ne-1$

$a=2n\pi$ (n은 3 이하의 자연수)이면

$f(a)=\sin(a+b\cos a)=\sin\left(a+\dfrac{a}{4}\right)=\sin\dfrac{5n}{2}\pi$

이므로 $n=3$일 때, $f(a)=-1$을 만족시킨다.

그러므로 $a=6\pi$, $b=\dfrac{3}{2}\pi$

따라서 $a+b=\dfrac{15}{2}\pi$

29. [출제의도] 음함수 미분을 활용하여 문제해결하기

$\overline{\mathrm{AP}}=t$라 하면 삼각형 ABP의 넓이 $f(\theta)$는

$f(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\sin\theta\ \cdots$ ㉠

선분 BC의 중점을 M이라 하면 점 M은 반원의 중심이고, 직각삼각형 ABM에서

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BM}}=1$이므로 $\angle\mathrm{BAM}=\dfrac{\pi}{6}$

$\theta\ne\dfrac{\pi}{6}$일 때, $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{6}\right)$이므로

삼각형 APM에서 코사인법칙에 의하여

$1^2=2^2+t^2-2\times 2\times t\times\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)$

$t^2-4t\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)+3=0\ \cdots$ ㉡

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때, $t=\overline{\mathrm{AM}}+\overline{\mathrm{MP}}=2+1=3$이므로

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$일 때도 ㉡이 성립한다.

㉡의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$2t\dfrac{dt}{d\theta}-4\dfrac{dt}{d\theta}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)-4t\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-\theta\right)=0$

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$를 대입하면 $\dfrac{dt}{d\theta}=0$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$f'(\theta)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{dt}{d\theta}\sin\theta+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\cos\theta$이므로

$f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 0\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 3\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9}{4}$

따라서 $20f'\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=20\times\dfrac{9}{4}=45$

30. [출제의도] 등비급수를 이용하여 추론하기

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r이라 하자. 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 수열이므로 $a_1>0$, $r>0$

(i) $0<r<1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $a_n>a_{n+1}$이고

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$이다.

$a_{3n-2}<1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 하면 $n\ge 3k-2$일 때 $b_n=(-1)^n$이므로

n이 k 이상의 짝수이면

$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=3+7+2=12$,

n이 k 이상의 홀수이면

$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=-3-7-2=-12$

수열 $\{3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}\}$이 발산하므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ii) $r=1$일 때

(a) $0<a_1<1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=(-1)^n$이므로

n이 짝수이면

$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=3+7+2=12$,

n이 홀수이면

$3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}=-3-7-2=-12$

수열 $\{3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n}\}$이 발산하므로

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(b) $a_1\ge 1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $b_n=a_n=a_1$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(3a_1-7a_1+2a_1)=-2a_1\ne 0$

그러므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(iii) $r>1$일 때

모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이고

$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$이다.

$a_{3n} \geq 1$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 k라 하면 $n \geq k$일 때 $b_n = a_n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$$

$$=\sum_{n=1}^{k}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})+\sum_{n=k+1}^{\infty}(3a_{3n-2}-7a_{3n-1}+2a_{3n})$$

$$=\sum_{n=1}^{k}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})+\sum_{n=k+1}^{\infty}\left\{a_{3n-2}\times(3-7r+2r^2)\right\}$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(3b_{3n-2}-7b_{3n-1}+2b_{3n})$이 수렴하므로

급수 $\sum_{n=k+1}^{\infty}\left\{a_{3n-2}\times(3-7r+2r^2)\right\}$이 수렴한다.

그러므로 $\lim_{n\to\infty}\left\{a_{3n-2}\times(3-7r+2r^2)\right\}=0$

$\lim_{n\to\infty} a_{3n-2}=\infty$이므로 $3-7r+2r^2=0$

$2r^2-7r+3=(2r-1)(r-3)=0$

$r>1$이므로 $r=3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $r=3$

조건 (나)에서 $b_5^2 \neq b_4 b_6$이므로 세 수 b_4, b_5, b_6은 이 순서대로 등비수열을 이루지 않는다.

이때 두 수열 $\{(-1)^n\}$, $\{a_n\}$은 등비수열이므로

$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\leq 4)\\ a_n & (n\geq 5)\end{cases}$ 또는 $b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\leq 5)\\ a_n & (n\geq 6)\end{cases}$

이다.

$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\leq 5)\\ a_n & (n\geq 6)\end{cases}$일 때,

$a_5<1$, $a_6=3a_5\geq 1$이므로 $\frac{1}{3}\leq a_5<1$ ⋯ ㉠

$b_5^2=b_4b_6-\frac{9}{4}$에서 $(-1)^2=1\times a_6-\frac{9}{4}$, $a_6=\frac{13}{4}$

$a_5=\frac{13}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{13}{12}$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

$b_n=\begin{cases}(-1)^n & (n\leq 4)\\ a_n & (n\geq 5)\end{cases}$일 때,

$a_4<1$, $a_5=3a_4\geq 1$이므로 $\frac{1}{3}\leq a_4<1$ ⋯ ㉡

$b_5^2=b_4b_6-\frac{9}{4}$에서 $a_5^2=1\times a_6-\frac{9}{4}$

$4a_5^2-12a_5+9=(2a_5-3)^2=0$이므로 $a_5=\frac{3}{2}$

$a_4=\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$이므로 ㉡을 만족시킨다.

따라서 $90a_3=90\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\right)=15$