2025학년도 5월 고3 전국연합학력평가
정답 및 해설

• 2교시 수학 영역 •

1	⑤	**2**	①	**3**	③	**4**	①	**5**	④
6	⑤	**7**	②	**8**	①	**9**	④	**10**	③
11	①	**12**	③	**13**	②	**14**	④	**15**	⑤
16	10	**17**	2	**18**	23	**19**	16	**20**	110
21	200	**22**	71						

1. [출제의도] 지수법칙 계산하기

$\left(3^{1-\sqrt{2}}\right)^2 \times 9^{\sqrt{2}} = 3^{2-2\sqrt{2}} \times 3^{2\sqrt{2}} = 3^2 = 9$

2. [출제의도] 미분계수 이해하기

$\lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$이고

$f'(x) = 3x^2 - 2$이므로 $f'(1) = 1$

3. [출제의도] 등비수열 이해하기

등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공비가 모두 k이므로

$a_n = k^n$

$a_2(k^2+1) = 3a_4$에서 $k^2(k^2+1) = 3k^4$

$k > 0$이므로 $k^2+1 = 3k^2$, $k^2 = \dfrac{1}{2}$에서

$k = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

따라서 $a_3 = k^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

4. [출제의도] 함수의 극한 이해하기

$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 0+} f(x) = 0 + (-1) = -1$

5. [출제의도] 곱의 미분법 이해하기

$f'(x) = 2 \times (x^2 - 2x + 5) + (2x+1)(2x-2)$

이므로 $f'(2) = 20$

6. [출제의도] 삼각함수의 성질 이해하기

$\sin\theta\tan\theta + \cos\theta = 3$의 양변에 $\cos\theta$를 곱하면

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 3\cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$이므로 $\cos\theta = \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$에서 $\sin\theta < 0$이므로

$\sin\theta = -\sqrt{1 - \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

그러므로 $\tan\theta = -2\sqrt{2}$

따라서 $\sin\theta - \tan\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3} - (-2\sqrt{2}) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$

7. [출제의도] 부정적분 이해하기

다항함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) = x^2 - kx + k - 1 \geq 0$이다.

이차방정식 $x^2 - kx + k - 1 = 0$의 판별식을 D라 하면

$D = (-k)^2 - 4 \times 1 \times (k-1)$

$= k^2 - 4k + 4$

$= (k-2)^2 \leq 0$

이므로 $k = 2$

$f(x) = \int (x^2 - 2x + 1)dx$

$= \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + C$ (C는 적분상수)

$f(0) = 2$에서 $C = 2$

따라서 $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + 2$이므로 $f(3) = 5$

8. [출제의도] 지수함수의 성질 이해하기

$2^{|x|} = t\ (t \geq 1)$이라 하면 $t + \dfrac{64}{t} \leq 20$에서

$t^2 - 20t + 64 \leq 0$, $(t-4)(t-16) \leq 0$

$4 \leq t \leq 16$

$2^2 \leq 2^{|x|} \leq 2^4$에서 밑 2가 1보다 크므로

$2 \leq |x| \leq 4$, $-4 \leq x \leq -2$ 또는 $2 \leq x \leq 4$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는 6

9. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$xf(x) = ax^3 + 2x - 3 + \int_0^1 f'(t)dt$의 양변에

$x = 0$을 대입하면

$0 \times f(0) = -3 + \int_0^1 f'(t)dt$에서 $\int_0^1 f'(t)dt = 3$

$xf(x) = ax^3 + 2x$, $f(x) = ax^2 + 2$

$\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0) = a = 3$

그러므로 $f(x) = 3x^2 + 2$

따라서 $\int_0^2 f(x)dx = \left[x^3 + 2x\right]_0^2 = 12$

10. [출제의도] 등차수열을 활용하여 문제해결하기

$\dfrac{1}{a_1 \times b_1} = \sum_{k=1}^{1} \dfrac{1}{a_k \times b_k} = \dfrac{1}{12}$

$n \geq 2$일 때

$\dfrac{1}{a_n \times b_n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{a_k \times b_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{a_k \times b_k}$

$= \dfrac{n}{8n+4} - \dfrac{n-1}{8n-4} = \dfrac{4}{(8n+4)(8n-4)}$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여

$\dfrac{1}{a_n \times b_n} = \dfrac{4}{(8n+4)(8n-4)}$

두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공차가 같으므로

공차를 d라 하면

$a_n = a_1 + (n-1)d$, $b_n = b_1 + (n-1)d$

$a_n \times b_n = (dn + a_1 - d)(dn + b_1 - d)$

$= \dfrac{(8n+4)(8n-4)}{4} = (4n+2)(4n-2)$

에서 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 모든 항이 자연수이므로 $a_n = 4n+2$, $b_n = 4n-2$ 또는 $a_n = 4n-2$, $b_n = 4n+2$

따라서

$\sum_{k=1}^{5}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{5} 8k = 8\sum_{k=1}^{5} k = 8 \times \dfrac{5 \times 6}{2} = 120$

11. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 속도를 v라 하면

$v = 3kt^2 - 12t + 1$

시각 $t = k$에서 점 P의 속도가 1이므로

$3k^3 - 12k + 1 = 1$에서

$3k^3 - 12k = 0$, $3k(k+2)(k-2) = 0$

$k > 0$이므로 $k = 2$

점 P의 시각 $t\ (t \geq 0)$에서의 가속도를 a라 하면

$a = 6kt - 12$

따라서 시각 $t = 2k$에서 점 P의 가속도는

$12k^2 - 12 = 12 \times 4 - 12 = 36$

12. [출제의도] 로그함수의 그래프를 활용하여 문제해결하기

두 삼각형 OCA, ACB의 넓이가 같으므로

$\overline{OA} = \overline{AB}$이다.

점 A는 선분 OB의 중점이고 점 B의 x좌표가 t이므로 점 A의 x좌표는 $\dfrac{t}{2}$이다.

직선 AB는 점 O를 지나므로

두 직선 OA, OB의 기울기가 같다.

그러므로 $\dfrac{\log_a \frac{t}{2} - 0}{\frac{t}{2} - 0} = \dfrac{\log_a t - 0}{t - 0}$에서

$\log_a t = \log_a 4$, $t = 4$

점 A는 두 곡선 $y = \log_a x$, $y = -2\log_a x + k$가 만나는 점이므로 $\log_a 2 = -2\log_a 2 + k$에서

$k = 3\log_a 2$

점 B의 좌표는 $(4, 2\log_a 2)$,

점 C의 좌표는 $(4, -\log_a 2)$에서

$\overline{BC} = 2\log_a 2 - (-\log_a 2) = 3\log_a 2$

삼각형 ACB의 넓이가 2이므로

$\dfrac{1}{2} \times \overline{BC} \times 2 = 3\log_a 2 = 2$에서 $a = 2\sqrt{2}$, $k = 2$

따라서 $a \times k \times t = 2\sqrt{2} \times 2 \times 4 = 16\sqrt{2}$

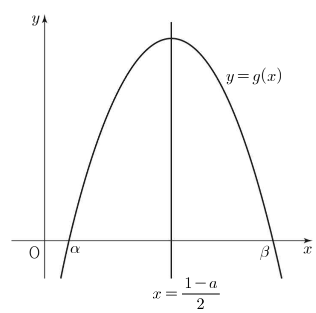
13. [출제의도] 정적분을 이용하여 추론하기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b는 상수),

$g(x) = x - 3 - f(x)$라 하자.

두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, $\beta\ (\alpha < 3 < \beta)$라 하면 $g(\alpha) = g(\beta) = 0$



$S_2 = \int_\alpha^\beta |f(x) - (x-3)|dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$이므로

직선 $x = 3$은 곡선 $y = g(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 이등분한다.

이때 $g(x) = -x^2 + (1-a)x - 3 - b$에서

이차함수 $y = g(x)$의 그래프는 직선 $x = \dfrac{1-a}{2}$에 대하여 대칭이므로 $\dfrac{1-a}{2} = 3$, $a = -5$

$S_2 - 2S_1 = 6$에서 $\dfrac{1}{2}S_2 - S_1 = 3$

$\dfrac{1}{2}S_2 - S_1$

$= \int_\alpha^3 |f(x) - (x-3)|dx - \int_0^\alpha |f(x) - (x-3)|dx$

$= -\int_\alpha^3 \{f(x) - (x-3)\}dx - \int_0^\alpha \{f(x) - (x-3)\}dx$

$= -\int_0^3 \{f(x) - (x-3)\}dx$

$= -\int_0^3 (x^2 - 6x + b + 3)dx$

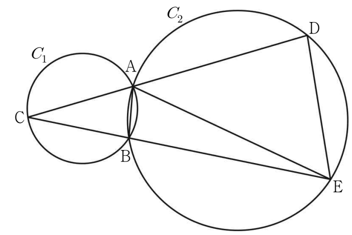
$= -\left[\dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + (b+3)x\right]_0^3$

$=18-3(b+3)=9-3b=3$

$b=2$

따라서 $f(x)=x^2-5x+2$이므로 $f(-1)=8$

14. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기



사각형 ABED가 원 C_2에 내접하므로

$\angle \mathrm{EBA}=\pi-\angle \mathrm{ADE}$에서 $\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{ADE}$

삼각형 ACB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\sin(\angle \mathrm{ABC})}=\dfrac{3}{\sin(\angle \mathrm{ABC})}=2r_1$

삼각형 AED에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin(\angle \mathrm{ADE})}=2r_2$

$r_1 : r_2=1:2$에서

$\dfrac{3}{\sin(\angle \mathrm{ABC})}:\dfrac{\overline{\mathrm{AE}}}{\sin(\angle \mathrm{ADE})}=2r_1:2r_2=1:2$

이므로 $\overline{\mathrm{AE}}=6$

삼각형 AED에서 코사인법칙에 의하여

$\cos(\angle \mathrm{ADE})=\dfrac{5^2+4^2-6^2}{2\times5\times4}=\dfrac{1}{8}$

삼각형 DCE에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{CE}}^2=8^2+4^2-2\times8\times4\times\dfrac{1}{8}=72$

따라서 선분 CE의 길이는 $6\sqrt{2}$

15. [출제의도] 도함수를 이용하여 추론하기

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$\{g(x)-x\}\{g(x)-f(x)\}=0$이므로

$g(x)=x$ 또는 $g(x)=f(x)$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x=2$에서 연속이다.

$g(2)=2$ 또는 $g(2)=f(2)$에서

$f(2)\neq2$이면 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가

$x=2$에서 만나지 않으므로

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x-2}=1$ 또는

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)$가 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $f(2)=2$

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$에서 $f(0)=0$, $f'(0)=1$이므로

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의

접선의 방정식은 $y=x$이다.

$h(x)=f(x)-x$라 하면

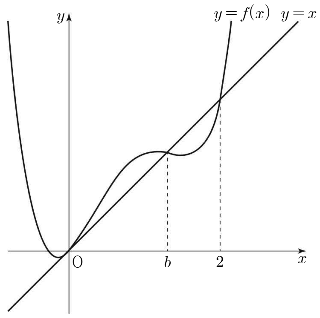
함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고

$h(0)=h'(0)=h(2)=0$이므로

$h(x)=x^2(x-2)(x-b)$ (b는 상수)

$h(b)=0$이므로 $f(b)=b$

(ⅰ) $0\le b\le2$일 때



조건 (나)에 의하여 $g(-4)=-g(4)$이므로

$g(4)=4$, $g(-4)=-4$

함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$x\le0$ 또는 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

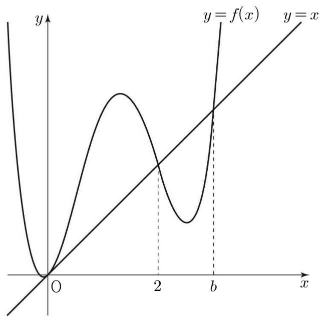
$g(x)=x$이다.

이때 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $b>2$일 때



(ⅰ)과 같은 방법으로 함수 $g(x)$를 구하면

$x\le0$ 또는 $x\ge b$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x$이다.

$2\le x\le b$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=x$이면

$x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $2\le x\le b$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)$이다.

이때 $0\le x\le2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)$이면 $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=f'(2)$가 되어

조건 (가)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $0\le x\le2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x$이다.

$x\ge b$인 모든 실수 x에 대하여

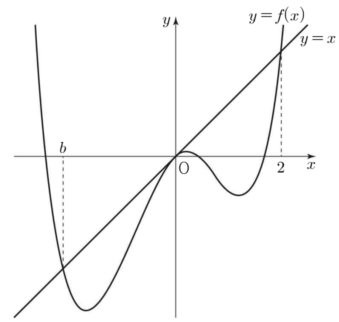
$g(-x)=-g(x)$이므로 조건 (나)에 의하여 $b=4$

$f(x)=x^2(x-2)(x-4)+x$

$g(x)=\begin{cases} x & (x\le2 \text{ 또는 } x\ge4) \\ x^2(x-2)(x-4)+x & (2<x<4) \end{cases}$

그러므로 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}=\dfrac{-2}{-6}=\dfrac{1}{3}$

(ⅲ) $b<0$일 때



(ⅱ)와 같은 방법으로 함수 $g(x)$를 구하면

$x\le b$ 또는 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=x$이고

$b<x<2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)=f(x)$이다.

$-2\le b<0$이면 $x\ge2$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

그러므로 $b<-2$

$x\ge-b$인 모든 실수 x에 대하여

$g(-x)=-g(x)$이므로 조건 (나)에 의하여 $b=-4$

$f(x)=x^2(x-2)(x+4)+x$

$g(x)=\begin{cases} x & (x\le-4 \text{ 또는 } x\ge2) \\ x^2(x-2)(x+4)+x & (-4<x<2) \end{cases}$

그러므로 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}=\dfrac{-34}{3}=-\dfrac{34}{3}$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여

모든 $\dfrac{g(-2)}{g(3)}$의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}+\left(-\dfrac{34}{3}\right)=-11$

16. [출제의도] 로그함수의 성질 이해하기

$x-3$, $5x-1$은 로그의 진수이므로

$x-3>0$, $5x-1>0$에서 $x>3$

방정식 $\log_{\sqrt{3}}(x-3)=\log_3(5x-1)$에서

$\log_3(x-3)^2=\log_3(5x-1)$

$(x-3)^2=5x-1$

$x^2-11x+10=(x-1)(x-10)=0$

따라서 $x>3$이므로 $x=10$

17. [출제의도] 정적분의 성질 이해하기

$\displaystyle\int_0^a(4x^2-3x)dx=\int_0^a(x^2+x)dx$에서

$\displaystyle\int_0^a(4x^2-3x)dx-\int_0^a(x^2+x)dx$

$\displaystyle=\int_0^a(3x^2-4x)dx$

$=\Big[x^3-2x^2\Big]_0^a$

$=a^3-2a^2=a^2(a-2)=0$

따라서 $a>0$이므로 $a=2$

18. [출제의도] 수열의 합 이해하기

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(a_k+3)=\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}3$

$\displaystyle=\sum_{k=1}^{5}a_k+15=30$

에서 $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}a_k=15$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(2a_k+b_k)=2\sum_{k=1}^{5}a_k+\sum_{k=1}^{5}b_k$

$=2\times 15+\sum_{k=1}^{5} b_k=53$

따라서 $\sum_{k=1}^{5} b_k=23$

19. [출제의도] 도함수를 활용하여 문제해결하기

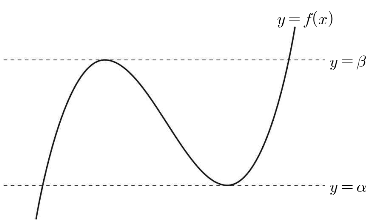
곡선 $y=f(x)$가 점 $(0, 1)$을 지나므로
$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)
$f'(x)=3x^2+2ax+b$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 1)$에서의 접선을 l이라 하면 직선 l의 기울기는 $f'(0)=b$
이때 직선 l이 두 점 $(0, 1)$, $(1, 0)$을 지나므로
직선 l의 기울기는 $\frac{0-1}{1-0}=-1$에서 $b=-1$
곡선 $y=f(x)$가 점 $(1, 0)$을 지나므로
$f(1)=2+a+b=a+1=0$에서 $a=-1$
따라서 $f(x)=x^3-x^2-x+1$이므로 $f(3)=16$

20. [출제의도] 삼각함수를 활용하여 문제해결하기

$0<k<\frac{2}{t}$에서 $0<tk\pi<2\pi$
$f(k)=3k$에서 $\sin(tk\pi)=\sqrt{3}k>0$이고
$g(k)=3k$에서 $\cos(tk\pi)=-k<0$이므로
$\frac{\pi}{2}<tk\pi<\pi$
$f(k)=g(k)$에서 $\tan(tk\pi)=-\sqrt{3}$이므로
$tk\pi=\frac{2}{3}\pi$, $tk=\frac{2}{3}$
$f(k)=3k$에서 $\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{3}{2}=3k$이므로
$k=\frac{1}{2}$, $t=\frac{4}{3}$
따라서 $60(t+k)=60\left(\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\right)=110$

21. [출제의도] 함수의 연속을 이용하여 추론하기

최고차항의 계수가 양수인 삼차함수 $f(x)$가
극값을 갖지 않으면 실수 전체의 집합에서 증가한다.
$g(t)$는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수이므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=1$
그러므로 모든 실수 t에 대하여 $g(t)+g(t-4)=2$가 되어 조건을 만족시키지 않는다.

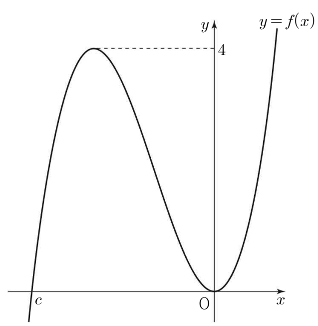


삼차함수 $f(x)$의 극솟값을 α, 극댓값을 β라 하자.
(α, β는 $\alpha<\beta$인 상수)

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t<\alpha \text{ 또는 } t>\beta)\\ 2 & (t=\alpha \text{ 또는 } t=\beta)\\ 3 & (\alpha<t<\beta)\end{cases}$$

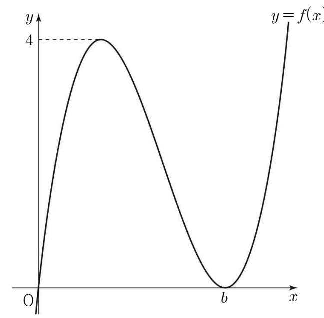
함수 $g(t)$는 $t=\alpha$와 $t=\beta$에서만 불연속이고,
함수 $g(t-4)$는 $t=\alpha+4$와 $t=\beta+4$에서만 불연속이다.

$\lim_{t\to\alpha+}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim_{t\to\alpha+}g(t)+\lim_{t\to\alpha+}g(t-4)=3+1=4$,
$\lim_{t\to\alpha-}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim_{t\to\alpha-}g(t)+\lim_{t\to\alpha-}g(t-4)=1+1=2$
이므로
$\lim_{t\to\alpha+}\{g(t)+g(t-4)\}\neq\lim_{t\to\alpha-}\{g(t)+g(t-4)\}$이고,
$\lim_{t\to(\beta+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim_{t\to(\beta+4)+}g(t)+\lim_{t\to(\beta+4)+}g(t-4)=1+1=2$,
$\lim_{t\to(\beta+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim_{t\to(\beta+4)-}g(t)+\lim_{t\to(\beta+4)-}g(t-4)=1+3=4$
이므로
$\lim_{t\to(\beta+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}\neq\lim_{t\to(\beta+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$
에서 함수 $g(t)+g(t-4)$는
$t=\alpha$, $t=\beta+4$에서 불연속이다.
조건에 의하여 함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=0$과 $t=a$에서만 불연속이고 $a>0$이므로
$\alpha=0$, $\beta+4=a$ ⋯ ㉠
함수 $g(t)+g(t-4)$는 $t=\alpha$, $t=\beta+4$에서만 불연속이므로 $t=\alpha+4$에서 연속이다.
$\lim_{t\to(\alpha+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}=\lim_{t\to(\alpha+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=g(\alpha+4)+g(\alpha)$
$\lim_{t\to(\alpha+4)+}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t-4)=\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+3$,
$\lim_{t\to(\alpha+4)-}\{g(t)+g(t-4)\}$
$=\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t-4)=\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+1$,
$g(\alpha+4)+g(\alpha)=g(\alpha+4)+2$이므로
$\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)+3=\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)+1=g(\alpha+4)+2$
이때 모든 실수 t에 대하여
$g(t)=1$ 또는 $g(t)=2$ 또는 $g(t)=3$이므로
$\lim_{t\to(\alpha+4)+}g(t)=1$, $\lim_{t\to(\alpha+4)-}g(t)=3$, $g(\alpha+4)=2$
그러므로 $\beta=\alpha+4$
㉠에 의하여 $\beta=4$, $a=8$
그러므로 함수 $f(x)$의 극솟값은 0, 극댓값은 4이다.
함수 $f(x)$가 극소가 되는 x의 값을 b라 하자.
(i) $b=0$일 때



함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 $c(c<0)$이라 하자.
$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^2(x-c)$
$f'(x)=3x^2-2cx=x(3x-2c)$에서 $f'\left(\frac{2}{3}c\right)=0$
그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{2}{3}c$에서 극댓값 4를 갖는다.
$f\left(\frac{2}{3}c\right)=-\frac{4}{27}c^3=4$이므로 $c=-3$에서
$f(x)=x^2(x+3)$
그러므로 $f(a)=f(8)=704$

(ii) $b\neq0$일 때



$f(0)=0$이므로 $f(x)=x(x-b)^2$
$f'(x)=3x^2-4bx+b^2=(3x-b)(x-b)$에서
$f'\left(\frac{b}{3}\right)=0$
그러므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{b}{3}$에서 극댓값 4를 갖는다.
$f\left(\frac{b}{3}\right)=\frac{4}{27}b^3=4$이므로 $b=3$에서
$f(x)=x(x-3)^2$
그러므로 $f(a)=f(8)=200$
(i), (ii)에 의하여 $f(a)$의 최솟값은 200

22. [출제의도] 수열의 귀납적 정의를 이용하여 추론하기

조건 (가)에서 $a_1\times a_2>0$이므로
$a_1>0$, $a_2>0$ 또는 $a_1<0$, $a_2<0$
$a_1<0$이면 $a_2=a_1^2>0$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.
$a_1>0$이므로 $a_2=-2a_1+3$
$a_2>0$이므로 $a_3=-2a_2+3=4a_1-3$ ⋯ ㉠
(i) $a_3<0$일 때
$a_4=a_3^2>0$이므로
$a_5=-2a_3^2+3=a_3$에서 $(2a_3+3)(a_3-1)=0$
$a_3<0$이므로 $a_3=-\frac{3}{2}$
㉠에 의하여 $a_1=\frac{3}{8}$
(ii) $a_3=0$일 때
$a_4=a_3^2=0$, $a_5=a_4^2=0$이므로 $a_3=a_5=0$
㉠에 의하여 $a_1=\frac{3}{4}$
(iii) $a_3>0$일 때
(a) $0<a_3<\frac{3}{2}$일 때
$a_4=-2a_3+3>0$이므로
$a_5=-2a_4+3=4a_3-3=a_3$에서 $a_3=1$
㉠에 의하여 $a_1=1$
(b) $a_3\geq\frac{3}{2}$일 때
$a_4=-2a_3+3\leq0$이므로
$a_5=a_4^2=(-2a_3+3)^2=a_3$에서
$(4a_3-9)(a_3-1)=0$
$a_3\geq\frac{3}{2}$이므로 $a_3=\frac{9}{4}$
㉠에 의하여 $a_1=\frac{21}{16}$
(i), (ii), (iii)에 의하여 모든 a_1의 값의 합은
$\frac{3}{8}+\frac{3}{4}+1+\frac{21}{16}=\frac{55}{16}$이므로 $p=16$, $q=55$
따라서 $p+q=71$

[기하]

23	①	**24**	③	**25**	②	**26**	⑤	**27**	④
28	⑤	**29**	20	**30**	243				

23. [출제의도] 벡터의 연산 계산하기

$\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CP}$를 만족시키는 점을 P라 하면 점 P는 선분 CD 위의 점이고

$|\overrightarrow{CP}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{CD}|=1$에서 $|\overrightarrow{DP}|=2$이므로

$\left|\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\right|=|\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}|$

$=|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$

24. [출제의도] 타원의 정의 이해하기

$a>2$이면 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$의 장축의 길이는 $2a$, 단축의 길이는 4이므로 $2a=4\times2$, $a=4$

$0<a<2$이면 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$의 장축의 길이는 4, 단축의 길이는 $2a$이므로 $4=2a\times2$, $a=1$

따라서 구하는 모든 양수 a의 값의 합은 $4+1=5$

25. [출제의도] 포물선의 접선의 방정식 이해하기

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\left(\frac{1}{p}, 2\right)$에서의 접선의 방정식은 $2y=2p\left(x+\frac{1}{p}\right)$, $y=px+1$

이고, 포물선의 준선의 방정식은 $x=-p$이므로

포물선 위의 점 $\left(\frac{1}{p}, 2\right)$에서의 접선이 준선 $x=-p$와 만나는 점의 y좌표는 $-p^2+1$

$-p^2+1=-\frac{5}{4}$에서 $p^2=\frac{9}{4}$

따라서 양수 p의 값은 $\frac{3}{2}$

26. [출제의도] 쌍곡선의 점근선 이해하기

$c^2=4+5=9$에서 $c=3$

쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$의 점근선의 방정식은

$y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$이므로

점 F를 지나고 x축에 수직인 직선이 쌍곡선의 두 점근선과 만나는 두 점의 좌표는

$\left(3, \frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(3, -\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$

따라서 삼각형 F′PQ의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{PQ}\times\overline{FF'}=\frac{1}{2}\times3\sqrt{5}\times6=9\sqrt{5}$

27. [출제의도] 포물선의 정의를 이용하여 추론하기

두 포물선 C_1, C_2의 준선을 l이라 하자.

점 F를 지나고 준선 l과 수직인 직선을 m이라 하면 직선 m은 두 포물선 C_1, C_2의 축이고,

두 점 A, B는 직선 m에 대하여 서로 대칭이다.

점 A에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하자.

포물선 C_1의 꼭짓점을 C라 하고 두 직선 l, m이 만나는 점을 D라 하면

$\overline{FA}=\overline{HA}$, $\overline{DC}=\overline{CF}$ ⋯ ㉠

또한 포물선 C_2의 초점을 E라 하면

$\overline{EA}=\overline{HA}$, $\overline{DF}=\overline{FE}$ ⋯ ㉡

선분 AB와 직선 m이 만나는 점을 G라 하자.

두 점 A, B가 직선 m에 대하여 서로 대칭이므로 선분 AB와 직선 m이 서로 수직이고

삼각형 AFE는 $\overline{AF}=\overline{AE}$인 이등변삼각형이므로 점 G는 선분 EF의 중점이다.

그러므로 $\overline{FG}=\overline{GE}$이고, ㉠, ㉡에 의하여

$\overline{DC}=\overline{CF}=\overline{FG}=\overline{GE}$

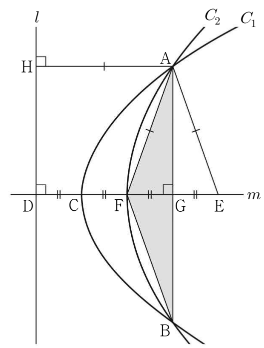
이고 $\overline{AF}=\overline{HA}=\overline{DC}+\overline{CF}+\overline{FG}=6$이므로 $\overline{FG}=2$

직각삼각형 AFG에서

$\overline{AG}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{AB}=8\sqrt{2}$

따라서 삼각형 AFB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times2\times8\sqrt{2}=8\sqrt{2}$



28. [출제의도] 타원의 접선의 방정식을 활용하여 문제 해결하기

두 양수 p, q에 대하여 주어진 타원의 방정식을

$\frac{x^2}{p^2}+\frac{y^2}{q^2}=1$이라 하자.

타원의 두 초점이 F$(1, 0)$, F′$(-1, 0)$이고

단축의 길이가 $2\sqrt{5}$이므로 $q=\sqrt{5}$

$p^2=q^2+1^2=6$에서 $p=\sqrt{6}$

그러므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$

네 선분 AB, BF, FP, PA로 둘러싸인 도형의 넓이는 두 삼각형 ABF, AFP의 넓이의 합과 같고, 삼각형 ABF의 넓이는 점 P의 위치에 관계없이 일정하므로 삼각형 AFP의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P가 P_0이다.

또한 삼각형 AFP의 넓이가 최대이려면 타원 위의 점 P에서의 접선의 기울기가 직선 AF의 기울기와 같아야 한다.

타원 위의 점 $\mathrm{P}_0(a, b)$에서의 접선의 방정식은

$\frac{ax}{6}+\frac{by}{5}=1$, $y=-\frac{5a}{6b}x+\frac{5}{b}$

이고, 점 A의 y좌표를 k라 하면 직선 AF의 기울기는 $-k$이므로

$-\frac{5a}{6b}=-k$, $\frac{5a}{6b}=k$ ⋯ ㉠

점 A와 점 B는 x축에 대하여 서로 대칭이고 점 F와 점 F′은 y축에 대하여 서로 대칭이므로

$\overline{BF}=\overline{AF'}$이다. 그러므로

$\overline{BF}+\overline{FP_0}+\overline{P_0A}=\overline{AF'}+\overline{FP_0}+\overline{P_0A}$

$=\overline{F'A}+\overline{AP_0}+\overline{FP_0}=2\sqrt{6}$

또한 타원의 장축의 길이가 $2\sqrt{6}$이므로

$\overline{F'P_0}+\overline{FP_0}=2\sqrt{6}$

두 식을 연립하여 계산하면

$\overline{F'P_0}=\overline{F'A}+\overline{AP_0}$

이므로 세 점 F′$(-1, 0)$, A$(0, k)$, $\mathrm{P}_0(a, b)$는 한 직선 위에 있다. 그러므로

$\frac{k-0}{0-(-1)}=\frac{b-0}{a-(-1)}$

에서 $k=\frac{b}{a+1}$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{5a}{6b}=\frac{b}{a+1}$, $5a^2+5a-6b^2=0$

이고 점 $\mathrm{P}_0(a, b)$가 타원 위의 점이므로

$\frac{a^2}{6}+\frac{b^2}{5}=1$에서 $5a^2+6b^2=30$

두 식을 연립하여 계산하면

$2a^2+a-6=(2a-3)(a+2)=0$

$a>0$이므로 $a=\frac{3}{2}$이고,

$5\times\left(\frac{3}{2}\right)^2+6b^2=30$에서 $b^2=\frac{25}{8}$, $b=\frac{5\sqrt{2}}{4}$

따라서 $a\times b=\frac{3}{2}\times\frac{5\sqrt{2}}{4}=\frac{15\sqrt{2}}{8}$

29. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 활용하여 문제해결하기

$\overline{OF'}=\overline{OF}=\overline{OP}$에서 점 P는 선분 FF′을 지름으로 하는 원 위의 점이므로 $\angle\mathrm{F'PF}=\frac{\pi}{2}$

$\angle\mathrm{F'PQ}=\frac{\pi}{2}$이므로 선분 F′Q는 세 점 P, F′, Q를 지나는 원의 지름이고, 원의 넓이가 25π이므로

$\overline{F'Q}=10$

$\overline{F'Q}:\overline{FQ}=5:3$에서 $\overline{FQ}=6$

$\overline{F'Q}-\overline{FQ}=4$이므로

$\overline{PF}=k$라 하면 $\overline{F'P}=k+4$, $\overline{PQ}=k+6$

직각삼각형 PF′Q에서

$10^2=(k+4)^2+(k+6)^2$이므로

$k^2+10k-24=(k+12)(k-2)=0$, $k=2$

직각삼각형 PF′F에서

$(2c)^2=2^2+6^2=40$, $c^2=10$

따라서 $c^2\times\overline{PF}=10\times2=20$

30. [출제의도] 벡터의 연산을 이용하여 추론하기

점 G에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 H_1, 선분 BC에 내린 수선의 발을 H_2라 하자.

점 G는 선분 EF를 $1:2$로 내분하는 점이므로

삼각형 $\mathrm{EH_1G}$와 삼각형 $\mathrm{FH_2G}$는 서로 닮음이고

닮음비는 $1:2$이다. 그러므로 $\overline{GH_2}=2\overline{GH_1}$이고,

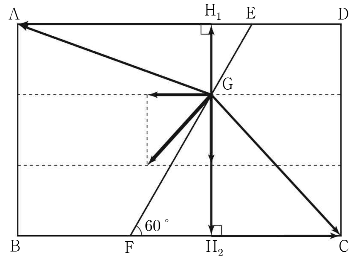
$\overline{GH_1}+\overline{GH_2}=\overline{AB}$이므로 $\overline{GH_1}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{GH_2}=\frac{2}{3}\overline{AB}$

$|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|=\left|\left(\overrightarrow{GH_1}+\overrightarrow{H_1A}\right)+\left(\overrightarrow{GH_2}+\overrightarrow{H_2C}\right)\right|$

$=\left|\left(\overrightarrow{GH_1}+\overrightarrow{GH_2}\right)+\left(\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C}\right)\right|$

$=\left|\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C}\right)\right|$

$=\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C}\right)\right|$

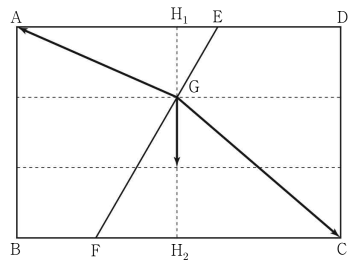


벡터 $\overrightarrow{AB}$와 벡터 $\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C}$는 서로 수직이므로

$$|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}| = \sqrt{\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{H_1A}+\overrightarrow{H_2C}\right|^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\overline{AB}\right)^2+\left|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}\right|^2} \ \cdots \ ㉠$$

그러므로 $|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|$의 값은 $\overline{H_1A}=\overline{H_2C}$일 때 최소이고, 그 값은 $\frac{1}{3}\overline{AB}$이다. 즉, $m=\frac{1}{3}\overline{AB}$



또한 $|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|$는 $\left|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}\right|$의 값이 최대일 때 최댓값 M을 갖는다.

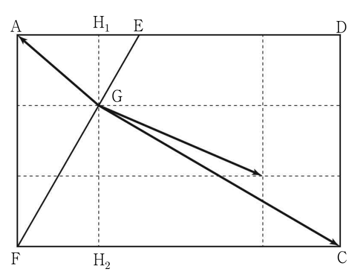
(i) $\overline{H_1A} \le \overline{H_2C}$일 때

$$\left|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}\right| = \overline{H_2C}-\overline{H_1A}$$
$$= \left(8\sqrt{3}-\overline{H_1A}\right)-\overline{H_1A}$$
$$= 8\sqrt{3}-2\overline{H_1A}$$

$\overline{H_1A}$의 값은 점 F가 점 B와 일치할 때 최소이고 그 값은 $\overline{FH_2}$와 같으므로 $\frac{2\sqrt{3}}{3}m$이다.

그러므로 $\overline{H_1A} \le \overline{H_2C}$일 때

$\left|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}\right|$의 최댓값은 $8\sqrt{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}m$



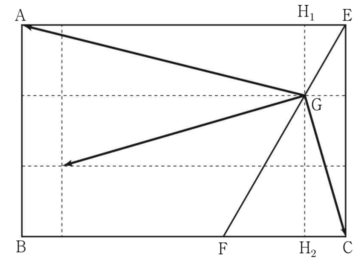
(ii) $\overline{H_1A} > \overline{H_2C}$일 때

$$\left|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}\right| = \overline{H_1A}-\overline{H_2C}$$
$$= \left(8\sqrt{3}-\overline{H_2C}\right)-\overline{H_2C}$$
$$= 8\sqrt{3}-2\overline{H_2C}$$

$\overline{H_2C}$의 값은 점 E가 점 D와 일치할 때 최소이고 그 값은 $\overline{EH_1}$과 같으므로 $\frac{\sqrt{3}}{3}m$이다.

그러므로 $\overline{H_1A} > \overline{H_2C}$일 때

$\left|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}\right|$의 최댓값은 $8\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}m$



(i), (ii)에 의하여 점 E가 점 D와 일치할 때

$\left|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}\right|$는 최댓값 $8\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}m$을 가진다.

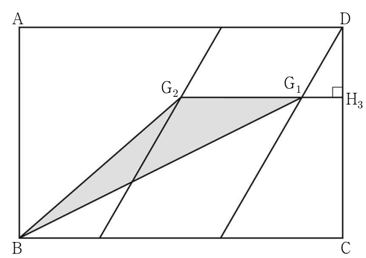
이때 $|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|=M$이고, ㉠에서

$\left|\overline{H_1A}-\overline{H_2C}\right| = \sqrt{|\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}|^2-m^2}$이므로

$$8\sqrt{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}m = \sqrt{M^2-m^2}$$
$$= \sqrt{(\sqrt{13}m)^2-m^2} = 2\sqrt{3}m$$

그러므로 $m=3$, $\overline{AB}=3m=9$

두 점 G_1, G_2의 위치는 그림과 같다.



점 G_1에서 선분 CD에 내린 수선의 발을 H_3이라 하면

$\overline{G_1G_2}=\overline{G_2H_3}-\overline{G_1H_3}=4\sqrt{3}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$,

$\overline{H_3C}=\overline{CD}-\overline{DH_3}=9-3=6$

그러므로 삼각형 BG_1G_2의 넓이 S는

$$S=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 6=9\sqrt{3}$$

따라서 $S^2=(9\sqrt{3})^2=243$